移動からみた空間の分析

筑波大学 副学長　腰塚武志

1. はじめに

都市を構成している様々な建造物は人工的に造られたものであり，これが壊れないように様々な分析がなされてきた．この成果は構造力学という分野にまとめられて今日までに至っており，これらの蓄積の上に立ってさらに技術的進歩が重ねられつつある．

ところで，この人工物は何らかの使用目的があって造られているわけだが，その利用からみた分析等は個々には何らかの形でやられてはいるものの，これが一般化されているとはいい難い．個々の建物についてはこれでよいのかもしれないが，大規模な建造物の集合である都市を考えるとき，利用から見た議論を基礎的部分から始めなければならない．そして，これが構造力学ほどではないにしても，この基礎の上にさらに発展が可能なようなものにするために，この基礎に関して議論し続けなければならないだろう．腰塚はこの基礎の一つが以下で展開するような距離分布と通過量分布と考え，様々な空間について論じてきた (文献 [1,2,3,6,12,13,14,15])．ここではネットワークパターンについて距離分布と通過量分布を導出することから始め，この考えを建物や平面に拡張していく．

2. 線分上の距離分布，通過量分布

図1のように長さ a の線分（直線分である必要はない）を考え，この線分上のあらゆる2点を人やものが動くものとする．このとき，2点のペア (x_1, x_2) の距離が r 以内のものはどのくらいあるのだろうか．このようなことを議論しようとするときは，よく用いられるように，図2のように2次元で x_1 軸 x_2 軸を考えて図1で表現される状態を図2の点で表わすのがよい．そして2点の距離が $|x_1 - x_2| < r$ である領域は計算してみると容易にわかるように図2の斜線で示された領域 E となっている（文献 [1]）．そこでもし (x_1, x_2) によって交通量に多い少ないがあって交通需量の分布が図2の平面上で $\mu(x_1, x_2)$ と表わされているとすれば，2点上のペア (x_1, x_2) の距離が r 以内である量を $F(r)$ で表現すれば

$$F(r) = \iint_{|x_1 - x_2| < r} \mu(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \qquad (1)$$

と表わすことができる．

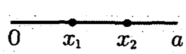


図1 1次元空間の2点

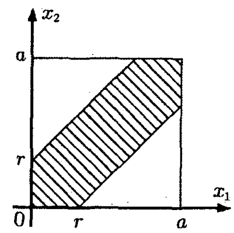


図2 2次元表示

もし x_1 と x_2 のあらゆるペアを同様に考慮するとしたら（または特定の点が多い少ないというのはあとで考えるとしてもよい），$\mu(x_1, x_2)$ は定数としてよいので，ここでは $\mu(x_1, x_2) = 1$ とすれば，上式の $F(r)$ は図2における斜線領域 E の面積を表わすことになり

$$F(r) = a^2 - (a - r)^2 = 2ar - r^2$$

となる．そこで丁度ペアの距離が r である量の密度は $F(r)$ が累積なのでこれを r で微分することにより

$$f(r) = 2(a - r) \qquad (2)$$

と求めることができる．つまり丁度距離が r のペアの量は

$$F(r + \Delta r) - F(r) \simeq f(r)\Delta r$$

で表現されることになるわけである．この稿では上記の $f(r)$ を距離 r の点のペアがどのくらいあるかを表わす「距離の分布」という言葉で表現することとする．

つぎに通過量に話を移そう．先の図1のところで，移動は，移動量の分布 $\mu(x_1, y_1)$ がわかっているとすると，任意の一地点 x を通過するのは，x をはさんで出発地点と目的地点がある場合だから，この量 $F(x)$ は

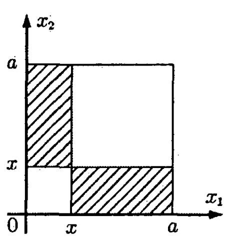
$$F(x) = \iint_{x_1<x<x_2, x_2<x<x_1} \mu(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

と表わすことができる．そこでこの関数 $\mu(x_1, x_2)$ がわかれば，任意の地点の通過量 $F(x)$ を計算することができる．この計算は図3のような斜線の領域で $\mu(x_1, x_2)$ を積分すればよく，最も簡単な前例すなわち各点の密度が一様な場合 $(\mu(x_1, x_2) = 1)$ ではこの領域の面積となるので容易に

$$F(x) = 2x(a-x) \tag{3}$$

となることがわかる．これをグラフで表わすと図4のようになり，この場合 $x = a/2$ すなわち図1の線分の中心で最も混雑が激しくなり，このとき $F(a/2) = a^2/2$ が得られる．つまり交通の発生や集中が一様に分布していても中心付近の混雑が最も大きくしかも a の2乗に比例するわけである．

以上は簡単な計算であるが，これでもいくつかの示唆を我々に与えてくれる．最も重要な点は出発地点や目的地点が一様に分布していてさえ中心が混むということである．東京の一極集中の弊害の議論で決って出て来るのは中心に立地する施設の移転であるが，中心の混雑は中心に位置する施設のみに依って起こっているわけではない．中心に直接は無関係ながらそこを通過する量が中心で多くなることにも依存している事実をこの結果が示している．



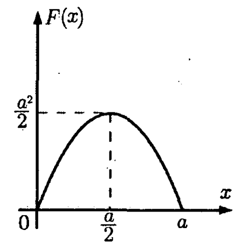


図3 地点 x を通る領域　図4 通過量 $F(x)$ の分布

3. 閉曲線上の距離分布，通過量分布

さて前章の議論を線分の2つの端点を結んで，図5のような閉曲線にしたらどうなるだろうか．長さが同じでも人が通るということから変化が起きることは容易に想像がつくだろう．

まず距離分布に関しては，図2で議論した部分を少しかえればすぐ計算することができる．端の2点が結ばれたためどんなに長くてもこの閉曲線間の2点の最短距離は長さの半分 $a/2$ 以上にはならない．そこで $|x_1 - x_2| > a/2$ のときは，結ばれた方を通るので距離は $a - |x_1 - x_2|$ となる．そこであとは x_1 と x_2 の大きさの場合分けを考えれば，x_1 と x_2 の距離 $D(x_1, x_2)$（以降距離とは最短距離をいうものとする）が r 以内である領域は図6の斜線部分のようになり

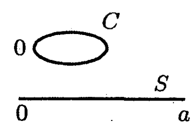
$$F(r) = \int_{D(x_1,x_2)<r} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = 2ar - r^2 + r^2 = 2ar$$

が得られる．そこでこれを r で微分した距離分布は

$$f(r) = 2a \quad (0 < r < a/2) \tag{4}$$

となり，一様な分布となることがわかる．

つぎに通過量分布だが，これは距離分布のときの



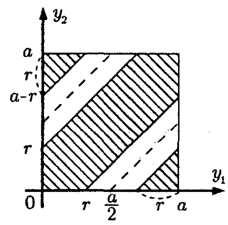


図5 長さ a の閉曲線　図6 距離 r 以下の領域

図6のような座標を用いても計算できるが，簡単なために以下のように座標 x_1, x_2 を計算しやすい y_1, y_2 に変換する．すなわち通過点 x は閉曲線の場合，どこにとっても同じなので，図7のように y 座標を導入し，y 座標の原点を通過地点 x とする．そして1つの点 y_1 の座標を原点から時計回りに0から a までとし，他の点 y_2 については反対に原点から反時計回りに0から a とする．すると原点（x 地点）を通る2点 y_1, y_2 のペアーについては，原点を通らないよりも原点を通った方が近いので，1つの場合は $y_1 + y_2 < a - (y_1 + y_2)$ となり，このとき $y_1 + y_2 < a/2$. 他の1つは y_1 や y_2 が a に近い，すな

わちぐるっと回って原点に近づいた場合で，このときは $(a-y_1)+(a-y_2) < a/2$ なので $y_1+y_2 > 3a/2$ が成り立つ．よって地点 x を通る通過量 $F(x)$ は図 8 の斜線部分となり

$$F(x) = \int_{y_1+y_2<\frac{a}{2},\ y_1+y_2>\frac{3}{2}a} \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \frac{a^2}{4} \qquad (5)$$

が得られる．

ここで前章の結果と比較するために，両方とも長

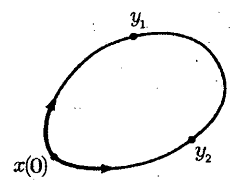


図 7 座標の変換

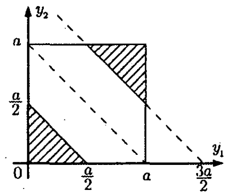


図 8 原点を通る領域

さ a の線分 s と両端がついた閉曲線 c があるものとし，この両者について距離分布と通過量分布を比較するとそれぞれ図 9，図 10 のようになる．これをみると閉曲線（環状線）の場合，距離分布も通過量分布も一様であり，環状線が基本的なパターンであるとみなすことができよう．

ところで距離分布と通過量分布は無関係ではなく，距離の最大値を R，対象領域を D とすると

$$\int_0^R rf(r)\mathrm{d}r = \int_{x\in D} F(x)\mathrm{d}x \qquad (6)$$

が成立している．左辺の $f(r)\Delta r$ が距離 r の点のペアーを表しているので r $f(r)\Delta r$ は丁度距離 r のペアーが移動する量であって，左辺の積分は，総移動距離を表している．右辺の $F(x)\Delta x$ は丁度 x 地点を通過するペアーに区間 Δx をかけたものであり，右辺の積分も総移動距離となっていることはうなづけよう．最も簡単な上の例では，線分 s のとき

$$\int_0^a rf_s(r)\mathrm{d}r = \int_0^a 2r(a-r)\mathrm{d}r,$$

$$\int_0^a F_s(x)\mathrm{d}x = \int_0^a 2x(a-x)\mathrm{d}x$$

なので式 (6) をみたし，閉曲線 c においても

$$\int_0^{a/2} rf_c(r)\mathrm{d}r = \frac{a^3}{4},\quad \int_0^a F_c(x)\mathrm{d}x = \frac{a^3}{4}$$

なので，同様に式 (6) が成立していることはわかるだろう．

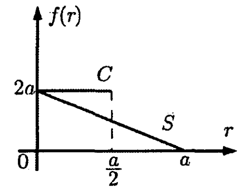


図 9 距離分布

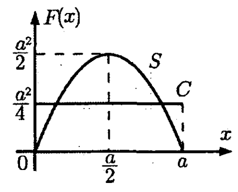


図 10 通過量分布

4. 放射状ネットワーク上の距離分布と通過量分布

次に単純な線分ではなく，線分から構成されるネットワーク上の距離分布と通過量分布について議論しよう．まず図 11 のように中心で交わる n 本の線分を考え，この線分の長さを a とし，この長さ na の線分の任意の点から任意の点までの距離の分布を求めよう．

ここでこれまでの成果を用いるため，距離を生じ

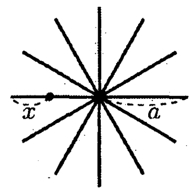
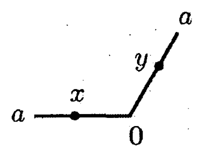


図 11 放射状パターン



12 座標 x, y

せしめる 2 点 (起点と終点) の位置により，場合を分けて考えることにする．まず，長さ a の線分の内部に起点と終点がある場合には，距離分布は式 (2) のようになるのでこれが n 本存在するから，この場合の分布に添字の 1 をつけるとすれば距離分布 $f_1(r)$ は

$$\begin{array}{lccc} 0<r<a \text{ のとき} & f_1(r) & = & 2n(a-r) \\ \text{それ以外} & f_1(r) & = & 0 \end{array} \qquad (7)$$

となる．つぎに 2 点が別々な線分にある場合には，任意の 2 本の 1 つの組合せに図 12 のように中心から座標を与えれば，$0<x<a$，$0<y<a$ の条件のもと，x から y への移動のみを考えると，距離分布は $x+y=r$ の分布ということになる．これについては $0<r\leq a$ のとき図 13 から明らかなように

$$F(r) = \int_{x+y<r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}r^2,$$

$a < r < 2a$ のときは図 14 より

$$F(r) \;=\; \frac{1}{2}r^2 - (r-a)^2$$

となっている．組合せの数は線分 1 本に相手が $(n-$

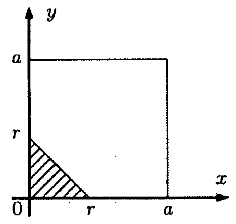


図 13　$0 < r \leq a$ のとき

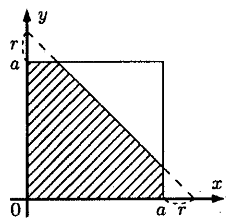


図 14　$a < r < 2a$ のとき

$1)$ だから往復で $n(n-1)$ となるので，この場合の分布を添字 2 で表現すれば

$0 < r \leq a$ のとき

$$F_2(r) \;=\; \frac{1}{2}n(n-1)r^2,$$

$a < r < 2a$ のとき

$$F_2(r) \;=\; n(n-1)\left\{\frac{1}{2}r^2 - (r-a)^2\right\}$$

となる．そこで $F_2(r)$ を r で微分してこの場合の距離分布 $f_2(r)$ は

$$0 < r \leq a \text{ のとき} \quad f_2(r) \;=\; n(n-1)r$$

$$a < r < 2a \text{ のとき} \quad f_2(r) \;=\; n(n-1)(2a-r) \tag{8}$$

と得られる．以上により，求める距離分布は $f(r) = f_1(r) + f_2(r)$ なので，

$0 < r \leq a$ のとき

$$f(r) \;=\; n\{(n-3)r + 2a\},$$

$a < r < 2a$ のとき

$$f(r) \;=\; n(n-1)(2a-r) \tag{9}$$

と導かれる．

次にこの放射状パターンにおける通過量分布を計算しよう．図 11 のように放射状を構成する長さ a の線分の端を座標の原点にとり，そこから x 地点における通過量を考えると，原点から x までの地点の区間を I_1，地点 x から中心までの区間と注目している線分以外の総ての線分を含めた区間を I_2 とすれば，地点 x を通る通過量 $F(x)$ は

$$F(x) = \int_{x_1 \in I_1, x_2 \in I_2; x_2 \in I_1, x_1 \in I_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

となり，I_1 の長さが x，I_2 の長さが全体の長さ na より x を引いたものすなわち $na - x$ となるので

$$F(x) = 2x(na - x) \quad (0 < x < a) \tag{10}$$

と簡単に計算できる．地点 x をとった線分はどれをとっても同じなので，上式は総ての線分の通過量分布を表している．そこで前に述べた関係 (6) を確かめるために，式 (9) より

$$\int_0^R rf(r)\mathrm{d}r = \int_0^a n\{(n-3)r + 2a\}r\mathrm{d}r + \int_a^{2a} n(n-1)(2a-r)r\mathrm{d}r = n\left(n - \frac{2}{3}\right)a^3$$

が得られ，同様に式 (10) で表される線分は n 本あるので

$$n\int_0^a F(x)\mathrm{d}x = \int_0^a 2x(na-x)\mathrm{d}x = n\left(n - \frac{2}{3}\right)a^3$$

となり式 (6) は成立している．またこの結果を総延長 na の 2 乗でわると距離の平均値 $\bar{r}$ は

$$\bar{r} = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)a \tag{11}$$

と得られる．

5. 格子状ネットワークの距離分布と通過量分布

格子状パターンについて，ここでは図 15 のように線分 1 本の長さを $6b$ とし，格子間隔を $2b$ とする．

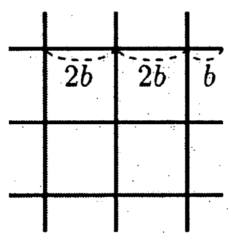


図 15 格子状ネットワーク

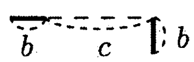


図 16 c 離れた 2 線分

まず距離分布であるが，このネットワークを長さ b の線分に分解してこれを単位として考えると，原

理的には以下に述べる2つの距離分布から求めることが出来る．1つは図16のように c だけ離れた長さ b の線分間の距離分布である．このときの距離分布は図13,14で求めた距離分布，すなわち式(8)において $n=2$ とおき a を b に r を $r-c$ に置き換えてやればよい．そこで，この時の距離の分布は

$0<r-c\leq b$ すなわち $c<r\leq b+c$ のとき

$$f(r) \;=\; 2(r-c)$$

$b+c<r<2b+c$ のとき

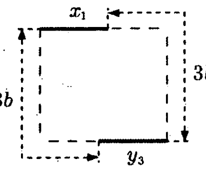
$$f(r) \;=\; 2(2b+c-r) \qquad (12)$$

となる．2つ目は例えば図17のように2つの線分の端点からの距離が $3b$ で等しい場合で，このとき短い方のルートを通るので，距離の計算はそのことを考慮しなければならない．簡単にするために，とりあえず，$3b$ の距離を無視し，図18のように両方の端点の片方を原点Oとして座標を一方については x，他方については y とすれば，距離は，$x+y$ か $(b-x)+(b-y)$ の短い方となることがわかる．まず $x+y\leq(b-x)+(b-y)$ のときはこの式より $x+y\leq b$ となるのでこの時距離は $x+y$，また $x+y>(b-x)+(b-y)$ のときは $x+y>b$ で，距離は $2b-(x+y)$ となり，図19の斜線部の部分になるので $F(r)=r^2$ となる．そこでこれを r で微分すれば，この時の距離分布は $0<r\leq b$ で $f(r)=2r$ となる．これは一方から他方への分布なので往復を考えて2倍とし，図18の場合の距離分布は $f(r)=4r$ $(0<r\leq b)$ となる．あとは離れている距離を問題にして r を $r-c$ (図19の例では $r-3b$) に置き変えれば良いので，距離分布は

$$f(r) \;=\; 4(r-c)\ (c<r\leq b+c) \qquad (13)$$

となる．

理論的には長さ b の線分のあらゆる組合せについて式(12)か(13)のどちらかがあてはまり，離れた距離 c と区間を慎重に扱えば距離分布を求めることが出来る．実際には同じパターンの数を数える方法に工夫が必要だが，紙面の都合もあり詳しくは文献[2]を参照されたい．以上により図15の格子パター



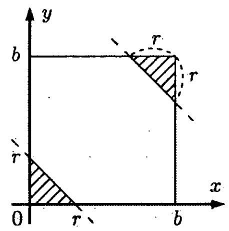


図17 やっかいな場合　図19 距離分布の導出

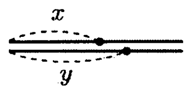


図18 $c=0$ とした場合

ンについて距離分布は

$$\begin{array}{lrcl}
0<r\leq b\text{ のとき} & f(r) & = & 12(5r+6b),\\
b<r\leq 2b\text{ のとき} & f(r) & = & 12(r+10b),\\
2b<r\leq 3b\text{ のとき} & f(r) & = & 4(29r-22b),\\
3b<r\leq 4b\text{ のとき} & f(r) & = & 4(r+62b),\\
4b<r\leq 5b\text{ のとき} & f(r) & = & 20(r+6b),\\
5b<r\leq 6b\text{ のとき} & f(r) & = & 20(26b-3r),\\
6b<r\leq 8b\text{ のとき} & f(r) & = & 16(26b-3r),\\
8b<r<10b\text{ のとき} & f(r) & = & 16(10b-r)
\end{array} \qquad (14)$$

と求められる．最後の2区間の長さが b ではなく $2b$ となっている点には注意されたい．

つぎに通過量分布についても紙面の都合から概略しか述べることができない．まず図20のように格子状ネットワークを構成する線分に $X_1,X_2,X_3;Y_1,Y_2,Y_3$ と記号をつける．そして一つの端点から中心に向かって x 行ったところの通過量を計算しよう．まず $0<x<b$ のときは，どこも同じ（12個ある）で，これは放射状のときと同じように，一方の点は長さ x の区間にあり，他方の点は全体の長さ $36b$ より x 引いた部分にある．そこで，往復を考えてこの部分の通過量を $F_1(x)$ とすれば

$$F_1(x)=2x(36b-x) \qquad (15)$$

と表される．続いて図20の x のように $b<x<3b$ について考えよう．距離分布の場合と異なって，この場合同じ最短距離のルートが複数個あって難しい

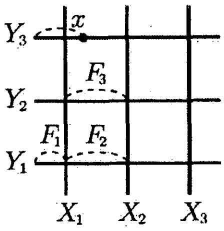


図 20 格子状ネットワーク

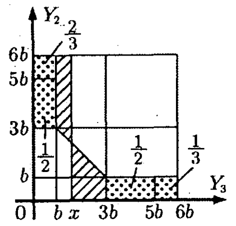


図 21 通過量の計算

場合がある．そのようなときは交差点で方向を変化する場合の数を最小にすることにし，それでもルートが複数個ある場合には，通過量を同じ比率で割当てることにした．線分 6 本の内の様々な組合わせを考えると，例えば一方の点 x_1 が Y_3 にあり他方の点 x_2 が X_2 にある場合には，少し考えるとこれは簡単で，x_1 が端点から x までの区間にあり，x_2 は X_2 のどこにあってもこの組合わせ (x_1, x_2) は地点 x を通る．そこでこの Y_2 と X_1 に関わる通過量は $2x \times 6b = 12bx$ と計算できる．また x_1 が X_1 で x_2 が Y_1 の場合にはどのような組合わせも地点 x を通過しない．複雑な局面については例えば図 20 の場合でいうと，x_1 が Y_3,x_2 が Y_2(Y_1 でも同じ) にある場合で，このときの地点 x の通過量を，横軸に x_1 の座標，縦軸に x_2 の座標をとって表現すると，図 21 のようになる．斜線部分の領域が地点 x を通るペアーを表わし点を打ってある領域が複数個ルートがあるもので，1/2, 1/3 は地点 x にはこの領域のペアーの 1/2, 1/3 が通過するものとしている．これをもとに計算すると，Y_2, Y_3 に関わって地点 x を通る量は $2x^2 - 4bx + 16b^2$ と計算できる．以上のような計算をあらゆる組合わせについておこなえば，通過量の分布を計算することができる．図 20 での端の線分 (端点は含まず) における通過量を $F_2(x)$, 中の線分（4 本）における通過量を $F_3(x)$ で表示すれば，得られた結果は

$$F_2(x) = 2x^2 + 16bx + 142\frac{2}{3}b^2$$

$$F_3(x) = 2x^2 + 16bx + 170\frac{2}{3}b^2 \qquad (16)$$

となる．式 (6) の重要な関係について計算すると

$$\int_{x \in D} F(x)\mathrm{d}x = 12\int_0^b F_1(x)\mathrm{d}x + 8\int_b^{3b} F_2(x)\mathrm{d}x + 4\int_b^{3b} F_3(x)\mathrm{d}x = 5048b^3$$

となり一方，式 (14) から簡単ではないが

$$\int_0^{10b} rf(r)\mathrm{d}r = 5048b^3$$

が計算できてこれらも一致することが分かる．上の結果より r の平均値 $\bar{r}$ を計算すると

$$\bar{r} = \frac{5048}{1296}\ b \approx 3.9\ b \qquad (17)$$

となる．

6. 放射状パターンと格子状パターンの比較

これまでの 4,5 章の結果より 2 つのパターンを距離分布と通過量分布を用いて比較することが可能になる．図 22 のように長さが同じ放射状と格子状のパターンをとり，部分的に同じ部分を実線，互いに異なる部分を破線で示してある．この破線によるパターンの組成の違いにより，距離分布はどのように変化するだろうか．

そこで距離分布が複雑な格子状の場合の式 (14) に合わせるために，放射状の式 (9),(10) については $a = 3b$ とし，$n = 12$ とすれば全体の長さが $3b \times 12$ で格子状の $6b \times 6$ と同じになる．そしてこの時の両者の距離分布を放射状を R, 格子状を G として表わすと図 23 の太線のようになる．また両者の通過量分布を式 (15),(16) より，交差点の通過量（図中黒丸で表示）も合わせて鳥瞰図のように表示すると図 24 のようになる．

まず、距離分布をみると放射状の方が格子状よりもよりコンパクトなことが分かる。放射状の場合、隣合う線分の端点から端点までは中心まで行ってからでないと到達できず、迂回の程度が多いように思われるかもしれないが，全体としては格子状よりもまとまっているのがはっきりする。さらに通過量分布をみても中心を除けば、放射状の方が格子状よりも通過量は少ない。

ただ中心における通過量は放射状の方が格子状よりもはるかに大きい。従って中心の通過量をどうさばくかが放射状に課せられた大きな課題であるとい

うことができるだろう。

一方格子状の通過量分布をみると、端点を含む線分を除けば、通過量はほぼ同じである。従ってこれは以前議論した閉曲線の通過量分布に似ている。そして格子状の交差点の通過量はそれ程大きくはない。図 24 をみると格子状は通過量を各交差点に分散させている、ということができる。

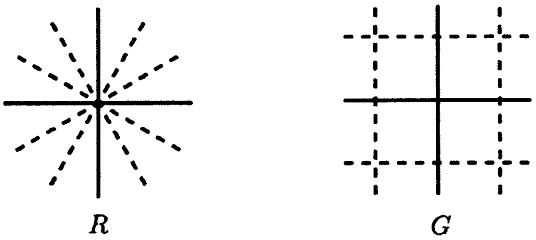


図 22 放射状 R と格子状 G のパターン

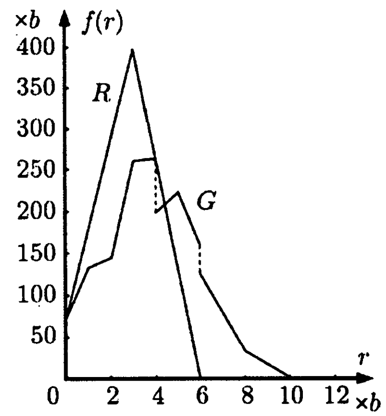


図 23 放射状 R と格子状 G の距離分布

距離分布と通過量分布により放射状パターンと格子状パターンを厳密に比較することが出来た．もちろん距離の平均値（式 (11),(17)）より放射状は 2.8b 格子状は 3.9b で放射状の方が短いことはこれほどの議論はしなくても計算は出来る．しかし距離分布を書いてみて初めてこの事はうなずけるのではないだろうか．通過量分布についても同様で厳密に計算して初めて分かることであった．本論文では手計算で 2 つの分布を関数として表現することを心がけた．しかし議論の過程でコンピュータを用いれば一般のネットワークでも計算可能であることは分かるであろう．

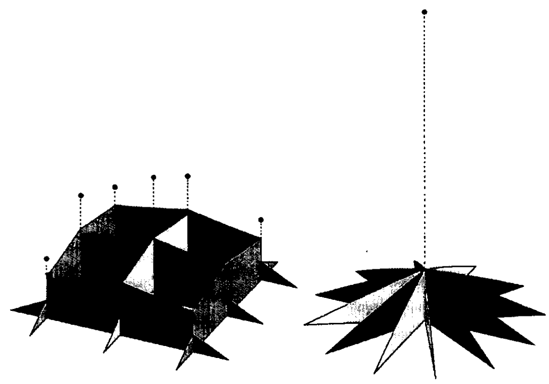


図 24 格子状 G と放射状 R の通過量分布

7. 建物内の距離の分布

同じ床面積を持つ建物でも，高層なものと低層なものとではどこがどのように異なるだろうか．もちろん敷地の広さや建物の強度，さらには建設単価も異なるには違いないが，ここではこの高層なものと低層なものを建物内の移動という視点からのみみて，その特徴を厳密に議論したい．

建物内部では百貨店であれオフィスであれ，ある地点からある地点を直線で移動するよりは，図 25 で示されるように rectilinear 距離で移動するものと考えられる．そこでまず長辺が a，短辺が b の長方形の内部に図 25 のように x 軸と y 軸を定め，任意の 2 点をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする．

このとき，2 点の recti-linear 距離すなわち $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ が r 以下である 2 点のペアの量を $F(r)$ とおくと，これは

$$F(r) = \iiiint_{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|<r} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}y_2 \tag{18}$$

と表わされる．これは先に示した図 2 の 4 次元版 の

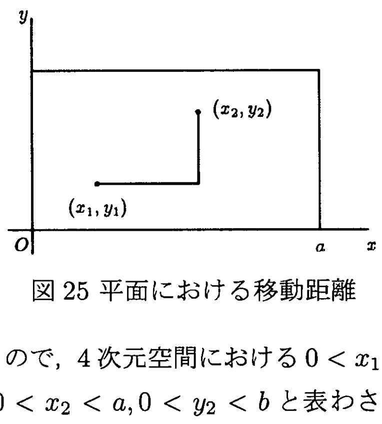


図 25 平面における移動距離

ようなもので，4 次元空間における $0 < x_1 < a, 0 < y_1 < b, 0 < x_2 < a, 0 < y_2 < b$ と表わされる領域

の中で $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|<r$ を満たす（例えば $x_1>x_2, y_1>y_2$ の領域では $x_1-x_2+y_1-y_2<r$ が成り立つ）領域が考えられ，$F(r)$ はこれら超平面に囲まれた領域の容積となっている．しかし我々は4次元空間を描いたり，イメージしたりできないので，このまま式 (18) を計算しようとすると，場合分けで間違う可能性が高い．そこで前述の式 (2) を用いてこの式を計算することを考えよう．

式 (2) は $|x_1-x_2|=r$ である点のペア (x_1,x_2) の量が $2(a-r)\Delta r$ であることを意味している．そこでこの r を X に置き換え，y 方向も同様に考えて $|y_1-y_2|=Y$ とし a を b に置き換えれば，式 (18) の積分は

$$F(r)=\iint_{X+Y<r} 2(a-X)\cdot 2(b-Y)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y \quad (19)$$

と書き直すことができる．置き換えられた変数の定義域は $0<X<a, 0<Y<b$ であり，さらに積分領域を考えると図26のように r によって積分の範囲を変えなければならない．このことに注意すれば $0<r<b$ のとき

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^r \int_0^{-X+r} 4(a-X)(b-Y)\mathrm{d}Y\mathrm{d}X \\ &= \frac{1}{6}r^4-\frac{2}{3}(a+b)r^3+2abr^2, \end{aligned}$$

が得られ，距離の分布をみるためにこの $F(r)$ を r で微分した $f(r)$ を求めると，

$$f(r) = \frac{2}{3}r^3-2(a+b)r^2+4abr \quad (20)$$

となる．

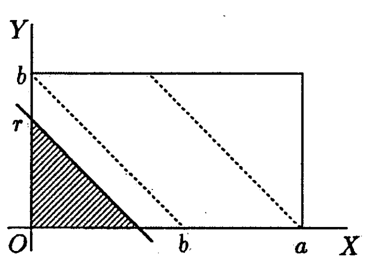


図26 積分の場合分け

以下図26をみながら積分範囲に注意して，$b<r\leq a$ のときと $a<r<a+b$ のときの $F(r)$ をそれぞれ計算し，r で微分すればこの時の距離の分布を求めることができる．この計算はそれ程大変ではないのでこれでもかまわないが，後になってこのようなある意味での正攻法では計算が大変になる．そこで上記の距離の分布を別な計算で導くことにする．我々は式 (19) を計算した後，$F(r)$ を r で微分するわけである．そこで図26における $F(r)$ の r による微分 $f(r)$ について考えてみよう．

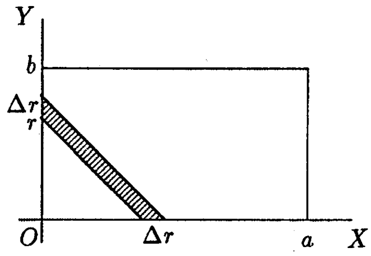


図27 微分の意味するところ

図27は図26と同じものだが，この図において $F(r+\Delta r)-F(r)$ を図示すると，図27の細い斜線で表わされた範囲で式 (19) の関数 $4(a-X)(b-Y)$ の積分を求めればよい．すると図より二等辺の長さが Δr の直角二等辺三角形の面積は $(\Delta r)^2$ のオーダーなのでこれを無視し，$X+Y=r$ から $-X$ を $Y-r$ で置き換えれば

$$F(r+\Delta r)-F(r)\approx \Delta r\int_0^r 4(a+Y-r)(b-Y)\mathrm{d}Y$$

であり，両辺を Δr で割って $\Delta r\to 0$ とすれば上式左辺は微分 $f(r)$ となり

$$f(r)=\int_0^r 4(a+Y-r)(b-Y)\mathrm{d}Y \quad (21)$$

が得られる．そこでこれを計算すると式 (20) と一致する．

同様に図26,27より $b<r\leq a$ のときは

$$f(r)=\int_0^b 4(a+Y-r)(b-Y)\mathrm{d}Y,$$

また $a<r<a+b$ のとき

$$f(r)=\int_{r-a}^b 4(a+Y-r)(b-Y)\mathrm{d}Y$$

となる．以上を計算してまとめると，長辺が a 短辺が b の長方形における任意の2点間の rectilinear 距

離の分布は $0<r\leq b$ のとき

$$f(r)=\frac{2}{3}r^3-2(a+b)r^2+4abr,$$

$b<r\leq a$ のとき

$$f(r) \;=\; -2b^2r+2ab^2+\frac{2}{3}b^3,$$

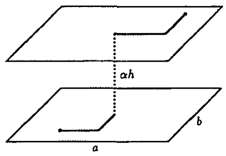
$a<r<a+b$ のとき

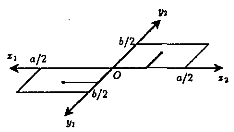
$$f(r) \;=\; \frac{2}{3}\{(a+b)-r\}^3 \tag{22}$$

となる．つなぎ目の $r=b, r=a$ のところを調べると $f(r)$ は連続で滑らかであることがわかる (C^1 級)．またこの式 (22) は $a=b=100\mathrm{m}$ として後の図 32 の 1 で表示される．

8. 異なる階の距離分布

つぎに同じく図 28 の (1) のように長辺が a，短辺が b の長方形をたてに高さ h の間隔で積み，階の違う 2 点間の距離を求めよう．異なる階の移動地点はどこを想定しても計算できるのだが，ここでは，最も簡単な場合として中心で移動するものとする．





(1) 異なる階の移動距離　　(2) 簡単な変換

図 28 異なる階の移動距離

また垂直方向の距離は水平方向と垂直方向の速度が異なるため，移動時間からみた水平方向の距離に換算するために係数 α をかけて，αh としなければならない．

ともかく，以下の理論式の導出には計算を簡単にするために $h=0$ で計算し，その後，与えられた階の相対的距離に応じて r に $r-\alpha h$ を代入するものとする．図 28 の (1) を注意してみるとある階の点は対称な 1/4 の長方形内の点に変換しても距離からみると同じことになることがわかる．そこで，$h=0$ とした異なる階の距離分布に関しては，図 28 の (2) のような状況，すなわち長辺が $a/2$，短辺が $b/2$ の長方形が頂点で距離 0 で結ばれていて，この時の距離 $x_1+y_1+x_2+y_2$ の分布を求めればよい．ただし，(1) の点のペアは (2) の点ペアの 16 倍あるので，分布の計算の最後に 16 倍するのを忘れてはいけない．図 28 の (2) の状況における距離の分布を求め

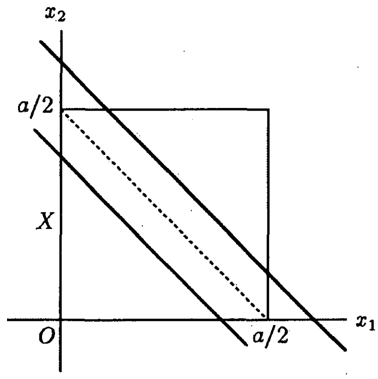


図 29 x_1+x_2 の計算

るとき，計算を簡単にするために $X=x_1+x_2$ と $Y=y_1+y_2$ とに分けて考えよう．距離 X の分布を計算するには先の式 (8) の導出と同じように考えればよい．つまり $0<x_1<a/2, 0<x_2<a/2$ の範囲で図 29 のように場合を分け

$$F(X)=\iint_{x_1+x_2<X}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

を計算して X で微分する．すなわち

$0<X\leq a/2$ のとき $F(X)=\dfrac{X^2}{2}$ なので　$f(X)=X,$

$a/2<X<a$ のとき $F(X)=\dfrac{X^2}{2}-(X-\dfrac{a}{2})^2$ なので

$$f(X)=a-X \tag{23}$$

となる．距離 Y の場合も同様で式 (23) の a を b に変えればよい．そこで求めたい距離 $X+Y=r$ の分布は式 (19) のような考え方のもと，計算は式 (21) のようにやることにする．距離 X と Y の分布を図示すると，式 (23) より図 30 のようになり，さらにつぎに最終的に求めたい距離の分布 r の計算範囲を示すと図 31 のようになる（ただし $b\leq a\leq 2b$）．

まず $0<r\leq b/2$ のとき，図 30 の分布 XY の，X を $X+Y=r$ から $r-Y$ に置き換え，前述の 16 倍を忘れずに

$$\frac{1}{16}f(r)=\int_0^r(r-Y)Y\mathrm{d}Y$$

となり，これを計算すると

$$f(r)=\frac{8}{3}r^3. \tag{24.1}$$

つぎに $b/2<r\le a/2$ のとき，積分の領域は図 30 の $X(b-Y)$ の範囲も入ってくるので

$$\frac{1}{16}f(r)=\int_0^{b/2}(r-Y)Y\mathrm{d}Y+\int_{b/2}^{r}(r-Y)(b-Y)\mathrm{d}Y$$

となり，これを計算すると

$$f(r)=-\frac{8}{3}r^3+8br^2-4b^2r+\frac{2}{3}b^3. \tag{24.2}$$

以下細かく説明していると紙面が無くなってしまうので，計算のもとになる式と計算結果を呈示する（図 30,31 参照）.

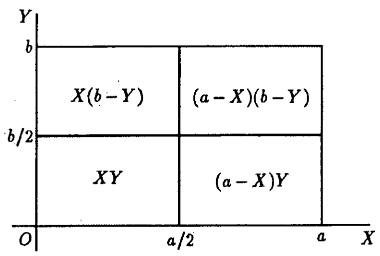


図 30 X と Y の分布関数

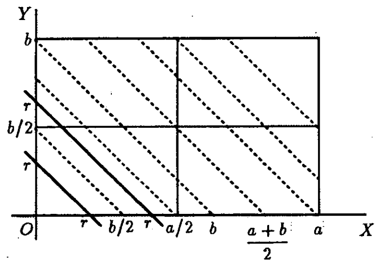


図 31 積分の場合分け

$a/2<r\le b$ のとき

$$\frac{1}{16}f(r)=\int_0^{r-a/2}(Y+a-r)Y\mathrm{d}Y+\int_{r-a/2}^{b/2}(r-Y)Y\mathrm{d}Y+\int_{b/2}^{r}(r-Y)(b-Y)\mathrm{d}Y,$$

$$f(r)=-8r^3+8(a+b)r^2-4(a^2+b^2)r+\frac{2}{3}(a^3+b^3). \tag{24.3}$$

$b<r\le a/2+b/2$ のとき

$$\frac{1}{16}f(r)=\int_0^{r-a/2}(Y+a-r)Y\mathrm{d}Y+\int_{r-a/2}^{b/2}(r-Y)Y\mathrm{d}Y+\int_{b/2}^{b}(r-Y)(b-Y)\mathrm{d}Y,$$

$$f(r)=-\frac{16}{3}r^3+8ar^2-4(a^2-b^2)r+\frac{2}{3}a^3-2b^3. \tag{24.4}$$

$a/2+b/2<r\le a$ のとき

$$\frac{1}{16}f(r)=\int_0^{b/2}(Y+a-r)Y\mathrm{d}Y+\int_{b/2}^{r-a/2}(Y+a-r)(b-Y)\mathrm{d}Y+\int_{r-a/2}^{b}(r-Y)(b-Y)\mathrm{d}Y,$$

$$f(r)=\frac{16}{3}r^3-8(a+2b)r^2+4(a^2+4ab+3b^2)r-\left(\frac{2}{3}a^3+4a^2b+4ab^2+\frac{10}{3}b^3\right). \tag{24.5}$$

$a<r\le a/2+b$ のとき

$$\frac{1}{16}f(r)=\int_{r-a}^{b/2}(Y+a-r)Y\mathrm{d}Y+\int_{b/2}^{r-a/2}(Y+a-r)(b-Y)\mathrm{d}Y+\int_{r-a/2}^{b}(r-Y)(b-Y)\mathrm{d}Y,$$

$$f(r)=8r^3-16(a+b)r^2+4(3a^2+4ab+3b^2)r-\left(\frac{10}{3}a^3+4a^2b+4ab^2+\frac{10}{3}b^3\right). \tag{24.6}$$

$a/2+b<r\le a+b/2$ のとき

$$\frac{1}{16}f(r)=\int_{r-a}^{b/2}(Y+a-r)Y\mathrm{d}Y+\int_{b/2}^{b}(Y+a-r)(b-Y)\mathrm{d}Y,$$

$$f(r)=\frac{8}{3}r^3-8ar^2+(8a^2-4b^2)r-\frac{8}{3}a^3+4ab^2+2b^3. \tag{24.7}$$

$a+b/2<r<a+b$ のとき

$$\frac{1}{16}f(r)=\int_{r-a}^{b}(Y+a-r)(b-Y)\mathrm{d}Y,$$

$$f(r)=\frac{8}{3}\{(a+b)-r\}^3. \qquad (24.8)$$

以上の式 (24.1) から (24.8) までを 1 度にさすとき，式 (24) と呼ぶことにする．

また，それぞれのつなぎ目で微係数を求めてみると，連続で滑らかであることが明かとなる．さらに図 30,31 から直観的にわかるように，式 (24) は $r=\frac{a+b}{2}$ を中心として左右対照であり，このことは式からも確められる．

なお図 31 のところで説明すべきだったのだが，$a/2>b$ のときは図 31 のような範囲の切り方はできない．そこで当然式 (23) は異なるものとなる．同様な計算をすればこの場合も厳密に求められるのだが紙面の都合もあって省略する．すなわち式 (23) は $b\le a\le 2b$ の場合に成立するものであり，$a>2b$ と領域がより細長いものになった場合には成立しないことを記しておく．

9. 任意の階の建物内の距離分布

以上の式 (22) と (24) を用いれば，一つの階の平面の形が長方形でありさえすれば任意の階の建物の距離分布を求めることが可能になる．そこで最も簡単な場合について距離の分布を示してみよう．

総床面積を 100m×100m とし，床の形は簡単にしてすべて正方形と考える．まず 1 階建ての場合には式 (22) の a,b に 100m を入れれば求めることができる．

つぎに 2 階建ての場合には，a,b に $100/\sqrt{2}$m を入れて 1 階の中での移動と、2 階の中だけの移動は式 (22) を用い、ついで 1 階から 2 階そして 2 階から 1 階までの移動については式 (24) で、h に 1 階分を入れて算出し、これらを加え合わせれば求められる．以下各階の組合せを考慮すれば任意の n 階についても距離の分布を計算することが可能である．式 (24) でさえ場合分けが多いのに，一般式を示すことはスペースの無駄と考えられるので，ここでは 6 階建ての建物に関して距離の分布の計算を少し詳しく述べることにする．

最初，6 階建てのときの 1 階分の縦と横の長さを $a=b=41$m とする．1 階から 6 階まで各階の中ですんでしまう動きについては式 (22) によって計算し，6 階分をかける．

ここで 1 階分の高さ（階高）を 4m，垂直方向の移動は階段を徒歩あるいはエスカレーターですることにし，その速さを水平方向の 1/5 とすれば，この所要時間を距離に換算して $\alpha h=20$m となる．つぎに 1 階と 2 階のように 1 階分だけ離れた組合せについては，上下方向を数えると 10 通りあり，$\alpha h=20$m として（つまり式 (24) の r を $r-\alpha h$ に置き換えて）式 (24) を 10 倍する．つぎに 1 階と 3 階のように 2 階分離れた組合せでは，上下別々と数えて 8 通りあり，式 (24) において $\alpha h=40$m として 8 倍する．以下 3 階分離れた組合せ 6 通り，4 階分離れたもの 4 通り，5 階分 2 通りについてそれぞれ距離の分布式を計算する．以上をすべて足し上げれば，図 32 の 6 で示すような 6 階建ての建物内の距離の分布を求めることができる．

ここで 1 階から 6 階までの建物を図 32 で，距離の分布を図 33 で示すことにする．これをみると，まず最も距離の近い部分のペアの量は同じものの徐々に低層の方のペアの量が多くなり，ついで平均値をすぎたあたりの距離で 3,4 階のピークが顕著になり，長い距離は 1 階建てや 6 階建てが多いということになっている．

距離 r の平均値は式 (22),(24) をもとにしなくても式 (2) より，1 階の分布 (22) の場合の平均値を $\bar{r}_1$ とすると

$$\bar{r}_1=\frac{1}{3}(a+b)$$

と計算できる．また，分布 (24) の場合には各変数 x_1,x_2,y_1,y_2 ごとに個々に計算すれば

$$\bar{r}=\frac{1}{2}(a+b)$$

が得られる．そこで n 階の建物については k 階分の差の組合せが $2(n-k)(k=1\sim n-1)$ であることに注意すると，1 つの階の平面の長辺が a，短辺が b で n 階の建物について，その距離の平均値 $\bar{r}_n$ は

$$\bar{r}_n = \frac{3n-1}{6n}(a+b)+\frac{(n-1)(n+1)}{3n}\alpha h \qquad (25)$$

となる．そこで総床面積を一定，1 つの階の平面の形は相似であると考えると，n 階の建物の 1 つの階の長辺を a_n，短辺を b_n とすれば，$a_n=a_1/\sqrt{n}, b_n=b_1/\sqrt{n}$ と書け，$a_1b_1=na_nb_n$(総床面積一定) となっ

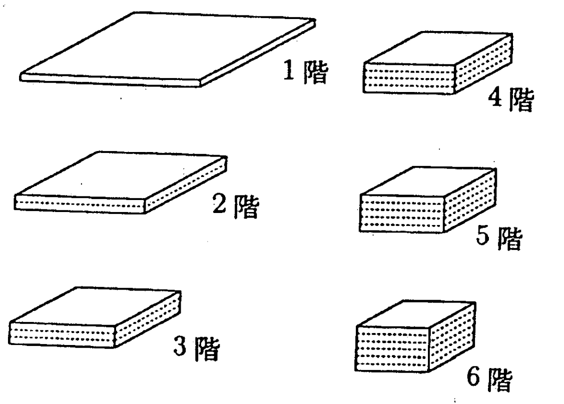


図 32 建物のプロポーション

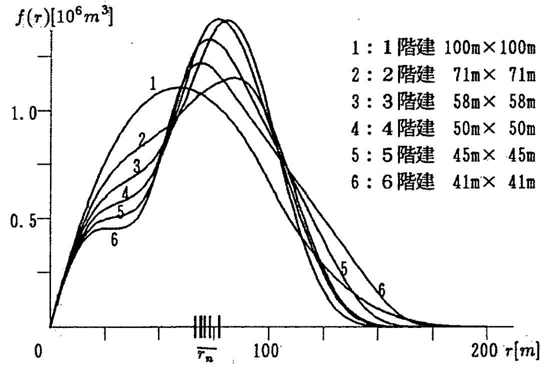


図 33 距離分布の比較

ている．この a_n, b_n を式 (11) の a, b に代入すれば，床面積一定の場合の距離の平均値を

$$\bar{r}_n = \frac{3n-1}{6n\sqrt{n}}(a_1+b_1) + \frac{(n-1)(n+1)}{3n}\alpha h \quad (26)$$

と書くことができ，これをもとにこの場合の平均値を計算すると，1 階から 6 階までは平均値は n が大きくなると少し増加するものの，ほとんど差はない．

10. 平面上の移動距離

以上より，6 階程度までは，距離の分布からみてそれ程の差はないことがわかった．しかし，これ以上になると式 (26) の第 2 項がきいてきて，平均値は徐々に大きくなる．このときは上に登る手段もエスカレーターや徒歩からエレベーターに変化することが考えられ，式 (24) を別なものにしなければならないだろう．

ところでこの 6 階程度でも，違いの出るのは平面を移動する部分である．このモデルでは垂直の移動も所要時間を平面の距離に換算していて，先に述べたように移動距離の平均値では殆ど差はないが，水平と垂直を分けて考えれば，当然のことながら違いはある．式 (26) の右辺第 1 項は平面の移動に関するものであり，第 2 項は垂直方向の移動時間を平面距離に換算したものである．そこで第 1 項のみをとり上げて，この距離を 1 階建てのときの距離の平均値との比で表わして R_n とすれば，式 (26) よりこれは

$$R_n = \frac{3n-1}{2n\sqrt{n}} \quad (27)$$

となる．これをみると 6 階建ての場合 R_n はほぼ 0.58 となり，平面を歩く距離が平均ととして 1 階建ての 58 %になることを示してる．さらに n が大きくなれば近似的に

$$R_n \sim 3/(2\sqrt{n}) \quad (28)$$

となり，この比率は $\sqrt{n}$ に従って減ることがわかった．

建物がデパートの場合を想定し，衝動買いが上記平面上の歩く距離に比例するとすれば，式 (27) のところの計算は同じ床面積でも 6 階建てにおける衝動買いは平屋の 6 割りに減るということを意味している．もっと話を一般的に，人が偶然出会うのが都市であり，この出会いは水平方向の移動時に限られるとすれば，建物の階数 n が大きくなるにつれ，式 (28) に従って本来の都市の機能は希薄になっていく．そしてやがて建物は偶然の出会いなど期待できない空間の「装置」のようなものになっていくのではないだろうか．

ともあれ，建物内部の移動をあらゆる地点のペアの距離からみて，建物内の移動に関する差異を表わすことができた．しかし，ここで述べたのは，垂直移動を徒歩やエスカレーターとした時の距離の分布であった．高層な場合はこれにエレベーターを考えに導入しなければならないが，この場合，待ち時間や混雑による速度の低下を考慮する必要があるので，これ程簡単ではない．今回は紙面の都合もあり，議論することができなかったが，今後の課題としておきたい．

11. 平面の 2 点と直線上の 2 点

図 34 のように与えられた空間 D の任意の 2 地点を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$（ともにベクトル）とし，その距離を

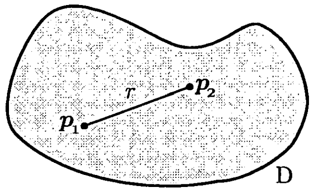


図 34 領域 D における二点

$D(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ で表示すれば，距離 r 以下の 2 地点のペアーの量 $F(r)$ は

$$F(r) \;=\; \iint_{D(p_1,p_2)<r} \mathrm{d}\boldsymbol{p_1}\mathrm{d}\boldsymbol{p_2} \qquad (29)$$

と表現できる．そこで距離分布は，上記 $F(r)$ を r で微分して

$$f(r) \;=\; \frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r} \qquad (30)$$

と得られる．すなわちこれは距離が丁度 r の 2 地点ペアーの量を，密度（4 次元量を距離で割ったもの）で表現したものということができる．

上記の式 (29) における表現は，概念的にははっきりとして分かり易いが，実際にこれを計算することは容易ではない．式 (29) や (30) を陽に関数として表すことができる場合は限られており，2 点 $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ が動く領域の形が円や長方形といった単純な場合がこれにあたる．

まず領域 D が円の場合には Crofton の微分方程式等を用いて，また D が長方形の場合には Ghosh によって，以下のように導出されている（例えば文献 [4,12]）．すなわち領域 D が半径 α の円の場合には

$$f(r) = 4\pi\alpha^2 r \arccos\frac{r}{2\alpha} - 2\pi\alpha r^2\sqrt{1-\left(\frac{r}{2\alpha}\right)^2} \qquad (31)$$

と導かれる．また領域 D が長方形で長辺の長さを a，短辺の長さを b とすれば

$$f(r) = \begin{cases} 0 < r \le b \text{ のとき} \\ 2\pi abr - 4(a+b)r^2 + 2r^3, \\ b < r \le a \text{ のとき} \\ 4abr\arcsin\dfrac{b}{r} + 4ar\sqrt{r^2-b^2} - 4ar^2 - 2b^2r, \\ a < r < \sqrt{a^2+b^2} \text{ のとき} \\ 4abr\left(\arcsin\dfrac{b}{r} - \arccos\dfrac{a}{r}\right) + 4ar\sqrt{r^2-b^2} \\ +4br\sqrt{r^2-a^2} - 2r(r^2+a^2+b^2) \qquad (32) \end{cases}$$

と表わされる．一見すると式 (31) と (32) は大変違っているようにみえるかもしれないが，領域 D として円と $a=b$ の正方形をとり，両者の面積を等しくして（$a^2 = \pi\alpha^2$）これらの $f(r)$ を比較すると図 35 のようになる．これをみると両者は大変よく似ていることがわかるだろう．

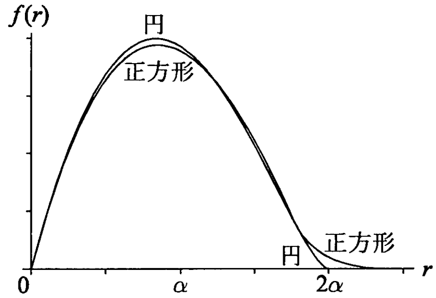


図 35 距離の分布 (2):円と (3):正方形

そこで本論文では，まずどのような状況でも，式 (30) を計算できるように，一般的な議論の枠組みを呈示し，つぎにそれに基づき非凸領域における距離分布の計算法を示す．これには 2 点 $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ がそれぞれ相異なる不定形の領域に存在する場合の計算法も含まれているので，これについても言及する．

以上により，与えられた領域を分割して，それぞれの領域の内々移動や領域にまたがる移動の距離分布の計算が可能となる．

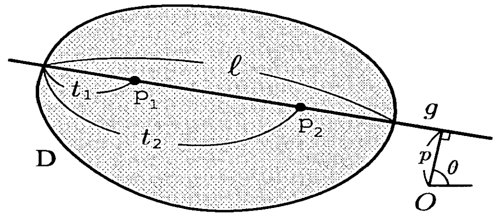


図 36 一様な直線とその上の 2 点

ところで積分幾何学の分野で Crofton が導いた公式の拡張を議論するとき，次のような変数変換が用いられる．すなわちそれは平面領域 D の 2 点 $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ に関する積分は，図 36 のようにこの領域 D を通る一様な直線 g を固定したとき，この直線上の 2 点の座標 t_1, t_2 で

$$[\mathrm{d}\boldsymbol{p_1}, \mathrm{d}\boldsymbol{p_2}] = |t_1 - t_2|[\mathrm{d}G, \mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2] \qquad (33)$$

と変換することができる，というものである．ただし $\mathrm{d}G$ はこの分野固有の表記法で，この直線 g に原

点Oから下ろした垂線の長さをp, 垂線の角度をθとしたときの$\mathrm{d}G = [\mathrm{d}p, \mathrm{d}\theta]$を表わしている．このように直線ごとにその上の2点について距離の重み$|t_1 - t_2|$を考え，これを領域に交わる直線についてもれなく求めれば，2次元上の2点を計算したことになる (文献 [7,8]).

そこで，まず領域Dを通るある直線を固定し，この直線上の領域内での距離の累積分布を$F_g(r)$とすれば，固定された直線のこの領域Dの内部の長さをℓとして

$$\begin{aligned} F_g(r) &= \iint_{|t_1-t_2|<r} |t_1 - t_2| \ \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \\ &= r^2 \ell - \frac{2}{3} r^3 \qquad (34) \end{aligned}$$

が導かれる．これをrで微分すれば，この固定された直線上の距離の分布が

$$f_g(r) = 2r(\ell - r) \qquad (35)$$

と得られる．これを領域Dを通る一様な直線すべてに関して積分してやれば，この領域D内の2点間の距離の分布を導出することができる．

さて式(34)について，これが成立するのは$0 < r < \ell$の範囲であり，これ以外では$f_g(r) = 0$となっている．逆に，あるrを固定したとき，このrより小さいℓ（弦）において求めた距離分布は$f_g(r) = 0$としておかねばならない．そこで図36において，一様な直線のこの領域内での長さℓがrよりも大きい直線の集合をG_rで表し式(35)をこの範囲で積分してやれば，距離分布$f(r)$を

$$f(r) = \int_{G_r} 2r(\ell - r) \ \mathrm{d}G, \quad G_r = \{G | r < \ell\} \qquad (36)$$

と求めることができる．ここまでの議論は凸領域について成り立つものだが，長さℓもGの関数なので上式を実際に求めるのはそれほど簡単ではない．ただし領域Dが円のときは以下のように比較的容易に議論できる．

領域の半径をαとすると図37から明らかなように，一様な直線を考える点Oを円の中心に取れば，弦の長さℓは直線に下ろした垂線の足の長さpで

$$\ell = 2\sqrt{\alpha^2 - p^2}$$

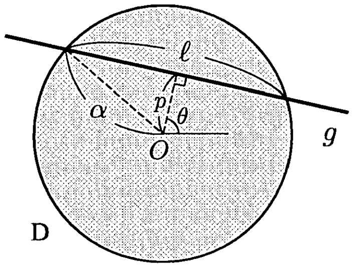


図37 領域が円の場合

と表すことができる．また$\ell = r$のとき

$$p = \sqrt{\alpha^2 - r^2/4}$$

であることから$r < \ell$においてpの範囲は

$$0 < p < \sqrt{\alpha^2 - r^2/4}$$

となる．ゆえにG_rに関する積分は，pのこの範囲と$0 < \theta < 2\pi$で

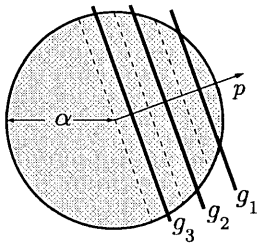
$$\begin{aligned} &\int_{Gr} 2r(\ell - r) \ \mathrm{d}G \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - r^2/4}} 2r \left(2\sqrt{\alpha^2 - p^2} - r\right) \ \mathrm{d}p \end{aligned}$$

と書くことができる．そしてこれを計算すると円内の距離分布である

$$f(r) = 4\pi\alpha^2 r \arccos \frac{r}{2\alpha} - 2\pi\alpha r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^2} \qquad (37)$$

が得られ，Croftonの微分方程式で得られた結果(文献[4])と一致する．

つぎにこの方法を利用して，不定形領域における距離分布の近似計算を考えよう．近似の程度を見るために半径αの円を考え，一様な直線の代表として図38のように半径（pの範囲）を3分割し，3本の直線g_i, $(i = 1, 2, 3)$をとる．これらの直線の円内の長さをℓ_iとすると，式(35)よりそれぞれの直線上の距離分布が得られる．そしてこの円を通過する直線の全体量$2\pi\alpha$（領域の周長）の1/3の重みをつけてこれを図示すると図39のf_1, f_2, f_3のようになり，これを足しあわせれば図39の$f^*(r)$が得られる．これを理論式(37)の$f(r)$と比較すると，この近似はかなり良いことが分かるだろう（もっともこれは円が角度θについて一様であることにも依るのではあるが）．



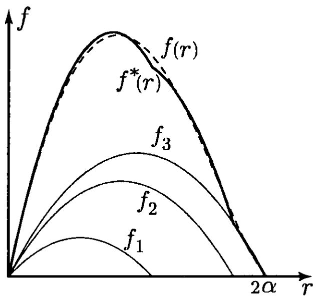


図 38 一様な 3 直線　図 39 距離分布の近似

12. 非凸領域における距離分布

前述の式 (35) は，計算に用いる直線の領域をよぎる部分がすべて領域に含まれる場合のものであった．しかし図 40 のように対象領域が非凸のとき，直線 g の部分が領域の外に出てしまう場合がある．このような場合についても式 (33) を用いて距離分布を導出できることを示そう．

図 40 のように直線が領域によって 2 つの線分に分断される場合を考える．起点 O を定め，直線と領域の交点を順番に $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}$ とし， 線分 OE_1 を s_1，$\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$ を s_2，$\mathrm{E}_2\mathrm{E}$ を s_3 と名付ける．

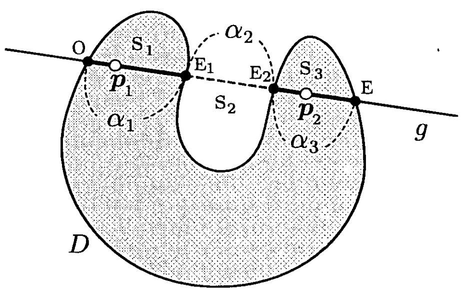


図 40 非凸領域と直線 g

このとき式 (33) における $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ がそれぞれどこにあるかで場合分けをする．まず $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 共に s_1 にあるときは，式 (35) より s_1 の長さを α_1 として，$0 < r < \alpha_1$ で

$$f_{11}(r) = 2r\,(\alpha_1 - r) \tag{38}$$

となる．同様に $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ が共に線分 s_3 にあれば，s_3 の長さを α_3 とし，$0 < r < \alpha_3$ で以下が得られる．

$$f_{33}(r) = 2r\,(\alpha_3 - r). \tag{39}$$

さて，問題は $\boldsymbol{p}_1$ が s_1 に $\boldsymbol{p}_2$ が s_3 にあるような場合である．ここで s_2 の長さを α_2 とすれば，起点 O より $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}$ の座標はそれぞれ $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ となり，このとき積分範囲は図 41 のように $0 < t_1 < \alpha_1, \alpha_1+\alpha_2 < t_2 < \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ となっている．ところで，この図 41 は $\alpha_1 < \alpha_3$ の場合である．$\alpha_1 > \alpha_3$ の場合は，起点 O を E のところに定めて座標の取り方を逆にし，t_1 と t_2 を入れ換えれば，$\alpha_1 < \alpha_3$ の場合と同じ議論ができるので $\alpha_1 < \alpha_3$ として一般性を失わない．

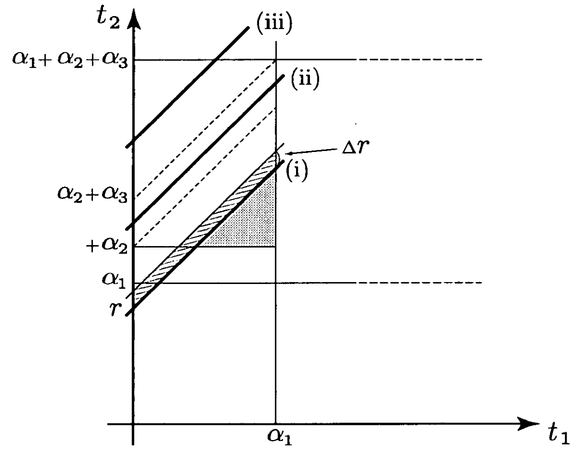


図 41 積分領域

まず (i)$\alpha_2 < r < \alpha_1 + \alpha_2$ のとき，式 (34) に相当する積分は，図 41 の塗りつぶされた領域において

$$F_g(r) = \iint_{p_1 \in \mathrm{S}_1, p_2 \in \mathrm{S}_3, t_2 - t_1 < r} (t_2 - t_1)\ \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \tag{40}$$

と表すことができる．これは 3 次元図形の体積として表現できるが，あとで r で微分することを考慮して，$r + \Delta r$ の領域から引けば図 41 の斜線部分となり，Δr の幅に注意すると，

$$F_g(r + \Delta r) - F_g(r) \simeq \Delta r \int_{\alpha_1+\alpha_2-r}^{\alpha_1} r\ \mathrm{d}t_1$$

となり，以下のようになる．

$$f_{13}(r) = \frac{\mathrm{d}\,F_g(r)}{\mathrm{d}\,r} = r\,(r - \alpha_2). \tag{41}$$

つぎに (ii)$\alpha_1 + \alpha_2 < r < \alpha_2 + \alpha_3$ のときには，図 41 で明らかなように以下が得られる．

$$f_{13}(r) = \int_0^{\alpha_1} r\ \mathrm{d}t_1 = r\,\alpha_1. \tag{42}$$

さらに (iii)$\alpha_2 + \alpha_3 < r < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ のときは，やはり図 41 から

$$f_{13}(r) = \int_0^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-r} r\ \mathrm{d}t_1 = r\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - r) \tag{43}$$

となる．p_1 が s_3 に，p_2 が s_1 にある場合は図41で t_1, t_2 について対称なところに同じ領域が存在するので，$f_{13} = f_{31}$ が成り立つから，式(38)，式(39)，式(41)，式(42)，式(43)を加えて，

$$f_g(r) = f_{11}(r) + f_{33}(r) + 2f_{13}(r) \tag{44}$$

(ただし $f_{11}(r), f_{33}(r), f_{13}(r)$ は，それぞれ r が定められた範囲以外では0とする)

として非凸領域についても一様な直線を介して距離分布を求めることができる．

冒頭にもふれたが，f_{13} と式(35)を導く考え方を用いれば，2点がそれぞれ異なる領域に属したりあるいはそれぞれの点に異なる密度（人口など）を考慮するような場合でも，それぞれ重みを付ければ距離分布が求められることが分かるだろう．そこで，式(41),(42),(43)で表される $f_{13}(r)$ も，一様な直線上の距離分布（式(35),(45)）の仲間であることを示す意味でつぎのようにしておく．

$$f_g(r) = f_{13}(r). \tag{45}$$

13. 都市内移動距離分布の推定

本章では東京23区の通勤ODの移動距離分布を推定する．用いたデータは平成7年度国勢調査（文献[11]）から東京23区内の通勤OD（総数3,463,502人）を抽出したもので，276ODペアに集計してある．

ここで前述の一様な直線を用いた計算方法による移動距離分布の推定を示そう．

第11章で述べたように，一般の多角形領域などを分析対象とした場合，式(36)が表す距離の全体分布を陽に計算する事ができない．したがって，この領域を"適切な本数"の一様な直線について総量で調整した重みをつけて距離分布を計算し，これらを足しあわせることで全体の移動距離分布を近似的に得ることにしよう．しかしながら"適切な本数"は，領域の形状に依存し先験的には与えられないので，図42のような（理論分布式が得られる）長辺 a 短辺 b の矩形領域を例に，相対誤差に注意しながらもっともらしい分布が得られる直線の本数に"あたり"をつけておこう．

直線の配置には様々な方法があるが，ここでは最も素朴に 2π を等分する一定の角度で回転させた

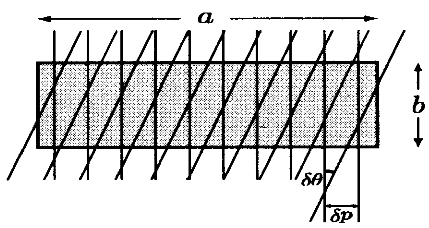


図42 直線の間隔と角度

等間隔の平行線を用いることにする．直線の間隔を δp，角度の刻みを $\delta\theta$ とする．計算機を用いて $\delta p = a/10, a/20, a/50$，$\delta\theta = \pi/4, \pi/8, \pi/16, \pi/32$ のように変化させて求めた近似分布 $\hat{f}(r)$ と真の分布 $f(r)$ の相対誤差 ε を

$$\varepsilon = \int \frac{|\hat{f}(r) - f(r)|}{f(r)}\,\mathrm{d}r \tag{46}$$

と定義し，すべての $\delta p, \delta\theta$ で近似距離分布を求め誤差を計算すると図43のようになる．図の横軸は（結果的に）領域に交わった直線の本数である．

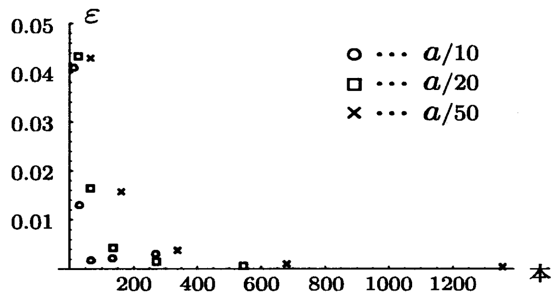


図43 相対誤差の分布

図43を見ると，直線の間隔および角度の刻みを小さくするほど大局的に誤差が小さくなる傾向があることが分かる．直線の本数に対して誤差が単調に減少していないところがあるが，これは領域形状と直線配置の相対的な位置関係によるものであり，実はこの例のような対称性を持つ領域に対してはこの直線配置は好ましくない．つまり，同程度の本数の直線配置でも直線の間隔・角度いずれかを極端に"粗く"してしまうと領域形状と直線配置の関係で誤差が大きく出る可能性があることが予想される．実際に計算する領域形状は長方形より複雑であることを考慮して，今回は $\delta p = a/20$，$\delta\theta = \pi/16$ の規則的に配置した直線群を用いる．このときの近似分布と理論分布を描くと図44のようになり，図39と見比べても十分な精度と考えて良いだろう．

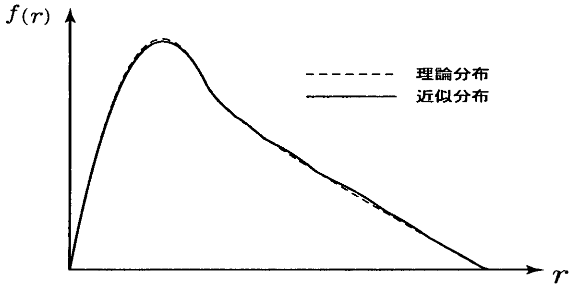


図 44 $\delta p = a/20$, $\delta\theta = \pi/16$ のときの近似分布

a については図 45 のように，計算対象地域を覆うことができる長方形のうち，長辺が最も短くなるものの長辺の長さを用いる．

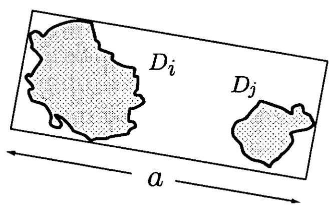


図 45 領域間の距離分布を数値計算する方法

以上で一様な直線を介して移動距離分布を計算するための準備はすべて揃ったことになる．前述の東京 23 区の通勤 OD の重みをつけた 276 ペア（内々移動も含む）の領域間の移動距離の分布を重ねて図示すると図 46 のようになる．図中の太線で表した分布は，A) 足立区内々の通勤 OD と B) 杉並区千代田区間の通勤 OD である．

図 46 のすべての分布を足し合わせ，これを全 OD ペアの量で基準化すれば東京 23 区全体の通勤移動距離分布が得られることになる．図 47 は，このようにして導出した移動距離分布のグラフと，補正済み代表点間距離分布のヒストグラムを (補正とは文献 [9,10] によるものである)，総量が 1 になるように基準化して重ねたものである．これを見ると，平均値の違いはあまり無いものの，連続分布の方が滑らかで且つ裾野が広い分布をしていることが分かる．従来の方法で得られる分布は，図 47 のヒストグラムのように実際より短い方に頻度が高く出る傾向がある．東京都における区を単位とした地域分割は，図 46 を見ても明らかなように，大きさにかなりばらつきが存在する．そして大きい区同士のペアーの (全体の) 距離分布を考える場合，代表点間の距離に縮約することによって省略されてしまう部分を無視できないことが分かるだろう．

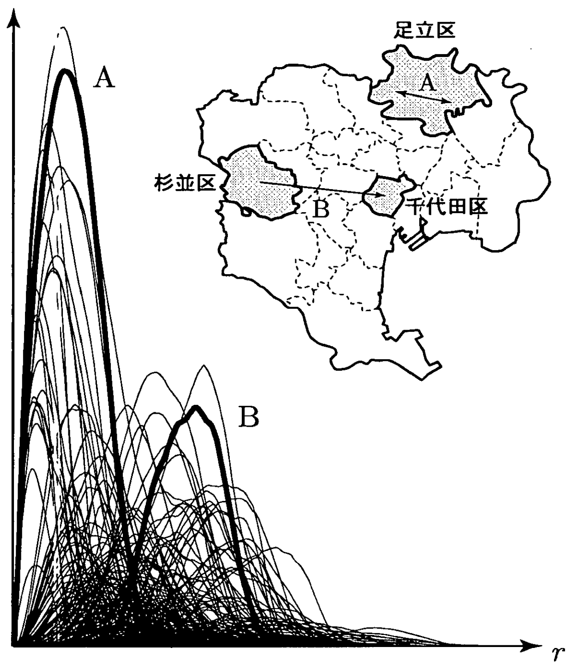


図 46 D ペアごとの距離分布

一方，連続分布にも問題がないわけでない．区内や区をまたぐ移動の起終点は現実には一様ではないことである．この方法では，起終点が一様に分布するとしても差しつかえない程度に細かく対象地域を分割すれば，正しい分布が得られることは議論の過程から明らかだから，逆に言えば図 47 に示した分布はこの一様性が保証されない点において真の分布と異なっていることになる．とはいえ，より真の分布に近いものとして連続分布を導き，これをもとに従来の方法を評価できたことは収穫だと思っている．

本論文では，これまで単純な図形でしか求められなかった距離分布について，数値的ではあるが厳密に導出する方法を呈示した．式 (29) と変数変換の式 (31) を用いれば，距離分布は一様な直線を介し関数型として式 (35)，あるいは式 (41),(42),(43) のように簡潔な 2 次式と 1 次式の足し算（厳密には積分）で表現できるのである．このことは，つまるところ 4 次元の計算を次元を落として 2 次元の計算にできるということを示しており，我々の分野の多くの人達が活用すべきものと考えられる．

ここでは本来，式 (29) に対応するものとして地

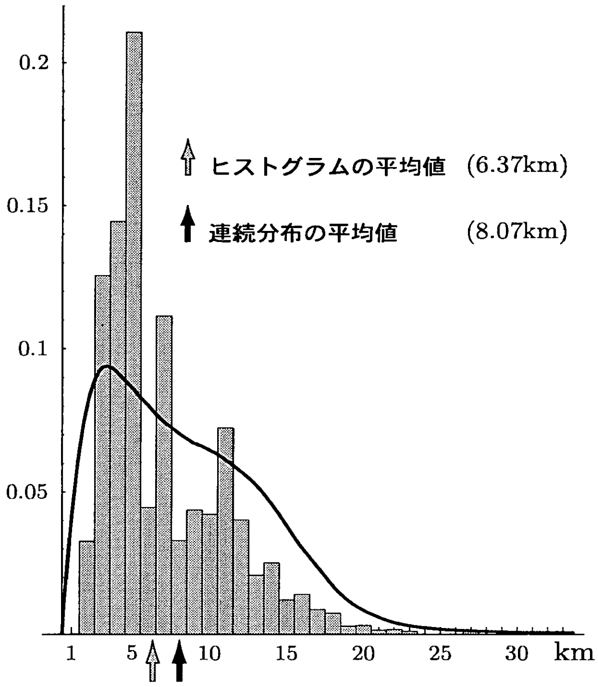


図 47 移動距離分布の比較

点 $\boldsymbol{p}_1$ から $\boldsymbol{p}_2$ に移動する量を密度 $\mu(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ で表し，

$$F(r) = \iint_{D(p_1,p_2)<r} \mu(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \ \ \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \qquad (47)$$

として議論すべきものであった．前半で $\mu(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = 1$ としたのは，現実をシミュレートするものではなく，文献 [1] や [3] などで論じられているように，あくまで移動から見た空間そのものの性質を論じるという意図によるものである．東京 23 区の例は，点 $\boldsymbol{p}_i$ が $\boldsymbol{i}$ 区，点 $\boldsymbol{p}_j$ が j 区にあるとして $\mu(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j) = C_{ij}$ と置いた式 (47) を計算したことになり，別な言い方では 4 次元の領域をいくつかの部分領域に分け，実際の調査データを用いてそれぞれに C_{ij} という重みをつけたことに他ならない．結果として得られた予想外に滑らかな分布の 2 つの“こぶ”は，全体で一様に近い移動と，都心 3 区（あるいは新宿も含む）への通勤移動の合成により生じるものと推察でき，従来の方法ではとてもこのような予想はできないと考えられる．紙面の都合もあるので，この厳密な分布を基にした展開は今後の課題としておきたい．

14. おわりに

1 次元の空間やネットワークでは距離分布だけでなく通過量分布も論じたが，建物内や平面という空間では距離分布の方ばかり論じる結果となってしまった。通過量分布についても，一般的な論議ができないわけではなく、領域が円の場合は第 2 種の完全楕円積分を用いも表現できる（文献 [15]）．しかし距離と違って通過量の場合はルートを特定する必要があり，これについては距離分布ほどの蓄積がまだそれ程ないことを指摘しておきたい．

本論文は移動からみた空間の分析を目指し、これまでに発表した文献 [6,1,12] を中心に構成した．シンポジウムの当日には [13,14] にも触れる機会があるかもしれない．

参考文献

[1] 腰塚武志 (1996)：建物内の移動距離からみた低層建物と高層建物との比較．日本都市計画学会学術研究論文集 31 号，pp.31-36.

[2] 伏見正則，腰塚武志他 (1999)：移動距離からみた放射状パターン格子状パターンの比較．科学研究費補助金，基盤研究 (B) 都市の交通システムの運用に関する研究.

[3] 腰塚武志 (1998)：移動からみた都市空間の分析．日本学術会議第 1 回生活環境設計シンポジウム講演論文集，pp.5-10.

[4] 谷村秀彦，腰塚武志，他 (1986)：都市計画数理．朝倉書店.

[5] 腰塚武志 (1995)：都市を四次元空間で考える．現代思想 5 月号特集・高次元多様体，pp.208-216.

[6] 腰塚武志 (1999)：移動からみた放射状と格子状ネットワークの比較．日本都市計画学会学術研究論文集, 第 34 号,pp.763–768.

[7] 腰塚武志 (1976)：積分幾何学について (3)．オペレーションズ・リサーチ，11 月号，pp.654–659.

[8]L.A. Santaró(1976)：*Integral Geometry and Geometric Probability.* Addison-Wesley, Massachusetts.

[9] 腰塚武志 (1978)：地域内距離．*Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.21, No.2, pp.302–319.

[10] 栗田　治, 腰塚武志 (1988)：領域間平均距離の近似理論とその応用．日本都市計画学会学術研究論文集, 第 23 号.

[11] 総務庁統計局 (1996)：平成 7 年度国勢調査.

[12] 腰塚武志，大津　晶 (2001):都市領域における

距離分布の導出とその応用．日本都市計画学会平成13年度論文集，pp.871-876.

[13] 腰塚武志 (2002):平面領域における距離分布．日本都市計画学会平成14年度論文集，pp.37-42.

[14] 腰塚武志，大原宏晃，中川享規 (2003):関東地域における鉄道の空間拡大効果．日本都市計画学会平成15年度論文集，pp.151-156.

[15] 大津　晶，腰塚武志 (1998):都市内流動量分布に関する基礎的研究．日本都市計画学会平成10年度論文集，pp.319-324.