

都市・建築空間の分析における距離モデル

01107680 慶應義塾大学理工学部 栗田 治

1. はじめに

本稿は都市・地域や建築空間に関して、その現状を科学的に解明したり、それらを適切に設計してゆくために必要な“距離モデル”を取り上げ論ずるものである。ただし、距離のモデルを網羅的に取り上げて技術の現状を述べるのは著者の力が及ぶところでないので、著者の関わった研究の中から

【1】平面上の領域間の(あるいは領域から1点への)平均距離を近似する方法(2節)

【2】都市の基軸交通パターンが距離分布に与える影響を算出する方法(3節)

【3】3次元構造物の距離の分析方法(4節)

の三者を取り上げ各論を展開することにした。その意味で以下の論考は十全たるものではないが、それでもこれらは距離の取り扱いに関する基盤技術であって、都市・地域や建築空間に関するORモデルを構築してゆくために役立つこともあるのではないかと考えている。

言うまでもないことであるが、住民は一処に住んでいるだけで都市生活を営むことはできない。住居から都市施設や職場へ、あるいは職場から取引先へ、といった具合に目的に応じた様々な移動が存在している。都市のORモデルの多くは、個人的と社会的との別を問わぬ、都市住民の営みを対象とするものである。したがって、それを作る上では多くの場合、移動距離や移動時間を正面から取り扱う必要がある。この距離の取り扱いを具体的なORモデル(表1-1)で観察すると、(a)距離の数学的定義、(b)平面上の2つの領域の間の距離の設定、(c)平面上の領域から1つの点への距離の設定、という三つの営みが見て取れる。上記の【1】～【3】はこうした営みの各論と見ることもできよう。

表1-1 都市のORモデルの例と距離モデルの登場の仕方

【交通行動の記述】

空間相互作用モデル…ゾーン(領域)間距離
非集計選択行動モデル…2点間の距離や所要時間
空間的均衡立地モデル…都市平面上の2点間距離

【都市・建築空間の最適化】

施設配置-配分問題…住民から施設への距離
都市の3次元形態最適化…都市平面上の距離と垂直方向の距離
輸送問題…原料供給点から需要点への距離

【都市空間の評価手法】

移動距離分布…都市空間内の2点間距離
時間地図…都市間所要時間
アクセシビリティのモデル…都市空間内の2点間距離

2. 領域間平均距離の近似理論

平面上の2つの領域上に一様な点を与え、領域間の平均距離を考察の対象とする。後述する通り、この平均距離を厳密に計算することは困難である。そこで、この困難を克服するための近似法を紹介する。導かれる平均距離の近似式は、都市工学のみならず様々な分野で役立つものと思われる。

まず、平面上に2つの閉領域 A と B を与える。そして、領域 A の内部の点 P から、領域 B の内部の点 Q への直線距離 $r = r(P, Q)$ を考える (図2-1)。このような状況の下で、次を考えよう：

【問題】領域 A と B の間の平均距離 $\langle r \rangle$ を求めよ。

実際、都市のOR分野では、こうした局面がよくある。例えば、空間相互作用モデルを用いるためには、設定した領域 (zone) の間の距離を用意しておく必要がある。これに領域間の平均距離を当てようというわけである。また、施設配置の minisum 型問題を解くためには、利用者が分布する領域から施設 (点) への平均距離を用意せねばならない。minisum 型施設配置問題とは、この平均距離に各領域の利用者数の重みを付けた総和を最小化するものである。つまり目的関数は、距離の総和を、平均距離を元にして積算したものに他ならない。この平均距離は、上記の2つの領域の内、一方を点で与えた場合に相当する。点と領域の間の平均距離は、ハフモデルにおいて領域内の人々が店舗を訪れるという設定においても威力を発揮する。

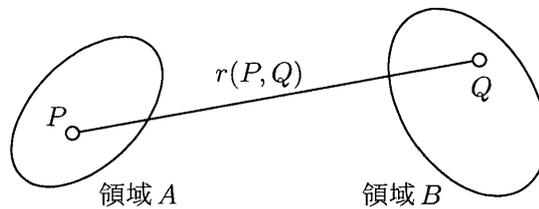


図2-1 領域 A 内の点 P と領域 B 内の点 Q との距離 r 。

ただし、考察を進めるに当たって、(簡単化のために) まず次を想定しておく：

【想定】点 P 、点 Q は互いに独立に、各々の領域内で一様に分布するものとする。

ここで、任意の可積な関数 $f(P, Q)$ に関して、直積 $A \times B$ 上での平均値を

$$\langle f \rangle = \frac{1}{S_A S_B} \int_A \int_B f(P, Q) \, dP \, dQ \quad (2.1)$$

と定義しておく。ただし、上式の S_A と S_B は各領域の面積である：

$$S_A = \int_A \, dP, \quad S_B = \int_B \, dQ. \quad (2.2)$$

我々の平均距離は、この記号を使って表される：

$$\langle r \rangle = \frac{1}{S_A S_B} \int_A \int_B r(P, Q) \, dP \, dQ. \quad (2.3)$$

ところで読者諸兄の中には、次のような意見をお持ちの方も居られるかもしれない。即ち、

点が各領域で一様なだけだから、各々の領域の重心を P_G ならびに Q_G とすれば、平均距離は重心間の距離 $r(P_G, Q_G)$ で与えられるのではないか？

実はこの意見は間違っている。ある特殊な場合を除いて、重心の間の距離は、平均距離よりも小さいのである。このことは常識として身に付けておくべき大切な事柄だと思われる (証明は [栗田 1988])。)

2.1 2つの円盤の間の平均距離とその近似式

さて、上記(2.3)の意味は誠に単純であるが、これを具体的な領域に関して陽に求めることは、それほど簡単な作業ではない。面積を持った2つの領域について、これが算出されたのは、2つの重なり合わない円盤領域 [Bouwkamp 1977] ならびに辺を接する2つの合同な矩形 [Alagar 1976] のみである。ここでは前者に着目し、図2-2のように、2つの領域を半径 α の円盤と、半径 β の円盤で与えよう。円盤の中心点間の距離を h で与え、

$$\alpha + \beta \leq h \quad (\text{重なり合わないための条件}) \quad (2.4)$$

が成り立つものとする。

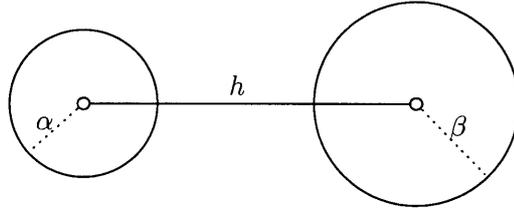


図2-2 2つの互いに交わらない円盤領域.

このときの領域間平均距離を $\langle r \rangle_{\text{円円}}$ とすると

$$\langle r \rangle_{\text{円円}} = h F_4 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 2, 2; \left(\frac{\alpha}{h} \right)^2, \left(\frac{\beta}{h} \right)^2 \right) \quad (2.5)$$

である [Bouwkamp 1977]. ただし、 F_4 はAppellの超幾何関数であり、

$$(a)_m = a(a+1)(a+2)\cdots(a+m-1) = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} \quad (2.6)$$

と置くとき ($(a)_0 = 1$ と約束する)

$$F_4(a, b; c, c'; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n}}{(c)_m (c')_n m! n!} x^m y^n \quad (2.7)$$

と定義される [Erdelyi et al. 1953].

この平均距離の厳密な値を得ようとするれば、事実上数値積分が必要となる。しかし、工学上の応用を考えた場合、数値積分のみに頼るのは得策ではない。何故なら数値積分では、2つの円盤の間の距離や、円盤の半径が変化するとき、その変化が平均距離の値にどの様に効くか?といった議論をし難いからである。そのために、(2.7)に基づいて(2.5)を具体的に書き下してみると次の通りである：

$$\langle r \rangle_{\text{円円}} = h \left[1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{8h^2} + \frac{\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4}{192h^4} + \frac{\alpha^6 + 6\alpha^4\beta^2 + 6\alpha^2\beta^4 + \beta^6}{1024h^6} + \cdots \right]. \quad (2.8)$$

この無限級数を最初の2つの項までで打ち切って、円盤間の平均距離の近似を与えよう：

$$\text{【円盤間の平均距離近似公式】} \quad \langle r \rangle_{\text{円円}}^* = h + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{8h}. \quad (2.9)$$

一方の領域が点で与えられる場合も、近似公式が設定できる。即ち、図2-3のような点と半径 α の円盤との平均距離近似公式は次の通り(上で $\beta = 0$ と置けばよい)：

$$\text{【点・円盤間の平均距離近似公式】 } \langle r \rangle_{\text{点円}}^* = h + \frac{\alpha^2}{8h}. \quad (2.10)$$

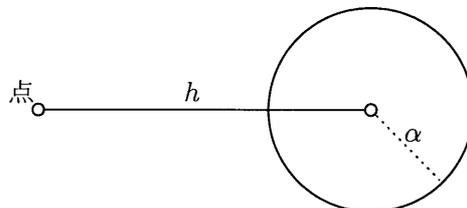


図2-3 点と円盤領域の間の平均距離。

これらの近似式は誠に簡便なものである(忘れようにも忘れられない、といったら言い過ぎだろうか?)。しかも、数値計算により確かめると、かなり高精度でもある。

表2-1 半径 $\alpha = \beta = 1$ の2つの円盤間の平均距離近似精度。

h	真値 $\langle r \rangle_{\text{円円}}$	近似値 $\langle r \rangle_{\text{円円}}^*$	$\langle r \rangle_{\text{円円}}^*$ の 相対偏差(%)	h の 相対偏差(%)
0.00	0.9054	—	—	-100.00
0.25	0.9313	1.2500	34.221	-73.16
0.50	1.0079	1.0000	-0.784	-50.39
0.75	1.1281	1.0833	-3.968	-33.52
1.00	1.2852	1.2500	-2.739	-22.19
1.25	1.4709	1.4500	-1.421	-15.02
1.50	1.6779	1.6667	-0.669	-10.60
1.75	1.8991	1.8929	-0.329	-7.85
2.00	2.1288	2.1250	-0.179	-6.05
2.25	2.3637	2.3611	-0.110	-4.81
2.50	2.6018	2.6000	-0.069	-3.91
2.75	2.8423	2.8409	-0.049	-3.25
3.00	3.0844	3.0833	-0.035	-2.74
3.25	3.3277	3.3269	-0.023	-2.33
3.50	3.5721	3.5714	-0.019	-2.02
3.75	3.8172	3.8167	-0.014	-1.76
4.00	4.0629	4.0625	-0.010	-1.55
4.25	4.3092	4.3088	-0.009	-1.37
4.50	4.5558	4.5556	-0.005	-1.22
4.75	4.8029	4.8026	-0.005	-1.10
5.00	5.0502	5.0500	-0.004	-0.99

いま $\alpha = \beta = 1$ (2つの円盤の半径が共に1)の場合を想定する。このとき、 h を様々な値に設定して $\langle r \rangle_{\text{円円}}$ の真値を(数値積分で)算出し、(2.9)の近似値 $\langle r \rangle_{\text{円円}}^*$ の精度を計算した(表2-1)。表2-1では、ついでに、平均値の代わりに重心間距離 h を用いたときの精度も記述している。表2-1を見ると、2つの円盤が接する場合($h = 2\alpha$)で、 $\langle r \rangle_{\text{円円}}^*$ の近似偏差は-0.179%であり、 h の増加につれて偏差は速やかに0に近づくことが読み取られる。一方、 h の $\langle r \rangle_{\text{円円}}$ からの偏差は、円盤が接する場合で-6.05%であり、 $h = 5$ のときでさえ約-1%となっている。重心間の距離は使えないが、近似公式(2.9)は使えることが分かる。

表 2-2 点と半径 $\alpha = 1$ の円盤の間の平均距離近似精度.

h	真値 $\langle r \rangle_{\text{点円}}$	近似値 $\langle r \rangle_{\text{点円}}^*$	$\langle r \rangle_{\text{点円}}^*$ の 相対偏差(%)	h の 相対偏差(%)
0.00	0.6667	—	—	-100.00
0.25	0.6978	0.7500	7.481	-64.17
0.50	0.7897	0.7500	-5.027	-36.68
0.75	0.9375	0.9167	-2.222	-20.00
1.00	1.1346	1.1250	-0.846	-11.86
1.25	1.3531	1.3500	-0.229	-7.62
1.50	1.5850	1.5833	-0.105	-5.36
1.75	1.8225	1.8214	-0.059	-3.98
2.00	2.0632	2.0625	-0.034	-3.06
2.25	2.3060	2.3056	-0.019	-2.43
2.50	2.5503	2.5500	-0.012	-2.05
2.75	2.7957	2.7955	-0.009	-1.63
3.00	3.0419	3.0417	-0.008	-1.38
3.25	3.2886	3.2885	-0.004	-1.17
3.50	3.5358	3.5357	-0.002	-1.01
3.75	3.7834	3.7833	-0.002	-0.88
4.00	4.0313	4.0313	-0.001	-0.78
4.25	4.2795	4.2794	-0.001	-0.69
4.50	4.5278	4.5278	-0.000	-0.61
4.75	4.7763	4.7763	-0.000	-0.55
5.00	5.0250	5.0250	-0.000	-0.50

今度は同様に、点と円盤の場合で $\alpha = 1$ を想定する。このときも、 h を様々な設定して $\langle r \rangle_{\text{点円}}$ の真値を(数値積分で)算出し、(2.10)の近似値 $\langle r \rangle_{\text{点円}}^*$ ならびに重心間距離 h の偏差を調べた(表 2-2)。表 2-2を見ると、点が円盤の周上にある場合($h = \alpha$)で $\langle r \rangle_{\text{点円}}^*$ の偏差は-0.846%であり、この偏差は h の増加に連れて速やかに0に近づく。一方 h の偏差は、点が円盤の周上にある場合で-11.86%であり、 $h = 3.5$ のときでさえ約-1%となっている。やはり重心間の距離は使えないが、近似公式(2.10)は使えることが分かる。

さらに、これらの公式は、数値積分にはない操作性の良さを与えてくれる。例えば、偏微係数に関する近似をここから得ることができる：

$$\frac{\partial \langle r \rangle_{\text{円円}}}{\partial h} \sim 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{8h^2}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \langle r \rangle_{\text{円円}}}{\partial \alpha} \sim \frac{\alpha}{4h}, \quad \frac{\partial \langle r \rangle_{\text{円円}}}{\partial \beta} \sim \frac{\beta}{4h}. \quad (2.12)$$

これによって、

(1) 中心間距離 h による平均距離 $\langle r \rangle_{\text{円円}}$ の増加率は漸増し、やがては1に収束する

(2) 領域の半径 $\alpha[\beta]$ による平均距離 $\langle r \rangle_{\text{円円}}$ の増加率は $\alpha/h[\beta/h]$ に比例する

といった性質を推察することが出来るのである。

2.2 平均距離近似の一般公式

円盤の場合は、上記の如くに平均距離の高精度近似公式を得ることが出来た。これは(2.5)の解が得られていたからこそこの帰結である。ところが面積を持つ2つの領域の間の平均距離は、円以外

の幾何学図形(例えば矩形, 三角形など)については陽に得られていない. 況や不定型においてをや. つまり, “平均距離をきちんと導出してからその展開を考える” というのは見通しが悪い. そこで, 全く別の観点から平均距離を近似するための一般的な方法を探ってみよう. 以下では, まず問題を一般化し, 領域間の距離の積率(r^ν)(つまり距離 r の ν 乗の平均値)を近似する方法を述べる. 続いて $\nu = 1$ と置くことによって, 平均距離を近似するための一般公式を作成する.

2.2.1 距離の積率の2項展開による導出法

以下で紹介するのは, 二項展開による方法 [Vaughan 1984] を一般化した距離の積率の展開法 [栗田 1993] である. なお, 平均距離(以下で $\nu = 1$ とおいた場合)に関しては, 同じく [Vaughan 1984] が Legendre 多項式の母関数を用いた(多重極展開に類似の)方法を提案しており, その方が収束半径に関して良い見通しを与え得る.

まず, 領域 A ならびに B の幾何重心を各々 O, O' とする. そして $h = r(O, O')$ としよう. 領域 A 内の点は O を原点とする直交座標系で $P = (x, y)$, 領域 B 内の点は O' を原点とする直交座標系で $Q = (u, v)$ とする. ただし, x 軸ならびに u 軸は, 線分 $\overline{OO'}$ に平行に沿っているものとする(図2-4).

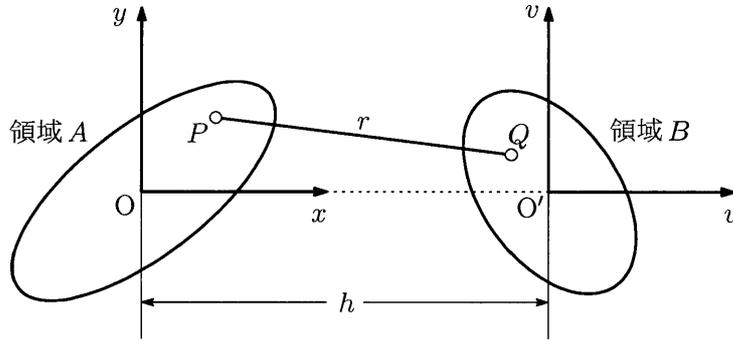


図2-4 $P = (x, y) \in A$ から $Q = (u, v) \in B$ への距離 r .

このとき

$$p_1 = u - x, \quad p_2 = v - y, \quad q^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad (2.13)$$

と置けば, 点 (x, y) から点 (u, v) への距離 r の ν 乗は

$$\begin{aligned} r^\nu &= \{r(P, Q)\}^\nu = \{(h + u - x)^2 + (v - y)^2\}^{\nu/2} \\ &= \{(h + p_1)^2 + p_2^2\}^{\nu/2} \\ &= \{h^2 + 2p_1h + p_1^2 + p_2^2\}^{\nu/2} \\ &= h^\nu \left\{ 1 + \left(\frac{2p_1}{h} + \frac{q^2}{h^2} \right) \right\}^{\nu/2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

である. (2.14)の中括弧の部分に2項展開を適用し(1と $2p_1/h + q^2/h^2$ の2項に着目), さらに $1/h$ の冪級数として整理しよう:

$$r^\nu = h^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{\nu}{2}(\frac{\nu}{2} - 1) \cdots (\frac{\nu}{2} - k + 1)}{k!} \left(\frac{2p_1}{h} + \frac{q^2}{h^2} \right)^k = h^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(\nu)}{h^k}. \quad (2.15)$$

ただし、この二項級数の収束半径は次の通り：

$$\left| \frac{2p_1}{h} + \frac{q^2}{h^2} \right| < 1. \quad (2.16)$$

また、低次の係数は次の通りである（導出過程は若干煩雑であるので割愛）：

$$\begin{aligned} c_0(\nu) &= 1, & c_1(\nu) &= \nu p_1, & c_2(\nu) &= \nu\{(\nu-1)p_1^2 + p_2^2\}, \\ c_3(\nu) &= \nu(\nu-2)\{(\nu-1)p_1^3 + 3p_1p_2^2\}/6, \\ c_4(\nu) &= \nu(\nu-2)\{(\nu-1)(\nu-3)p_1^4 + 6(\nu-3)p_1^2p_2^2 + 3p_2^4\}/24. \end{aligned} \quad (2.17)$$

以上を考慮すると距離の積率 $\langle r^\nu \rangle$ が次のように定式化される（ $dP = dx dy$, $dQ = du dv$ から）：

$$\begin{aligned} \langle r^\nu \rangle &= \frac{1}{S_A S_B} \int_A \int_B r^\nu du dv dx dy \\ &= \frac{h^\nu}{S_A S_B} \int_A \int_B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(\nu)}{h^k} du dv dx dy = h^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle c_k(\nu) \rangle}{h^k}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

係数は次の通りである：

$$\begin{aligned} \langle c_0(\nu) \rangle &= 1, & \langle c_1(\nu) \rangle &= \nu \langle p_1 \rangle, \\ \langle c_2(\nu) \rangle &= \nu\{(\nu-1)\langle p_1^2 \rangle + \langle p_2^2 \rangle\}/2, \\ \langle c_3(\nu) \rangle &= \nu(\nu-2)\{(\nu-1)\langle p_1^3 \rangle + 3\langle p_1 p_2^2 \rangle\}/6, \\ \langle c_4(\nu) \rangle &= \nu(\nu-2)\{(\nu-1)(\nu-3)\langle p_1^4 \rangle + 6(\nu-3)\langle p_1^2 p_2^2 \rangle + 3\langle p_2^4 \rangle\}/24. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ただし、(2.19)中の $\langle p_1^i p_2^j \rangle$ は(2.20)の様に、 x, y, u, v の多項式の平均値で与えられる。ただし、この計算過程では、

1. 点 $P = (x, y)$ と点 $Q = (u, v)$ が独立である
2. 点 $P = (x, y)$ と点 $Q = (u, v)$ の原点は、各領域の重心だから $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle u \rangle = \langle v \rangle = 0$ である

という2つの条件を用いていることに注意：

$$\begin{aligned} \langle p_1 \rangle &= \langle u - x \rangle = \langle u \rangle - \langle x \rangle = 0, \\ \langle p_1^2 \rangle &= \langle (u - x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle, \\ \langle p_2^2 \rangle &= \langle (v - y)^2 \rangle = \langle y^2 \rangle + \langle v^2 \rangle, \\ \langle p_1^3 \rangle &= \langle (u - x)^3 \rangle = \langle u^3 \rangle - \langle x^3 \rangle, \\ \langle p_1 p_2^2 \rangle &= \langle (u - x)(v - y)^2 \rangle = \langle uv^2 \rangle - \langle xy^2 \rangle, \\ \langle p_1^4 \rangle &= \langle (u - x)^4 \rangle = \langle u^4 \rangle + 6\langle u^2 \rangle \langle x^2 \rangle + \langle x^4 \rangle, \\ \langle p_2^4 \rangle &= \langle (v - y)^4 \rangle = \langle v^4 \rangle + 6\langle v^2 \rangle \langle y^2 \rangle + \langle y^4 \rangle, \\ \langle p_1^2 p_2^2 \rangle &= \langle (u - x)^2 (v - y)^2 \rangle = \langle x^2 y^2 \rangle + \langle u^2 v^2 \rangle + 4\langle xy \rangle \langle uv \rangle + \langle x^2 \rangle \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \langle y^2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

(2.18), (2.19), (2.20)により、距離の積率を $1/h$ の冪に展開する一般公式の導出が完了した。(2.19), (2.20)より、 $\langle c_1(\nu) \rangle = \nu \langle u - x \rangle = \nu(\langle u \rangle - \langle x \rangle) = 0$ である。これは(2.18)の $1/h$ の係数が

ゼロであることを意味する。実はこのことが、後述の近似式の操作性の良さをもたらしているのである。

2.2.2 平均距離の展開公式

いま(2.18)で $\nu = 1$ とし、平均距離の展開公式の低次項を書き下してみよう：

$$\langle r \rangle = h \left\{ 1 + \frac{\langle y^2 \rangle + \langle v^2 \rangle}{2h^2} + \frac{\langle xy^2 \rangle - \langle uv^2 \rangle}{2h^3} + \frac{c_4}{h^4} + \dots \right\}. \quad (2.21)$$

ただし、 c_4 は次の通り：

$$c_4 = \frac{1}{2}(\langle x^2 y^2 \rangle + \langle u^2 v^2 \rangle) + 4\langle xy \rangle \langle uv \rangle + \langle x^2 \rangle \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \frac{1}{8}(\langle y^4 \rangle + 6\langle y^2 \rangle \langle v^2 \rangle + \langle v^4 \rangle). \quad (2.22)$$

上式で、最初の2項だけを抽出すると、次の平均距離近似式を得る：

$$\text{【平均距離近似の一般公式】} \quad \langle r \rangle^* = h + \frac{\langle y^2 \rangle + \langle v^2 \rangle}{2h}. \quad (2.23)$$

この式は全く示唆的である。即ち、2つの領域の間の平均距離を考えた場合、

1. 最も重要な尺度は(直観通り)重心間の距離 h である
2. 次に重要な尺度は、各領域の縦方向(y 軸ならびに v 軸)の周辺分布の2次の積率 $\langle y^2 \rangle$ ならびに $\langle v^2 \rangle$ である

という2点が判明する。領域間平均距離を決定するための主役は重心間距離であり、名脇役が各領域の縦方向の広がり(分散)の尺度(分散)、という訳である。

2.2.3 2つの領域が円盤の場合

領域 A, B を、各々半径 α ならびに β の円盤で与えよう(図2-2)。このときの(2.19)の各係数を特定したい。(2.19)の係数は、 x, y, u, v の多項式であるから、つまるところ $x^i y^j u^k v^l$ の $A \times B$ 上での平均値 $\langle x^i y^j u^k v^l \rangle$ を計算すれば、これを導出できる。加えて、 (x, y) と (u, v) との独立性によって

$$\langle x^i y^j u^k v^l \rangle = \langle x^i y^j \rangle \langle u^k v^l \rangle \quad (2.24)$$

が成立する。したがって、 $\langle x^i y^j \rangle$ の方さえ求めれば、その α を β に置き換えることによって $\langle u^i v^j \rangle$ は直ちに分かる。そこで、変数変換

$$x = t \cos \theta, \quad y = t \sin \theta \quad (t \in [0, \alpha], \quad \theta \in [0, 2\pi)) \quad (2.25)$$

を行うと(ヤコビアンは t)

$$\begin{aligned} \langle x^i y^j \rangle &= \frac{1}{S_A} \int_A x^i y^j dx dy \\ &= \frac{1}{\pi \alpha^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{\alpha} t^i \cos^i \theta t^j \sin^j \theta t dt d\theta \\ &= \frac{1}{\pi \alpha^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{\alpha} t^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^j \theta dt d\theta \\ &= \frac{\alpha^{i+j}}{\pi(i+j+2)} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.26)$$

となり、 $\langle x^i y^j \rangle$ が次のように求められる：

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle y \rangle = 0, & \langle x^2 \rangle &= \langle y^2 \rangle = \frac{\alpha^2}{4}, & \langle xy \rangle &= 0, \\ \langle x^3 \rangle &= \langle x^2 y \rangle = \langle xy^2 \rangle = \langle y^3 \rangle = 0, & \langle x^4 \rangle &= \langle y^4 \rangle = \frac{\alpha^4}{8}, & \langle x^2 y^2 \rangle &= \frac{\alpha^4}{24}, \quad \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

これらに基づいて、(2.19) は次のように算出される。

$$\begin{aligned} \langle c_1(\nu) \rangle &= \langle c_3(\nu) \rangle = 0, & \langle c_2(\nu) \rangle &= \nu^2(\alpha^2 + \beta^2)/8, \\ \langle c_4(\nu) \rangle &= \nu^2(\nu - 2)^2(\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4)/192. \end{aligned} \quad (2.28)$$

こうして $\langle r^\nu \rangle_{\text{円円}}$ の展開式が次の通り得られた：

$$\langle r^\nu \rangle_{\text{円円}} = h^\nu \left[1 + \frac{\nu^2(\alpha^2 + \beta^2)}{8h^2} + \frac{\nu^2(\nu - 2)^2(\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4)}{192h^4} + \dots \right]. \quad (2.29)$$

(2.29) で $\nu = 1$ とおけば式 (2.8) に一致する。この結果に基づけば、円周上で一様な点の間の平均距離 [栗田 & 腰塚 1989] や回転対称な点分布の間の平均距離 [栗田 1989, 2000] も追求できる。なお、[栗田 & 腰塚 1989] では円盤がそれより小さな円盤を完全に含む場合の平均距離も追求されている。

2.2.4 2つの領域が矩形盤の場合

今度は、領域 A , B を図 2-5 の通りの矩形盤で与えよう。

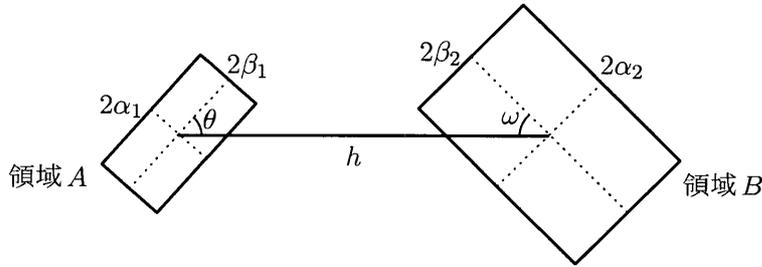


図 2-5 2つの互いに交わらない矩形盤領域。

この場合の係数 (2.19) の計算は若干煩雑なものとなるが、いずれにしても多項式の定積分であるから、導出可能である。こうして次の近似公式が得られる：

$$\text{【矩形盤間の平均距離近似公式】} \quad \langle r \rangle_{\text{矩矩}} \sim h + \frac{\alpha_1^2 \sin^2 \omega + \beta_1^2 \cos^2 \omega + \alpha_2^2 \sin^2 \theta + \beta_2^2 \cos^2 \theta}{6h}. \quad (2.30)$$

勿論上式で、 $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ と置けば、点と $(2\alpha_1 \times 2\beta_1)$ の矩形盤との平均距離展開式が与えられる。また、2つの矩形盤が合同の場合 ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ かつ $\beta_1 = \beta_2 = \beta$) は、展開式は次の通り：

【合同な矩形盤間の平均距離近似公式】

$$\langle r \rangle_{\text{矩矩}} \sim h + \frac{\alpha^2(\sin^2 \theta + \sin^2 \omega) + \beta^2(\cos^2 \theta + \cos^2 \omega)}{6h}. \quad (2.31)$$

さらに、2つの領域が合同な正方形 ($\alpha = \beta$) であれば、次式が得られる：

$$\text{【合同な正方形盤間の平均距離近似公式】} \quad \langle r \rangle_{\text{正正}} \sim h + \frac{\alpha^2}{3h}. \quad (2.32)$$

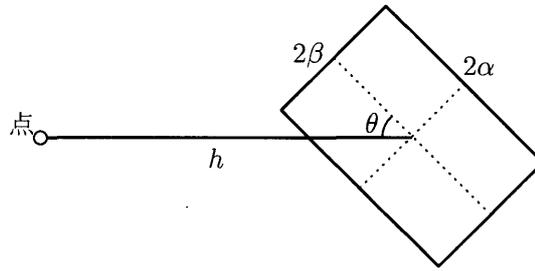


図2-6 点と矩形盤領域の間の平均距離.

図2-6の様な, 点と矩形盤間の平均距離近似式は, 次式の通りである:

$$\text{【点・矩形盤間の平均距離近似公式】 } \langle r \rangle_{\text{点矩}} \sim h + \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta}{6h}. \quad (2.33)$$

正方形の場合 ($\alpha = \beta$) は次の通り:

$$\text{【点・正方形盤間の平均距離近似公式】 } \langle r \rangle_{\text{点正}} \sim h + \frac{\alpha^2}{6h}. \quad (2.34)$$

紙面の都合上詳述はしないが, 上記の矩形盤の関する平均距離近似公式の精度も, 円盤の近似公式に優るとも劣らないことが示されている [栗田 1988].

2.3 不定形の間平均距離近似式

A, B が一般の不定形の場合, (2.21)の $\langle \cdot \rangle$ の部分は図2-4に示したような x, y, u, v の平均値である. したがって, 平面上のGreenの定理によって, 領域 A および B の周回積分に帰着させ, 算出することが出来る. ただし, 実際の計算には, 領域が多角形で近似され, 頂点座標が与えられる必要がある.

いま, 領域 A ならびに領域 B の頂点座標が適当な直交座標 (x', y') で, 反時計回りに

$$(x'_0, y'_0), (x'_1, y'_1), \dots, (x'_n, y'_n); \quad (2.35)$$

$$(u'_0, v'_0), (u'_1, v'_1), \dots, (u'_m, v'_m) \quad (2.36)$$

と与えられているものとする(図2-7-a). このとき, 図2-4で与えられたような座標系は以下に述べる操作で設定できる.

2.3.1 座標系の設定

まず A の反時計回りの周を C_A と表すと, 領域の面積 S_A は

$$\begin{aligned} S_A &= \int_A dx' dy' = \oint_{C_A} x' dy' \quad (\because \text{Greenの定理}) \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \int_{(x'_t, y'_t)}^{(x'_{t+1}, y'_{t+1})} x' dy' \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=0}^{n-1} (x'_{t+1} - x'_t)(y'_{t+1} + y'_t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる。領域 B の S_B についても同様である。

次に領域 A の重心座標 (x'_G, y'_G) は、これを元にして

$$\begin{aligned} x'_G &= \frac{1}{S_A} \int_A x' dx' dy' = \frac{1}{S_A} \oint_{C_A} \frac{x'^2}{2} dy' \\ &= \frac{1}{6S_A} \sum_{t=0}^{n-1} (y'_{t+1} - y'_t)(x'_{t+1}{}^2 + x'_{t+1}x'_t + x'_t{}^2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

と導出される。勿論、 y'_G および領域 B の重心 (u'_G, v'_G) も同様である。そこで、各領域の重心を原点とし、軸が (x', y') の軸に平行な座標 (x'', y'') を考えると、

$$x''_t = x'_t - x'_G, \quad y''_t = y'_t - y'_G \quad (t = 0, 1, \dots, n); \quad (2.39)$$

$$u''_s = u'_s - u'_G, \quad v''_s = v'_s - v'_G \quad (s = 0, 1, \dots, m) \quad (2.40)$$

と頂点座標が変換される。

さらに、領域 A の重心 O と領域 B の重心 O' を結ぶ線分 OO' が x' 軸となす角度を図 2-7-a の如くに θ とし、直交変換 (角度 θ の回転) を

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

と定義すれば、求める座標系における頂点座標が次の通りに設定される (図 2-7-b 参照) :

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x''_t \\ y''_t \end{bmatrix} \quad (t = 0, 1, \dots, n); \quad (2.42)$$

$$\begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u''_s \\ v''_s \end{bmatrix} \quad (s = 0, 1, \dots, m). \quad (2.43)$$

2.3.2 近似公式の作成

平均距離近似の公式 (2.23) を用いるには、上で設定された各領域の座標系 (x, y) ならびに (u, v) について、2 次の積率 $\langle y^2 \rangle$ ならびに $\langle v^2 \rangle$ を求めねばならない。これも平面上の Green の定理の適用によって、次のように計算される [Vaughan 1984] :

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \frac{1}{S_A} \int_A y^2 dx dy = -\frac{1}{3S_A} \oint_{C_A} y^3 dx \\ &= \frac{1}{12S_A} \sum_{t=0}^{n-1} (x_t - x_{t+1})(y_t + y_{t+1})(y_t^2 + y_{t+1}^2), \end{aligned} \quad (2.44)$$

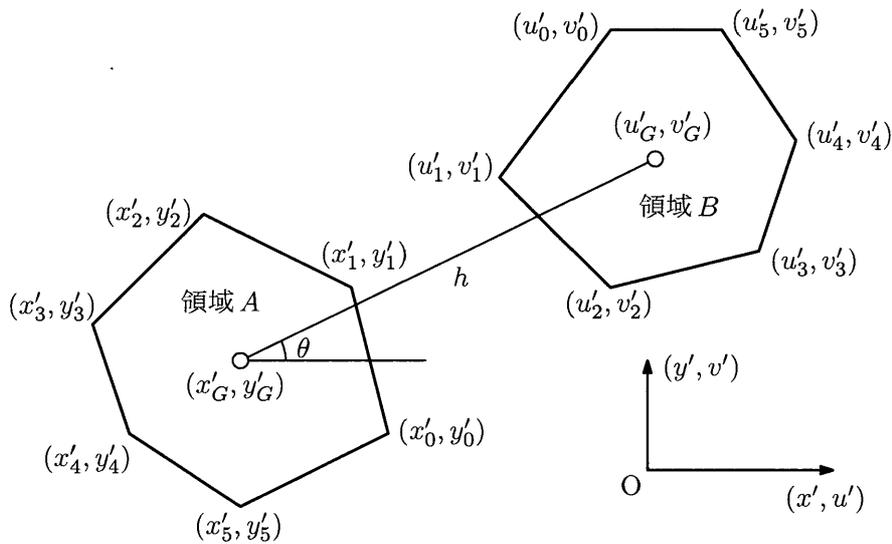
$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{12S_B} \sum_{s=0}^{m-1} (u_s - u_{s+1})(v_s + v_{s+1})(v_s^2 + v_{s+1}^2). \quad (2.45)$$

よって、不定形に関する平均距離近似公式として、次が得られる :

$$\text{【不定形間の平均距離近似公式】} \quad \langle r \rangle^* = h + \frac{c}{h} \quad (2.46)$$

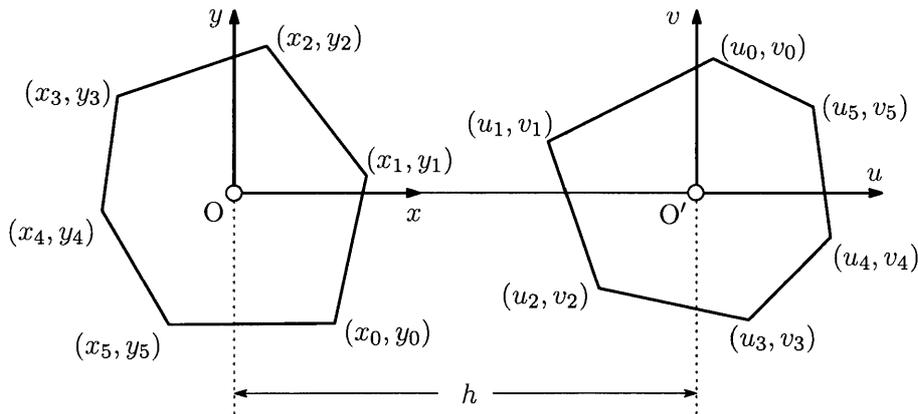
ただし

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{24S_A} \sum_{t=0}^{n-1} (x_t - x_{t+1})(y_t + y_{t+1})(y_t^2 + y_{t+1}^2) \\ &\quad + \frac{1}{24S_B} \sum_{s=0}^{m-1} (u_s - u_{s+1})(v_s + v_{s+1})(v_s^2 + v_{s+1}^2). \end{aligned} \quad (2.47)$$



a 共通の直交座標系

↓ 座標変換



b 各領域の重心を原点とする直交座標系

図2-7 不定形領域の頂点座標の設定.

2.3.3 東京23区を例にした精度評価

2つの不定形領域の間の平均距離について、近似公式(2.46)の精度を観るための例として、東京23区の各々を多角形近似した上でデータ化した(図2-8). ちなみに、多角形の頂点の個数は27個から68個にわたっている. また、図2-8の各領域内の点は各区の重心である.

ここでは、この23個の中から相異なる領域ペアを全て抽出し(${}_{23}C_2 = 253$ ペア), 近似公式による値 $\langle r \rangle^*$ を算出した. この近似の精度を検証するためには、任意の2つの多角形領域の間の平均距離の真値を計算する必要がある. ここではこの4次元積分を2次元の周回積分に帰着させた上で、数値積分を実行することにより、真値を計算した[栗田 1988], [栗田 & 腰塚 1988].

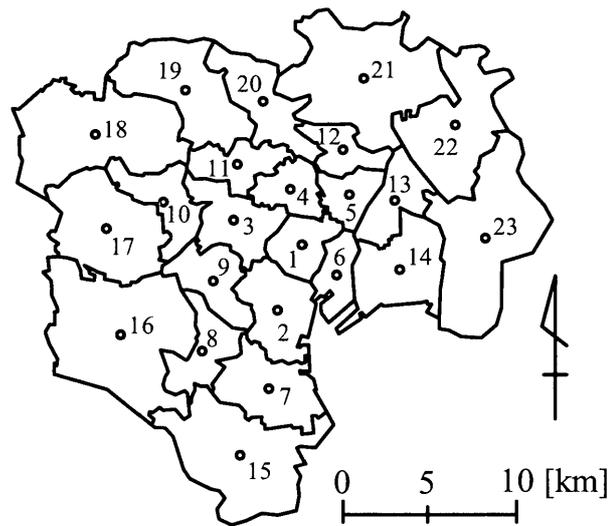


図2-8 東京23区の多角形表示ならびに各領域の重心.

こうして253ペアの全てについて、真値 $\langle r \rangle$ と(2.46)による近似値 $\langle r \rangle^*$ とを比べたところ、真値 $\langle r \rangle$ が10kmを超えるようなペアについては、近似値 $\langle r \rangle^*$ の精度が極端に良いことが分かった。そこで、近似値 $\langle r \rangle^*$ の $\langle r \rangle$ からの誤差が比較的に大きな“ $\langle r \rangle$ が10km以下のペア”について、真値 $\langle r \rangle$ と近似値 $\langle r \rangle^*$ との関係をプロットすると(全部で114ペア)図2-9が得られる。さらに比較のために、真値 $\langle r \rangle$ と重心間距離 h との関係をプロットしたのが図2-10である。図2-10でばらついてる点が、図2-9のように45度線の近傍に整列する。これが近似公式(2.46)の効果である。なお、ここでの作法は点と多角形の平均距離計算にも直ちに生かすことができ、それを用いれば、多角形領域で一様な点への平均距離の等高線を描くために役立つことも可能である[栗田 2001].

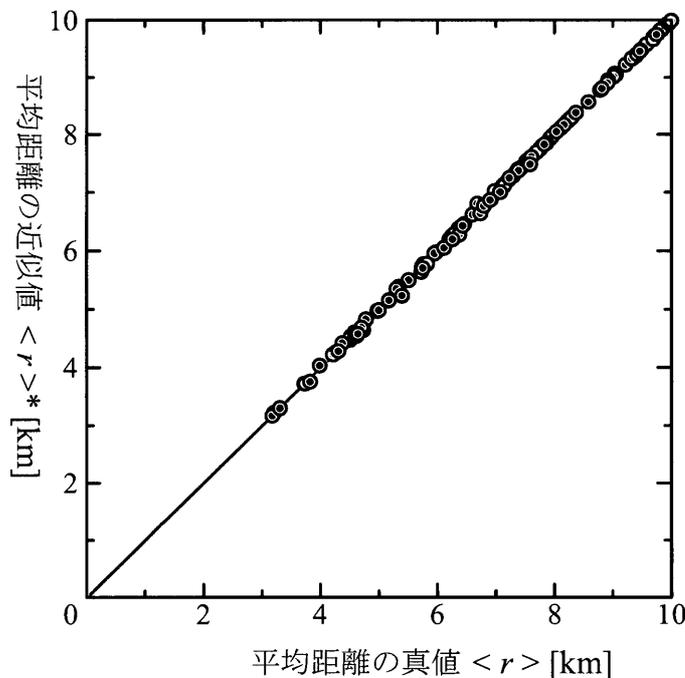


図2-9 真値 $\langle r \rangle$ と近似値 $\langle r \rangle^*$ との関係 ($\langle r \rangle < 10\text{km}$ なる114ペアについてプロット).

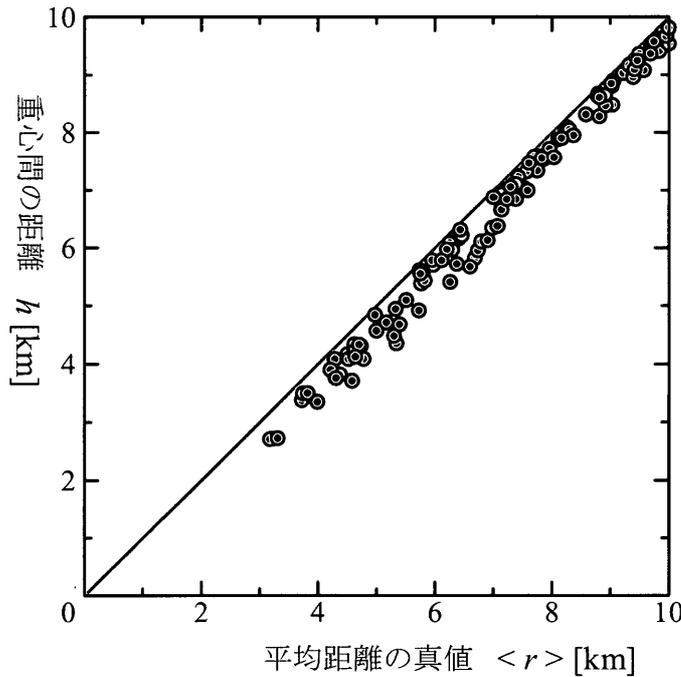


図2-10 真値 $\langle r \rangle$ と重心間距離 h との関係 ($\langle r \rangle < 10\text{km}$ なる 114 ペアについてプロット).

この効果を個々の数値でもう少し詳しく観てみよう. そのために, 重心間距離 h の真値 $\langle r \rangle$ からの乖離が大きいものを取り上げる. 表2-3に示すのは, h の偏差の絶対値が10%を超えるようなペアである. また図2-11にはこのようなペアを, 具体的に図示した. 表2-3を見ると, 品川区と大田区のペアで偏差の絶対値が最も大きく, 約19%にも上っている. この品川-大田のペアに近似公式(2.46)を当てはめると, その偏差は0.78%となっており, h に比べて偏差が劇的に改善されていることが分かる. 他のペア(台東-墨田, 新宿-豊島, 千代田-中央, 等々)についても, h の偏差に比べると, $\langle r \rangle^*$ の誤差のオーダーは1桁から2桁低いことが分かる. 図2-11から分かる通り, ここで取り上げたペアは境界を接するようなペアであり(2つの領域が微妙に入り組んでいるペアもある), こうした場合にも近似式(2.46)が有効に働いてくれることは, 誠に喜ばしい.

表2-3 重心間距離の偏差と近似式の誤差.

番号	ペア	真値 $\langle r \rangle$ (km)	h (km)	h の 相対 偏差 (%)	$\langle r \rangle^*$ (km)	$\langle r \rangle^*$ の相対 誤差 (%)
(1)	品川-大田	5.3406	4.3506	-18.54	5.3825	0.78
(2)	台東-墨田	3.3095	2.7235	-17.71	3.2973	-0.37
(3)	新宿-豊島	3.9926	3.3468	-16.18	4.0329	1.01
(4)	千代田-中央	3.2032	2.7129	-15.31	3.2133	0.31
(5)	台東-荒川	3.1780	2.7071	-14.82	3.1691	-0.28
(6)	目黒-世田谷	5.7277	4.9155	-14.18	5.6391	-1.55
(7)	中央-江東	4.3049	3.7549	-12.78	4.2827	-0.52
(8)	新宿-渋谷	4.3718	3.8152	-12.73	4.4211	1.13

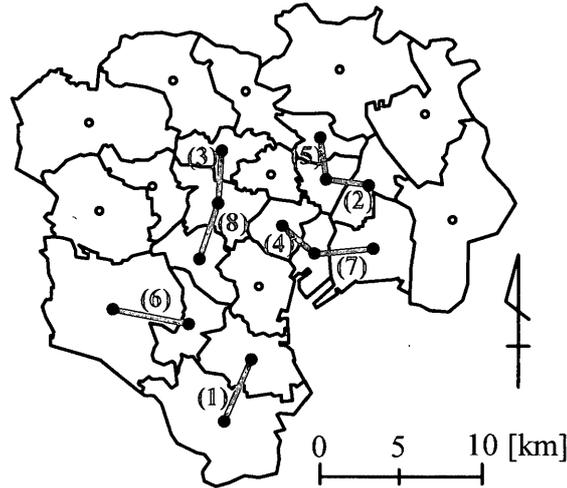


図2-11 重心間距離 h の平均距離 $\langle r \rangle$ からの偏差の絶対値が10%を超えるペア.

2.3.4 不定形領域の円盤による置き換え

上述で、(2.46)の近似公式が役立つことが示された。しかし、(2.46)の算出には、

1. 各頂点座標の計測
2. 座標変換(2.42)ならびに(2.43)を施した上での、2次の積率 $\langle y^2 \rangle$ と $\langle v^2 \rangle$ の計算

という2つの手続きが必要であった。この手続きは、数値積分の手続きに比べれば遥かに簡便ではあるものの、少しく面倒であるのは確かである。そこで、もっと簡便な方法として、各領域を円盤で置き換え、円盤間の平均距離近似式(2.9)を用いてみよう。具体的には、領域を、領域の重心を中心点とする等面積の円盤で置き換えた(図2-12)。こうして図2-9や図2-10と同様のプロットを行ったのが図2-13である。勿論(2.46)の近似(図2-9)に比べれば精度が劣るものの、重心間距離を用いた場合(図2-10)よりもかなり良い精度を達成していることが一目瞭然である。このことから、円盤間の平均距離近似式(2.9)も、実用的に役立つことが確認された。

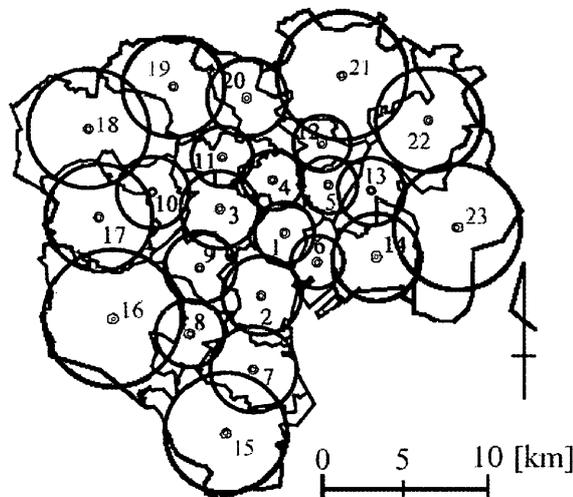


図2-12 等面積の円盤による23区の置き換え.

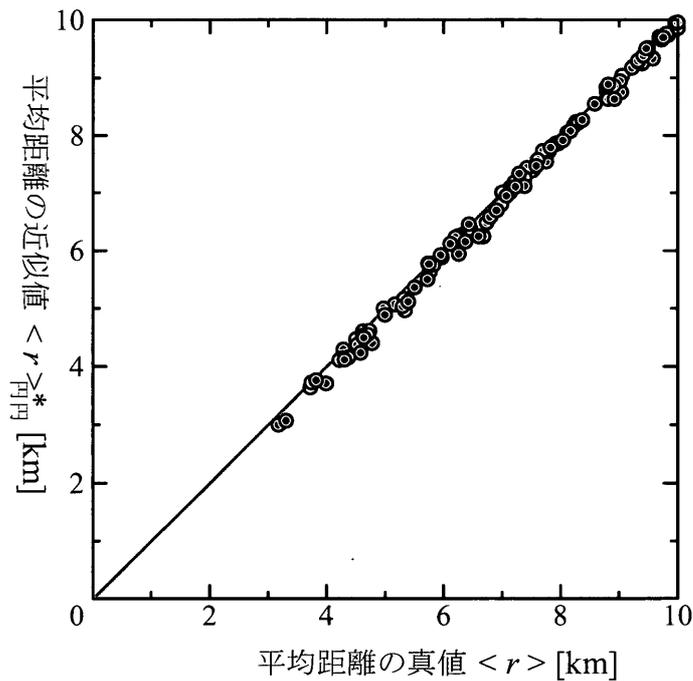


図2-13 真値 $\langle r \rangle$ と円盤で置き換えた近似値 $\langle r \rangle_{\text{円盤}}^*$ との関係 ($\langle r \rangle < 10\text{km}$ なる 114 ペア).

2.4 2節の参考文献

- [1] 栗田 治(1988):『領域間平均距離の近似理論と都市分析への応用』. 筑波大学社会工学研究科博士論文.
- [2] 栗田 治(1989):放射対称な人口分布に関する平均距離, 都市計画論文集, No. 24, pp. 331 - 336.
- [3] 栗田 治(1993):移動量の減衰函数に基づいた領域間距離の近似公式, No. 28, 都市計画論文集, pp. 391 - 396.
- [4] 栗田 治(2000):円盤領域における線形人口分布に関する平均距離-3次元都市の最適プロポーション解析への応用-, 都市計画論文集, No. 35, pp. 1015 - 1020.
- [5] 栗田 治(2001):多角形領域で一様に分布する点から固定点への直線距離の平均値と2次の積率-平均直線距離の等高線の描画法-, GIS-理論と応用, Vol. 9, No. 1, pp. 29-37.
- [6] 栗田 治, 腰塚武志(1988):領域間平均距離の近似理論とその応用. 都市計画論文集, No. 23, pp. 43-48.
- [7] 栗田 治, 腰塚武志(1989):周上で一様な点に関する平均値のある導出法とその応用, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1-B-2, pp. 38 - 39.
- [8] 森口繁一他(1960):『数学公式集III』, 岩波書店.
- [9] Alagar, V. S.(1976): The Distribution of the Distance Between Random Points, *Journal of Applied Probability*, Vol. 13, pp. 558 - 566.
- [10] Bouwkamp, C. J.(1977): On the Average Distance between Points in Two Coplanar Non-Overlapping Circular Disks. *Journal of Applied Science and Engineering A*, Vol. 2, pp. 183 - 186.
- [11] Erdelyi, A. et al.(1953): *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York.
- [12] Vaughan, R.(1984): Approximate Formulas for Average Distances Associated with Zones. *Transportation Science*, Vol. 18, pp. 231 - 244.

3. 道路パターンと距離分布の理論と実証

本節では、格子状道路パターンと放射・環状道路パターン(図3-1に例示)を取り上げ、各パターンが自然に与えるメトリックである直交距離と放射・環状距離を数学的に取り扱う。都市における移動の便利さに基づく距離モデルを構成する上では、もう一つ、直線距離もよく俎上に上せられる。そこでこれら三つの定式化を距離の分布という概念の導入によって比較することを試みよう。そのために円盤都市という規範的で汎用性の高い領域形状に特化して、一様な2点間の距離の確率密度函数を導く作法を解説する。そこで用いられる道具はCroftonの微分方程式(原典は[Crofton 1885]であり、[Kendall & Moran 1963], [腰塚 1977,1986], [Mathai 1999]等で解説されている)であるが、ここではこの方程式を一般論として述べるのではなく、平面上の円盤領域と一様な起・終点との関係において詳述することにより、読者の直観的な理解に資するものとした。さらに、起・終点がClark型分布(都心から離れるに連れて指数的に減衰する分布)に従う場合の放射・環状距離分布を(導出過程は割愛して)記し、これが東京圏の道路網上の距離分布を上手く再現する様子を示す。こうした成果により、道路基軸パターン、都市規模、起・終点分布の三者が移動エネルギーの消費水準に与える影響を演繹することが可能になるものと思われる。

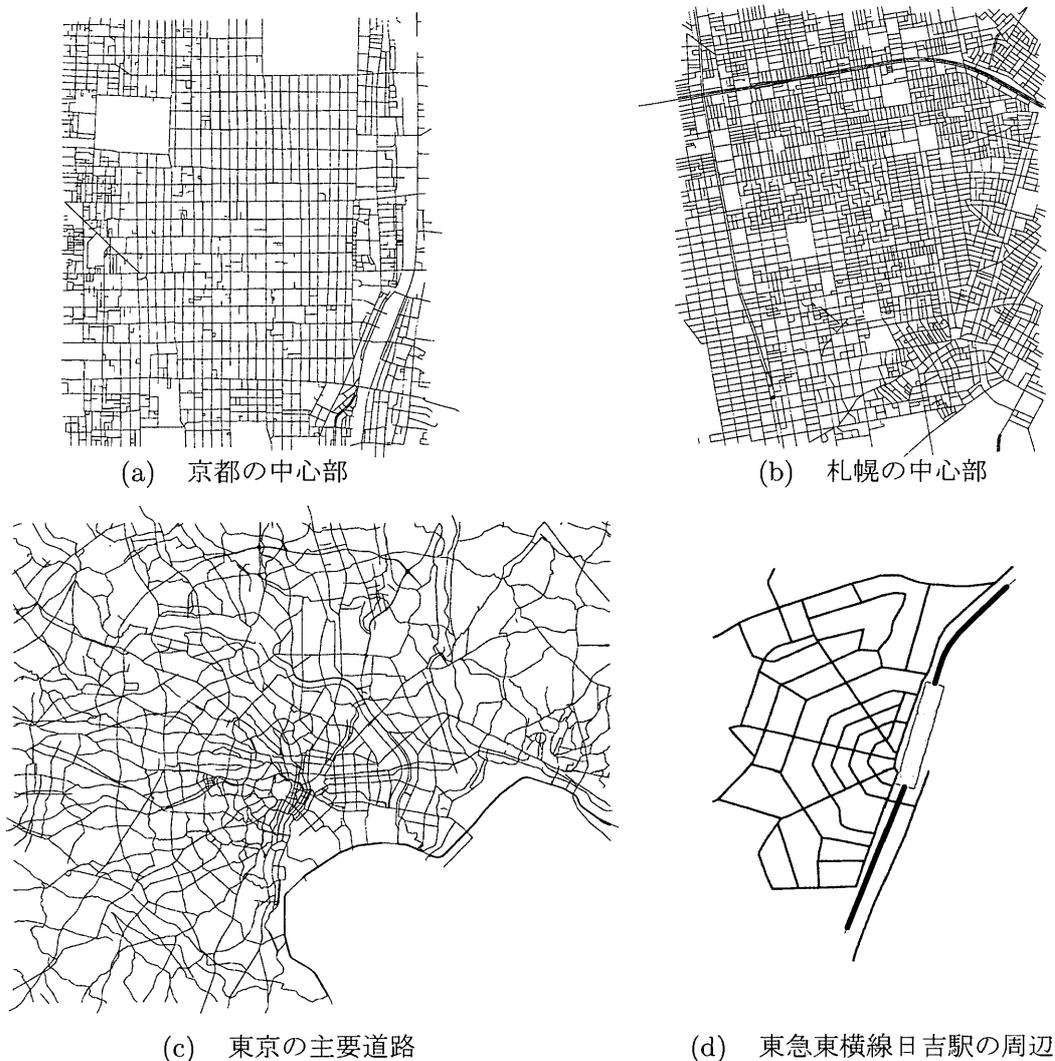
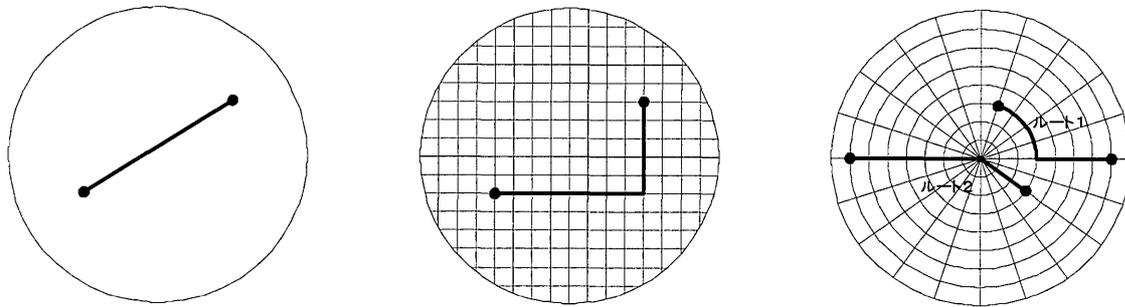


図3-1 わが国で見られる典型的な格子状道路と放射・環状道路のパターン。

3.1 円盤都市内の距離の数理モデル

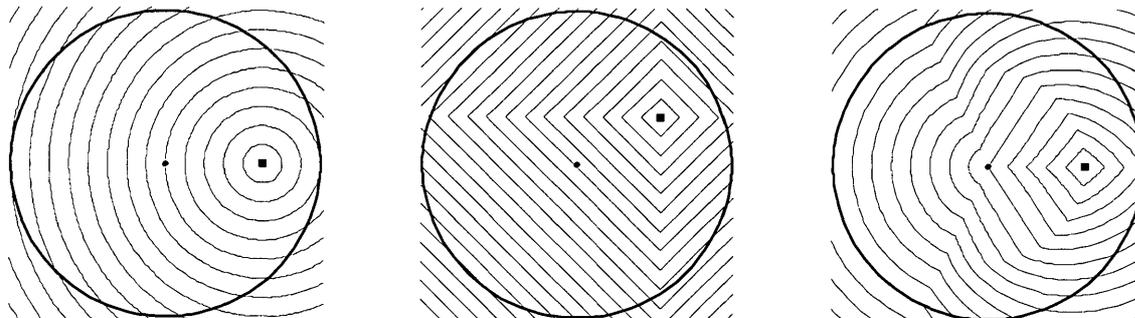
都市の平面を格子状や放射・環状の道路パターンで覆うことは、詰まるところ何を実現したことになるのか？このことを見通しの良い方法で議論しておけば、新都市の設計や都市改造の局面で役立てることが可能であろう。その一つの方法として、都市内に移動の起点・終点が一樣に分布している場合の起・終点間の距離の分布を導き観察してみたい。現実の都市においては、社会・経済活動の分布は一樣ではないし、2点間の距離が離れていればいるほど、その間の相互交通量は小さくなるのが常である。この現実を現実で分析の俎上に上せることができるが、ここでは、そうした偏りが無い理想的な状態で、地域の形状と交通網のパターンが純粋に生み出す都市の性質に迫りたいのである。しかも、この分布を得ておれば、それを重力モデル等と組み合わせることによって、現実に近い話に接近してゆくことも可能である [栗田 2003]。

ここでは、ルネッサンス期の理想都市の研究 [都市史図集編集委員会編 1999] 以来、都市設計のアイデアの出発点で頻りに想定されてきた円盤領域を導入し、まずは図3-1-(a)の如くにあらゆる方向に移動することができる状況を与える。都市工学研究において私達が距離に関係したモデルを作るときには、直線距離を前提とする場合も多い。それがモデルの解析学的な取り扱いを容易にするからである。また、道路上の最短経路の距離と直線距離の間には比較的安定した関係が存在することも、経験的に知られている [腰塚 & 小林 1983], [栗田 2001b], [松島 & 栗田 2003]。さらに、図3-2-(b)や図3-2-(c)の如くに道路が無限に稠密に存在する状況を考える。それぞれの場合の、固定点からの等高線の形状は図3-3の如きものとなる。



(a) 空想的道路網。(直線距離) (b) 格子状道路網。(直交距離) (c) 放射・環状道路網(放射・環状距離)

図3-2 直線距離モデルと2つの規範的道路パターン。



(a) 直線距離の等高線。 (b) 直交距離の等高線。 (c) 放射・環状距離の等高線

図3-3 3つの距離に対応する始点 (■) からの距離の等高線。

3.2 微分方程式で距離分布を求める

以下の円盤を対象とした Crofton の微分方程式の誘導は [栗田 2004b] によるものである。

半径 α の円盤上で一様な 2 点間の距離を U とし, その確率密度関数 $f(u)$ を, 便宜上 $f(u, \alpha)$ と書き直す (U の種類は如何様でもよい). その半径 α による微係数 $\frac{d}{d\alpha} f(u, \alpha)$ を導こう. そのために, まず半径の増分 $\Delta\alpha$ を設け, 半径 $\alpha + \Delta\alpha$ の円盤 C 上で一様に分布する 2 点間の距離分布 $f(u, \alpha + \Delta\alpha)$ に着目する. そして図 3-4 のように, 半径 α の円盤領域を A (面積は $S = \pi\alpha^2$), 外側の微小リング領域を B (面積は $\Delta S = \pi\{2\alpha\Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2\}$) と呼ぶことにする. すなわち $C = A \cup B$ である.

さて, 円盤領域 C 上の 2 点間の移動は, (1) $A \rightarrow A$ の内内移動, (2) $A \rightarrow B$ と $B \rightarrow A$ の移動, (3) $B \rightarrow B$ の内内移動, という 3 者に直和分解される (図 3-5). それぞれの測度 (始点・終点ペアの量) は当然 (1) S^2 , (2) $2S\Delta S$, (3) $(\Delta S)^2$ である (表 3-1 の第 2 列). これを全体の測度 (円盤 C 上の始・終点ペアの総量) $(S + \Delta S)^2$ で除せば, 3 種類の移動が全測度に占める割合が求められる (表 3-1 の第 3 列).

ここで, 幅 $\Delta\alpha$ のリング B 上で一様に分布する点と, 半径 α の円盤 A 上で一様に分布する点の間の直線距離の確率密度関数を $g(u, \alpha, \Delta\alpha)$ と定義する. 加えて, リング B 上で一様に分布する 2 点間の距離の確率密度関数を $h(u, \alpha, \Delta\alpha)$ と定義する (表 3-1 の第 4 列) そして, $f(u, \alpha + \Delta\alpha)$ を $f(u, \alpha)$, $g(u, \alpha, \Delta\alpha)$ ならびに $h(u, \alpha, \Delta\alpha)$ の加重和で表現してみよう. そのためには直和分解された始・終点ペア集合に対応する確率密度関数に, 前出の, 全測度に占める割合を乗じて足せばよい:

$$f(u, \alpha + \Delta\alpha) = \frac{S^2}{(S + \Delta S)^2} f(u, \alpha) + \frac{2S\Delta S}{(S + \Delta S)^2} g(u, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{(S + \Delta S)^2} h(u, \alpha, \Delta\alpha). \quad (3.1)$$

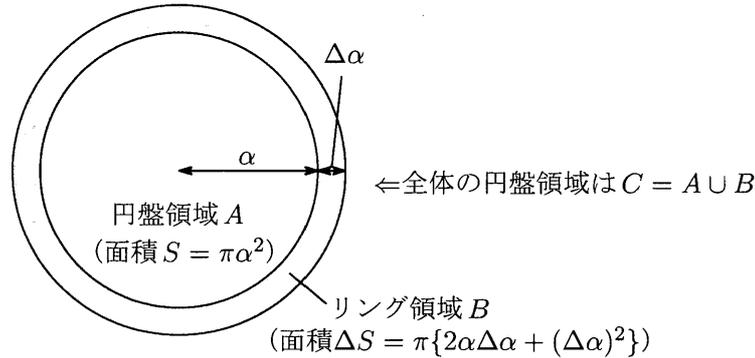


図 3-4 半径 α の円盤領域 A と半径の増分 $\Delta\alpha$ によって出来る微小リング領域 B .

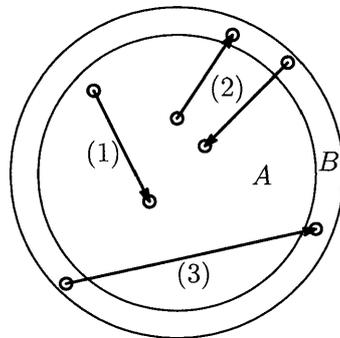


図 3-5 円盤領域 C 内の移動の直和分解: (1) $A \rightarrow A$; (2) $A \rightarrow B$ と $B \rightarrow A$; (3) $B \rightarrow B$.

表3-1 C^2 の A^2 , $A \times B \cup B \times A$, $B \times B$ への直和分解と, 対応する U の確率密度函数.

起・終点ペアの種類	ペアの量(測度)	全測度に占める割合	U の確率密度函数
(1) $A \times A$	S^2	$\frac{S^2}{(S + \Delta S)^2}$	$f(u, \alpha)$
(2) $A \times B \cup B \times A$	$2S\Delta S$	$\frac{2S\Delta S}{(S + \Delta S)^2}$	$g(u, \alpha, \Delta\alpha)$
(3) $B \times B$	$(\Delta S)^2$	$\frac{(\Delta S)^2}{(S + \Delta S)^2}$	$h(u, \alpha, \Delta\alpha)$
(全体) $C^2 = (A \cup B)^2$	$(S + \Delta S)^2$	1	$f(u, \alpha + \Delta\alpha)$

(3.1)式の両辺に $(S + \Delta S)^2$ を乗じた上で変形すると次式を得る:

$$f(u, \alpha + \Delta\alpha) - f(u, \alpha) = -\frac{2S\Delta S + (\Delta S)^2}{S^2} f(u, \alpha + \Delta\alpha) + \frac{2\Delta S}{S} g(u, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{S^2} h(u, \alpha, \Delta\alpha).$$

この両辺を $\Delta\alpha$ で除して, 右辺の確率密度函数の係数を K , L , M とおく:

$$\begin{aligned} \frac{f(u, \alpha + \Delta\alpha) - f(u, \alpha)}{\Delta\alpha} &= -\frac{2S\Delta S + (\Delta S)^2}{S^2\Delta\alpha} f(u, \alpha + \Delta\alpha) + \frac{2\Delta S}{S\Delta\alpha} g(u, \alpha, \Delta\alpha) + \frac{(\Delta S)^2}{S^2\Delta\alpha} h(u, \alpha, \Delta\alpha) \\ &= Kf(u, \alpha + \Delta\alpha) + Lg(u, \alpha, \Delta\alpha) + Mh(u, \alpha, \Delta\alpha). \end{aligned}$$

ここで $\Delta\alpha \rightarrow 0$ とするときの, 各係数の収束先を, $S = \pi\alpha^2$, $\Delta S = \pi\{2\alpha\Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2\}$ に注意しつつ計算すると次の通りである:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{2\pi(2\alpha + \Delta\alpha)}{S} - \frac{\pi^2\Delta\alpha(2\alpha + \Delta\alpha)^2}{S^2} \rightarrow -\frac{4\pi\alpha}{S} = -\frac{4}{\alpha}, \\ L &= \frac{4}{\alpha} + \frac{2\Delta\alpha}{\alpha^2} \rightarrow \frac{4}{\alpha}, \\ M &= \frac{\Delta\alpha(2\alpha + \Delta\alpha)^2}{\alpha^4} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{f(u, \alpha + \Delta\alpha) - f(u, \alpha)}{\Delta\alpha} &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} f(u, \alpha), \\ g(u, \alpha, \Delta\alpha) &\rightarrow g(u, \alpha, 0) \end{aligned}$$

である. こうして, 一階線形微分方程式

$$\frac{d}{d\alpha} f(u, \alpha) = -\frac{4}{\alpha} f(u, \alpha) + \frac{4}{\alpha} g(u, \alpha, 0)$$

を得る. $\Delta\alpha = 0$ であるから, $g(u, \alpha, 0)$ は「半径 α の円周上で一様な点と, 円盤上で一様な点の間の距離 U の確率密度函数」を意味することが分かる. そして, もはや $\Delta\alpha$ は登場しないので, これを簡単に $g(u, \alpha)$ と記して, 書き直しておこう:

【円盤上で一様な2点に関するCroftonの微分方程式】

$$\frac{d}{d\alpha} f(u, \alpha) = -\frac{4}{\alpha} f(u, \alpha) + \frac{4}{\alpha} g(u, \alpha). \quad (3.2)$$

あとは $g(u, \alpha)$ を特定した上で、この微分方程式を解けばよい。

これは Crofton の微分方程式という更に一般的な微分方程式の一類型である。Crofton の微分方程式については [腰塚 1977] に詳しい。その心意(こころ)は、「多様体上に分布する点に関する積分で定義される指標を、一点が多様体の境界上に位置するものとして算出した結果(上述の $g(u, \alpha)$ がそれに当たる)を定数項として持つ、多様体のスケール・パラメータに関する一階線形微分方程式を解いて求める」点にある。特に球体内で一様な点に関しては、一点を球面上に固定した指標の算出が容易である場合が多いので、威力を発揮しやすい。ここでいう球体とは一次元区間、円盤、球、超球である。

なお、 $g(u, \alpha)$ が“周上の任意の位置に固定した1点から円盤上に分布する点への距離の確率密度関数である”と見做せるためには、回転対称性の高い距離である必要がある。その様な距離の例としては、直線距離と放射・環状距離がある。

3.2.1 直線距離と放射・環状距離の分布の導出

現実問題に応じて Crofton の微分方程式を立てるには、前述の通り、まずは円周上に固定された点から円盤内で一様な点への距離分布 $g(u, \alpha)$ を同定すればよい。そのためには、円周上の任意の固定点からの距離の等高線を特定し、等高線内の点の測度によって U の累積分布関数を特定すればよい(図3-6, 図3-7に様子を示す)。それを微分すれば確率密度関数 $g(u, \alpha)$ を得る。

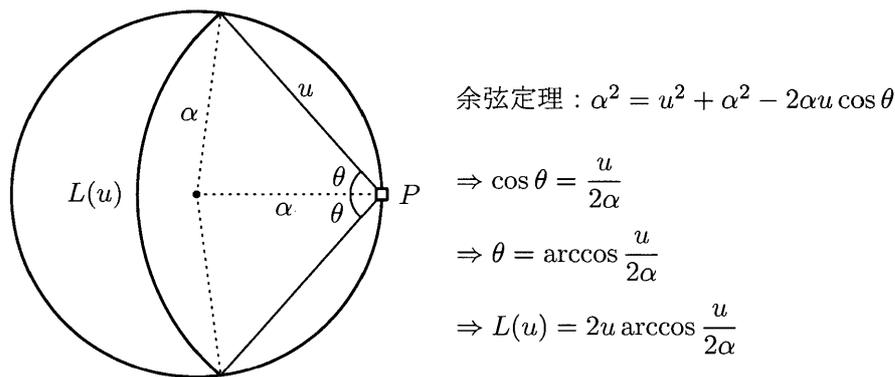


図3-6 円周上の固定点 P からの等高線は半径 u の円周。

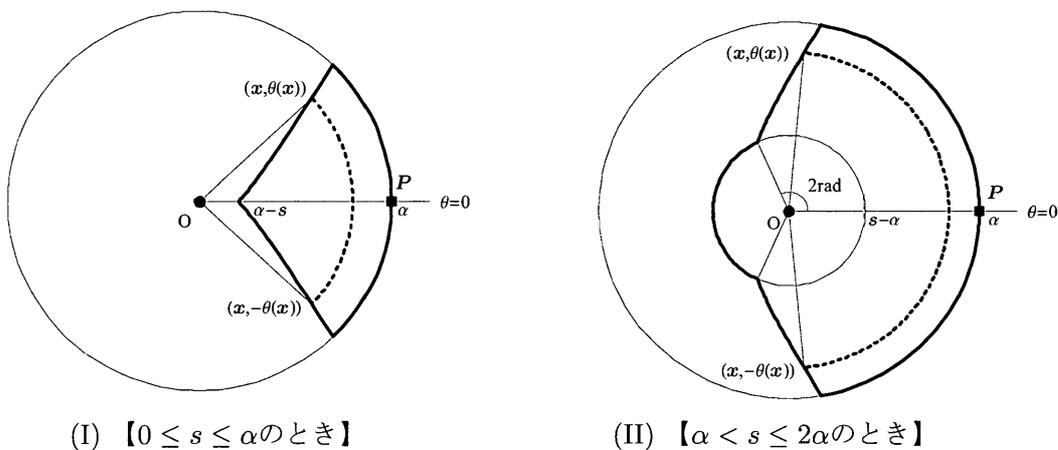


図3-7 周上の起点 $(\alpha, 0)$ からの放射・環状距離 S の等高線。

紙面の都合で詳細は割愛するが、 g を同定した上で Crofton の微分方程式を境界条件にしたがって解くと、以下の二つの結果を得る。

【直線距離 U の確率密度関数】

まず半径 α の円盤上で一様に分布する 2 点間の直線距離を U とすると、その確率密度関数 $f(u)$ は次式で与えられる [腰塚,1977],[腰塚,1986] :

$$f(u) = \frac{4u}{\pi\alpha^2} \arccos \frac{u}{2\alpha} - \frac{u^2}{\pi\alpha^4} \sqrt{4\alpha^2 - u^2}. \quad (0 \leq u \leq 2\alpha) \quad (3.3)$$

【放射・環状距離 S の確率密度関数】

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$\psi(s) = \frac{(2\pi - 11)s^3 + 12\alpha^2 s}{3\pi\alpha^4}, \quad (3.4)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$\psi(s) = \frac{(5 - 2\pi)s^3 + 12(\pi - 3)\alpha^2 s + 8(4 - \pi)\alpha^3}{3\pi\alpha^4}. \quad (3.5)$$

加えて、これもプロセスは割愛するが円盤上の直交距離 R の分布は次の通りである [栗田 2004b].

【直交距離 R の確率密度関数】

(i) $0 \leq r \leq 2\alpha$ のとき

$$\phi(r) = \frac{4}{\pi} \int_{r/\sqrt{2}}^r \frac{f(u)}{\sqrt{2u^2 - r^2}} du, \quad (3.6)$$

(ii) $2\alpha < r \leq 2\sqrt{2}\alpha$ のとき

$$\phi(r) = \frac{4}{\pi} \int_{r/\sqrt{2}}^{2\alpha} \frac{f(u)}{\sqrt{2u^2 - r^2}} du. \quad (3.7)$$

表 3-2 円盤内距離に関する特性値の一覧.

変数	平均値	2乗平均値	分散
直線距離 U	$\frac{128}{45\pi}\alpha \simeq 0.9054\alpha$	α^2	$\left\{1 - \left(\frac{128}{45\pi}\right)^2\right\}\alpha^2 \simeq (0.4245\alpha)^2$
直交距離 R	$\frac{512}{45\pi^2}\alpha \simeq 1.1528\alpha$	$\frac{\pi + 2}{\pi}\alpha^2$	$\left\{\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) - \left(\frac{512}{45\pi^2}\right)^2\right\}\alpha^2 \simeq (0.5547\alpha)^2$
放射・環状距離 S	$\frac{20\pi - 16}{15\pi}\alpha \simeq 0.9938\alpha$	$\frac{17\pi - 20}{9\pi}\alpha^2$	$\frac{1}{9}\left\{1 + \frac{28}{5\pi} - \left(\frac{16}{5\pi}\right)^2\right\}\alpha^2 \simeq (0.4403\alpha)^2$
直交-直線比 $\frac{R}{U}$	$\frac{4}{\pi} \simeq 1.273$	$1 + \frac{2}{\pi}$	$1 + \frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi^2} \simeq 0.1244^2$
放環-直線比 $\frac{S}{U}$	1.118	1.257	0.0795 ²

3.3 道路基軸パターンの比較

前出の3つの確率密度函数(3.3), (3.4)と(3.5), (3.6)と(3.7)を示すのが図3-8である. 分布の裾が, 直線距離→放射・環状距離→直交距離, の順に重くなっているのが分かる. 特に, 直交距離の分布範囲(レンジ)が放射・環状距離のそれよりも広く, 分布の裾も重いことは示唆的である. これは, 広域圏の道路機軸パターンとして格子状道路が適切でないことを意味している. これを標語的にまとめると次の通りである:

1. 近隣同士を結びつける機軸道路パターンとしては, 距離の高が知れているので(敷地計画に良い見通しを与えるという美德を持つ)格子状が良い.
2. 広域圏の移動を受け持つ機軸道路パターンとしては, 移動の効率性を担保するために放射・環状が良い.

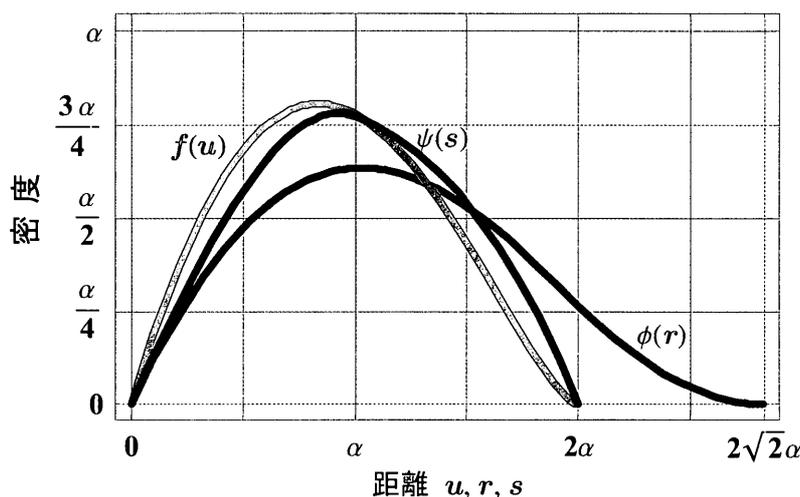


図3-8 円盤内の3つの距離の確率密度函数.

3つの距離の特性値を表3-2に示す. 平均値と分散の双方について, 直線距離→放射・環状距離→直交距離の順に大きくなっている. 特に平均値については $\langle R \rangle / \langle U \rangle = 4/\pi \approx 1.2732$, $\langle S \rangle / \langle U \rangle = 3(5\pi - 4)/32 \approx 1.0976$ が成り立つ. すなわち, 一樣な2点間の平均直交距離は平均直線距離の約1.27倍であり, 平均放射・環状距離は平均直線距離の約1.10倍である. 平均距離や総距離を, (道路上の距離ではなく)直線距離で測るときの後ろめたさが, 一応数値的に把握できるのである. なお, この種の分析については詳しくは[腰塚 & 小林 1983]を参照せられたい. そこでは矩形盤上の直線距離と直交距離の分布が記述されている.

さらに, 表3-2の下部の結果から, 直交距離と直線距離の比の平均値は $\langle R/U \rangle = \langle R \rangle / \langle U \rangle \approx 1.2732$ である(比の平均値と平均値の比が一致する特異な例). また放射・環状距離と直線距離の比の平均値の方は, 数値積分により $\langle S/U \rangle \approx 1.118$ である. バラツキの具合を見ると, R/U の標準偏差が0.124(変動係数は0.098)であり, S/U の標準偏差が0.080(変動係数は0.071)である. 比は, かなり安定しているのである.

直線距離は, いわば“平面上のあらゆる距離の第0次近似”であり, これを用いると様々な計測やモデル分析が簡便に行われることは言うまでもない. しかし, これがあくまでも近似に過ぎないことには留意せねばならない. この留意の仕方を表3-2の結果から読みとった訳である. ここで, 前述の比のバラツキが比較的にかさい点に着目すれば, 道路距離を直線距離で近似することは(少なくとも実用的な観点からは)致命的ではなさそうである.

3.4 Clark 型起・終点分布の下での放射・環状距離分布と東京圏での実証

前述の Crofton の微分方程式を用いれば、起・終点が Clark 型の回転対称な人口分布に従うときの、放射・環状距離の分布を明示的に導くことも可能である [栗田 2003].

円盤の中心点からの距離を x として、人口分布 ρ が $\rho(x) \propto e^{-\gamma x}$ と与えられるものとする。これは C. Clark が大都市の人口分布に良く適合する経験式として提唱したものである [Clark 1951]. トリップの起点と終点がともに同一の Clark 型分布に従うものとして、Crofton の微分方程式によって放射・環状距離の確率密度関数を求めることができる [栗田 2004a] :

【円盤上の Clark 型人口分布に対する放射・環状距離 S の確率密度関数】

(i) $0 \leq s \leq \alpha$ のとき

$$f(s) = \frac{\gamma}{12\pi(1 + \gamma\alpha - e^{\gamma\alpha})^2} \left[6 + 12\gamma\alpha - 6e^{\gamma s}(1 + 2\gamma\alpha) + \gamma e^{\gamma(2\alpha-s)} \left\{ 6 + 9\gamma s + 2(\pi - 2)\gamma^2 s^2 \right\} \right], \quad (3.8)$$

(ii) $\alpha < s \leq 2\alpha$ のとき

$$f(s) = \frac{\gamma}{12\pi(1 + \gamma\alpha - e^{\gamma\alpha})^2} \left[6(1 + 2\gamma\alpha) - e^{\gamma(2\alpha-s)} \left\{ 6 + 6\gamma s + 3\gamma^2(s^2 - 4\alpha^2) + 2\gamma^3(\pi - 2)(s^3 - 6\alpha^2 s + 4\alpha^3) \right\} \right]. \quad (3.9)$$

減衰係数 γ を -0.12 から $+0.12$ まで、 0.04 刻みで変化させて、放射・環状距離の確率密度関数を描き分けたのが図 3-9 である。 γ が正 [負] のとき、都心から離れるに連れて人口密度が減少 [増大] する。当然、 γ が小さいほど (都市人口モデルの言葉で言えばスプロールが進むに連れて) 距離分布の裾が重くなる様子が読み取れる。

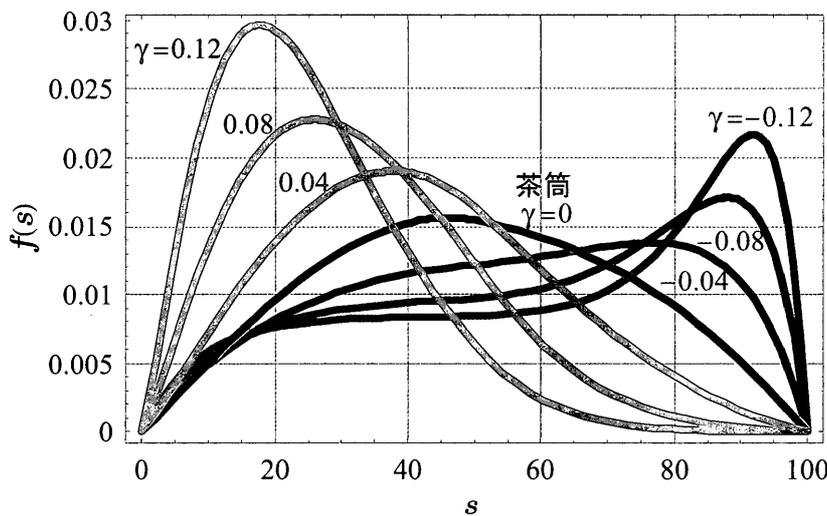


図 3-9 指数型人口分布に対する放射・環状距離 S の確率密度関数.

以上は Clark 型の起・終点分布を前提とする放射・環状距離分布の理論解であった。これがどの程度現実を再現できているのかに興味がある。その再現性がある水準以上であれば、(回転対称

な人口分布を前提とする) 基軸道路パターンへの設計 (即ち都市の骨格の設計) が、移動エネルギー消費に与える影響を巨視的に把握することが可能となるからである。このことを確かめるために、東京の皇居を中心とする30km圏を取り出し、この圏域内部での道路距離の分布を計算する。

そのための道路網データとして「数値地図2500」が含む幅員5.5m以上の道路 (図3-10) を用いる。人口分布は、2000年の5kmメッシュ人口データで与える。これは1kmの基準メッシュ夜間人口データを $5 \times 5 = 25$ 個足し上げて作成した。そして、異なる5kmメッシュ間のトリップ数は、各メッシュの人口同士を掛け合わせた量に比例して与えられるものと想定する。即ち、起・終点の人口に比例してトリップが発生すると考えるのである。ただし、メッシュの中心点を、メッシュ内に含まれる道路の最寄の地点に割り当てる (図3-10中の点)。

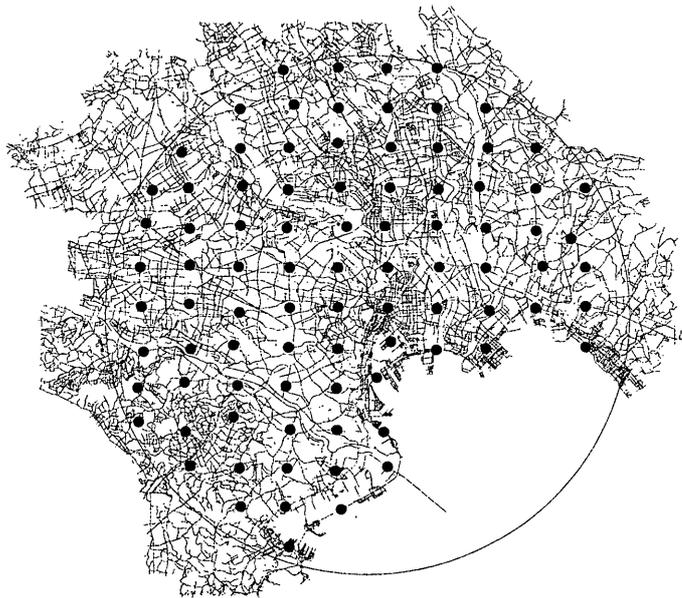


図3-10 幅員5.5m以上の道路と皇居を中心とする半径30kmの円盤。
(移動の起・終点は5km間隔の格子点に最寄の道路上の点で与える)

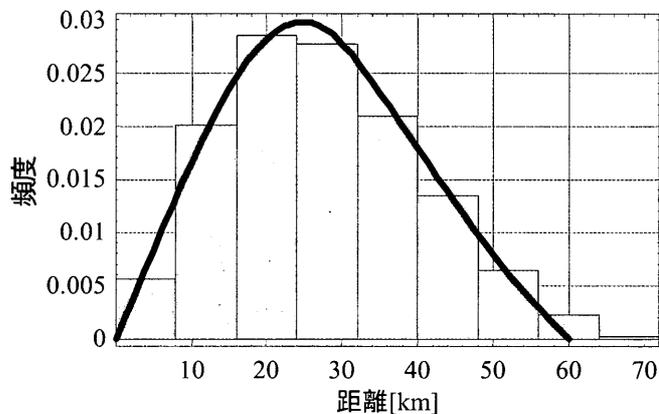


図3-11 幅員5.5m以上の道路を用いた半径30kmの円盤内距離のヒストグラムと $\gamma = 0.0412$ とした放射・環状距離の確率密度函数 (5km格子の起・終点にメッシュ人口データで重み付け)。

割り当てられた点同士の、道路上の最短経路の距離を地理情報システム SIS によって算出し、5km メッシュ間の道路距離として計上しよう。このときの距離のヒストグラムを図 3-11 に示す。

皇居を中心とする 35km で 2km メッシュ人口データを用いて、Clark 型人口分布のパラメタを求めると、 $\rho(x) = 18749e^{-0.0412x}$ (単位は [人/km²]) であることが分かっている ([栗田 2004b] の第 8 章)。すなわち $\gamma = 0.0412\text{km}^{-1}$ とすればよい。このときの放射・環状距離分布を (3.4), (3.5) 式によって描くのが図 3-11 の曲線である。一見して、放射・環状距離の理論分布が持つ再現性がかなり良いことが理解できる。

道路の基軸パターンの設計と人口分布の有り様が、結果として如何なるサービス水準を住民に与えるか。これを数理的に追求するための一つの基礎がこの辺りにありそうである。

3.5 3 節の参考文献

- [1] 腰塚武志 (1977) : 『都市平面の基礎的研究』, 東京大学都市工学科博士論文.
- [2] 腰塚武志 (1986) : 都市平面における距離の分布, (谷村秀彦他, 『都市計画数理』, 朝倉書店).
- [3] 腰塚武志, 小林純一 (1983) : 道路距離と直線距離, 日本都市計画学会学術研究発表会論文集, No. 18, pp. 43 - 48.
- [4] 栗田 治 (2001a) : 円盤都市における道路パターンの理論—直線距離, 直交距離ならびに放射・環状距離の分布—, 都市計画論文集, No. 36, pp. 859 - 864.
- [5] 栗田 治 (2001b) : 東京道路網における道路距離と理論的距離, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1-C-7, pp. 64 - 65.
- [6] 栗田 治 (2003) : 連続型重力モデルの下での距離分布の理論, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1-C-7, pp. 168 - 169.
- [7] 栗田 治 (2004a) : 回転対称な起・終点分布の下での放射・環状距離分布—Crofton の微分方程式の新しい応用例—, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp. 322 - 323.
- [8] 栗田 治 (2004b) : 『都市モデル読本』 (造形ライブラリー 05), 共立出版.
- [9] 松島裕久, 栗田 治 (2003) : 東京道路網に関する距離モデルの実証分析, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, 2-C-2, pp. 166 - 167.
- [10] 都市史図集編集委員会編 (1999) : 『都市史図集』, 彰国社.
- [11] Clark, C. (1951): Urban Population Density, *Journal of Royal Statistical Society, Series A*, Vol. 114.
- [12] Crofton, M. W. (1885): Probability, In *Encyclopaedia Britannica*, 9-th edition, Vol. 19, pp. 768-788.
- [13] Kendall, M. G. and P. A. P. Moran (1963): *Geometrical Probability*, Charles Griffin & Company Limited, London.
- [14] Mathai, A. M. (1999): *An Introduction to Geometrical Probability*, Gordon and Breach Science Publishers.

4. 建築物の連絡通路と距離分布

前節までは都市内距離に関するモデル分析であった。本節ではビルを巡る人の動きを距離の面から分析するORモデルを取り上げよう。具体的には、2つのビルとそれを結ぶ高架連絡通路を想定する。そしてビル間を往き来する人々の移動に着目し、その距離分布(すなわち移動エネルギーの消費水準の全貌)や適切なる連絡通路の高さを議論の対象とするのである。本節のモデルは垂直方向に移動の起・終点が分布すると想定しているが、ビルを90度寝かせれば、本モデルは直ちに川で分断された2つの地域を橋によって往き来するモデルに変貌する。鉄道で分断された地域を踏みきりで結びつけるモデルとも解釈できる。単純なモデルではあるが、その分析作法が包含する現実の思いの外多いのである。

4.1 定式化

図4-1の如き高さ H のツインビルを高さ h のデッキで結ぶものとする。 $0 \leq h \leq H$ である。このような通路は都市の商業施設(例えば渋谷西武百貨店、二子玉川高島屋など)やオフィス住居系高層ビル(例えば東京都中央区築地の聖路加タワー)に見られる。また、都心駅の駅前で多くのビル同士を結びつけるペDESTリアンデッキも、こうした連絡通路の一類型と見做せる。

図4-1の様に地表を原点とする鉛直方向上向きの座標軸を設け、ビルAの移動端点を x とし、ビルBの移動端点を y とする。点 x と点 y の間の移動者にとって便利なデッキ高を追求したいのである。

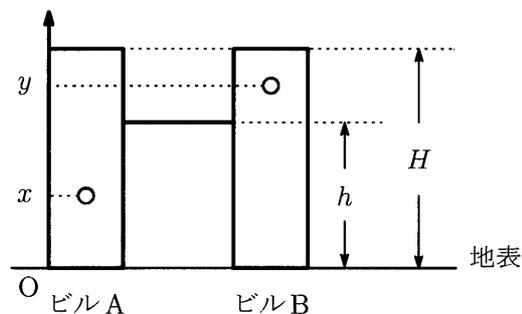


図4-1 高さ H のツインビルと高さ h のデッキ。
(ビルAの位置 x とビルBの位置 y)

x と y を結ぶ経路は、図4-2の如くに2通りある：経路1が地表を経由する経路で、経路2がデッキを経由する経路。ただし、これら経路の共通部分すなわち水平方向の移動距離は、デッキの位置 h に依存しない。そこで、経路1と経路2の鉛直方向の移動距離 r_1 ならびに r_2 に着目することにしよう：

$$\begin{aligned} r_1 &= x + y, \\ r_2 &= |h - x| + |h - y|. \end{aligned}$$

移動者は当然これら2つのうちの小さな値を持つ経路を選択するだろう。すなわち、 x, y 間の鉛直方向移動距離を r とすると次の通りである：

$$r = \min\{r_1, r_2\}.$$

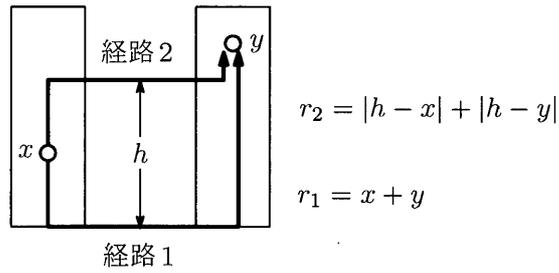


図4-2 ビルAの位置 x とビルBの位置 y を結ぶ2つの経路(2つのうち短い方が選ばれるものとする). 各経路の鉛直方向の移動距離を各々 r_1 , r_2 と定義する(水平方向の移動距離はデッキの位置 h とは無関係なので殊更には考えない).

このような次第であるから, 詰まるところ, (x, y) に応じて r_1 と r_2 の大小関係を吟味して r を記述すればよい. これを具体的に行うと, (x, y) が図4-3のI~Vのどの領域に含まれるによって r が記述され尽くすことが分かる:

- $(x, y) \in \text{I}$ のとき $r = x + y,$
- $(x, y) \in \text{II}$ のとき $r = 2h - x - y,$
- $(x, y) \in \text{III}$ のとき $r = x + y - 2h,$
- $(x, y) \in \text{IV}$ のとき $r = -x + y,$
- $(x, y) \in \text{V}$ のとき $r = x - y.$

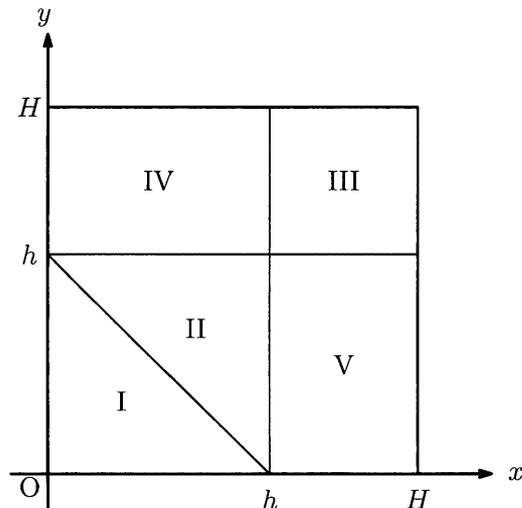


図4-3 x, y 間鉛直距離の場合分け.

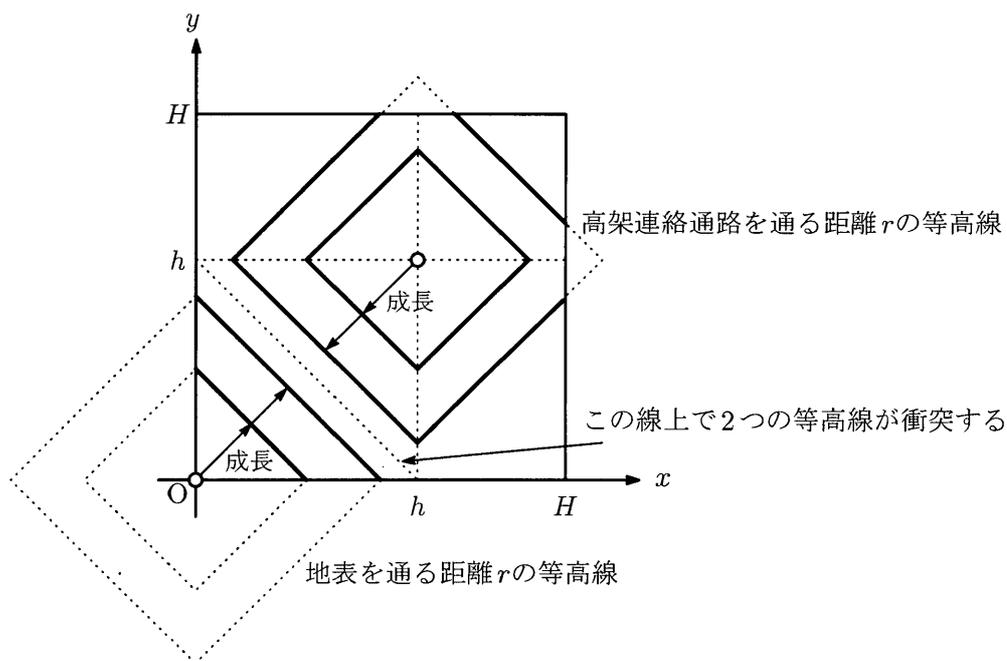


図4-4 鉛直距離 r の等高線.

4.2 鉛直距離 r の確率密度関数の導出

いま簡単に x と y が独立に $[0, H]$ の一様分布に従うものとして、距離 r の確率密度関数を導いてみよう。そのために、まずは図4-4に示すように、直交座標の $(x, y) = (0, 0)$ なる点(地表移動の距離がゼロである起・終点ペアに対応)と $(x, y) = (h, h)$ なる点(鉛直方向の移動距離がゼロである起・終点ペアに対応)に着目する。距離 r がゼロからスタートして漸増してゆくと、 r の等高線は、図4-4中の $(0, 0)$ と (h, h) の各各を中心とする、 45° 傾いた正方形(ただし対角線長は $2r$)で与えられる。これに基づいて、距離 r の累積分布関数を算出し、それを微分すれば確率密度関数が得られる。ただし、そのような面倒なことをせずとも、等高線の周長(図4-4の太線部分の長さ) $L(r)$ さえ計測すれば、[栗田 2004]の

$$\text{【距離分布の公式】 } f(r) = \frac{L(r)}{\sqrt{2}H^2} \quad (4.1)$$

を適用することによって、簡便に距離分布 $f(r)$ が与えられる。ただし、図4-4を見れば分かる通り、2つの 45° 傾いた正方形は成長してゆくのに連れて、(i)正方形 $[0, H]^2$ とあちらこちらで衝突すると共に、(ii)成長する正方形同士も互いに衝突する。このことに着目して $L(r)$ の r の範囲による場合分けを慎重に行わねばならない。これを行うと、以下の様に3通りに場合分けされて距離の密度関数 $f(r)$ が導出される。

(イ) $0 \leq h < \frac{H}{2}$ のとき

$$f(r) = \begin{cases} \frac{5r}{H^2} & (0 \leq r < h), \\ \frac{2h+r}{H^2} & (h \leq r < H-h), \\ \frac{4H-2h-3r}{H^2} & (H-h \leq r < H), \\ \frac{2H-2h-r}{H^2} & (H \leq r < 2(H-h)). \end{cases}$$

(ロ) $\frac{H}{2} \leq h \leq \frac{2H}{3}$ のとき

$$f(r) = \begin{cases} \frac{5r}{H^2} & (0 \leq r < H-h), \\ \frac{4H-4h+r}{H^2} & (H-h \leq r < h), \\ \frac{4H-2h-3r}{H^2} & (h \leq r < 2(H-h)), \\ \frac{2H-2r}{H^2} & (2(H-h) \leq r < H). \end{cases}$$

(ハ) $\frac{2H}{3} \leq h \leq H$ のとき

$$f(r) = \begin{cases} \frac{5r}{H^2} & (0 \leq r < H-h), \\ \frac{4H-4h+r}{H^2} & (H-h \leq r < 2(H-h)), \\ \frac{2H-2h+2r}{H^2} & (2(H-h) \leq r < h), \\ \frac{2H-2r}{H^2} & (h \leq r < H). \end{cases}$$

以上の確率密度函数を示すのが図4-5である。ここではビル高さを $H = 10$ として (i) に $h = 0 \sim 5$ の, (ii) に $h = 5.5 \sim 10$ の概形を, 0.5刻みで描いた。これを観ると最初のうちはデッキ高 h の増加に伴って分布の裾が軽くなるが, あるレベルを過ぎると h の増加に連れて逆に分布の裾が重くなってゆく。つまり $[0, H]$ の間に最適デッキ高が存在するのである。そこで, 平均鉛直距離 $\langle r \rangle$ を算出すると

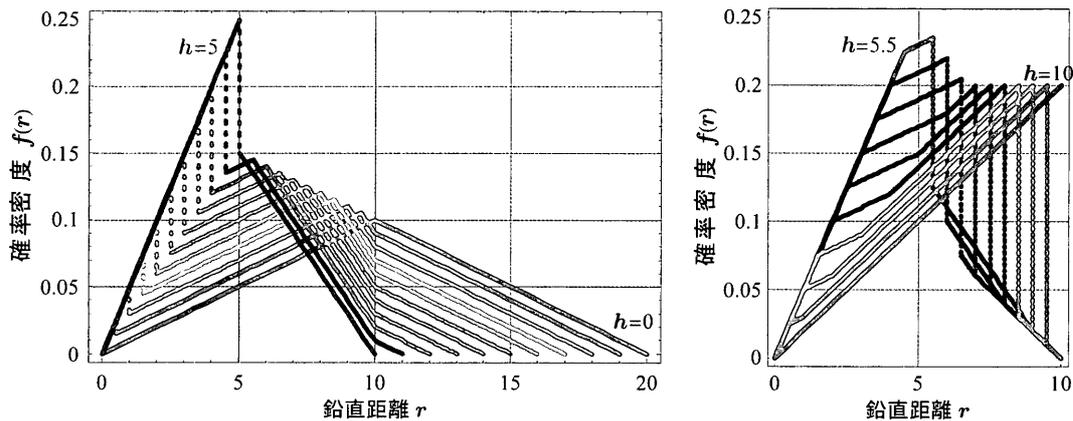
$$\langle r \rangle = -\frac{h^3}{3H^2} + \frac{2h^2}{h} - 2h + H \quad (4.2)$$

となる (前出の (イ), (ロ), (ハ) いずれの場合も結果は同じ)。ここから $\langle r \rangle$ を最小にする解が

$$h^* = (2 - \sqrt{2})H \simeq 0.586H \quad (4.3)$$

で与えられることが分かる。平均鉛直距離を最小化するデッキ高はビル高の約6割なのである。

一方, r のミニマックス問題を解くと, 解は $H/2 \leq h \leq H$ で不定となる (目的函数値は H)。したがって, ミニサム型の解がミニマックス型の解を兼ねていることが理解される。



(i) $h = 0 \sim 5$ (0.5 刻み)

(ii) $h = 5.5 \sim 10$ (0.5 刻み)

図 4-5 鉛直距離 u の確率密度 (ビル高さ $H = 10$ の例).

さらに一般的に、高さ h_1, h_2, \dots, h_n にデッキを同時に設けるとして平均鉛直距離を最小化すると次の如き等間隔配置の最適解を得る (算出過程は割愛する) :

$$h_1^* = \frac{2n - \sqrt{2}}{2n^2 - 1} H,$$

$$h_i^* = i h_1^* \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

4.3 発展モデル

本節で取り上げた問題の構造は都市空間や建築空間の其処此処に存在している。したがって、本章のモデルは実に様々に応用可能である。キーポイントは

- (1) 2つの区間の起・終点を直交座標を用いて表現し、移動距離の定式化に役立てること
- (2) 距離分布公式に基づいてシステムティックに距離の分布を算出すること
- (3) 起・終点が一様でない場合には累積分布関数を積分計算で求めること

とまとめられるだろう。

具体的な応用研究としては、地域を結ぶ橋の本数と迂回の是正度合いのモデル [大澤 1986]、地域を結ぶ橋の逐次的な添加計画の立案 [岡本 & 栗田, 1998]、駅構内の連絡通路の最適設計に関するモデル分析 [岡本 1999]、[井関 1995] といった内容がある。さらに、扇状地の様に複数の川が並行しているときの橋のモデルも本章のモデルの組み合わせで作成できる。

最後に、これら発展モデルの中から、多くのビル同士を結びつけるペDESTリアンデッキや高架デッキの最適設計 [栗田 & 市川 2003] という話題を紹介する。

現実の駅周辺オフィス空間の再開発などを観ると、駅レベルのペDESTリアンデッキが多用されている。これは多くのビル同士を一定高さで結びつける連絡通路と見做せる。そこで、高さ l の駅レベルのローデッキ (l は固定) と高さ h のハイデッキを併設するアイデアを呈示しよう (図 4-6)。ただし、同図の直方体は同じ高さ H で林立するビル群を表している。ビル一つ一つを別個に定式化するのではなく、一辺 L の正方形領域に高さ H で林立する多くのビルの内部空間を $L \times L \times H$ と

いう体積を持つ直方体で表現しようというのである。この直方体都市モデルは[腰塚 1995]で初めて提唱され、[栗田 & 腰塚 2001]、[栗田 2001]、[栗田 & 市川 2003]で種々のバリエーションが展開されている。

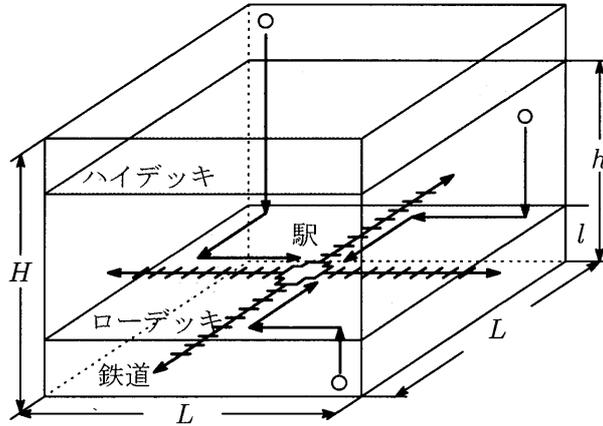


図4-6 ハイデッキと駅レベル(高さ l)のローデッキを伴う直方体オフィス都市。

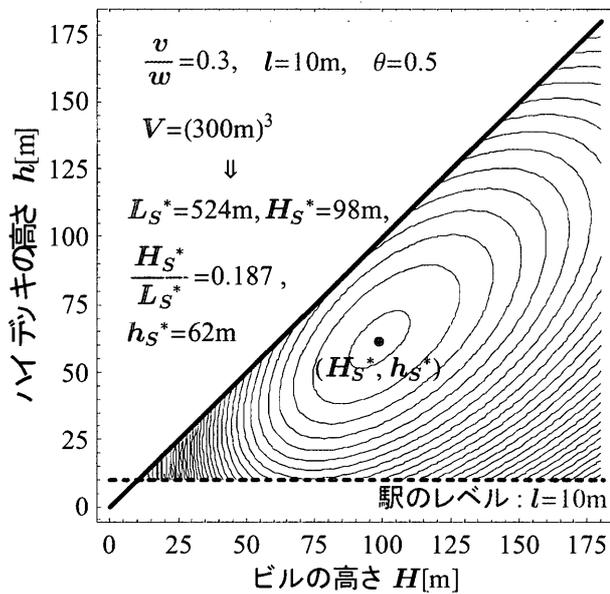


図4-7 駅レベルのローデッキを前提とした平均移動時間の等高線ならびにビル高さとハイデッキ高さの解(H_S^*, h_S^*)。

(都市域全体でのグロス建蔽率)= 0.2
 (ビル体積に対する昇降機以外の(有効)体積の率)= 0.9
 (ビルの階高)= 4m, (ビル内の一人当たり延べ床面積)= 12m²/人
 ([建築単位の事典研究会 1992]による標準的数値)
 と想定すれば
 この $V = (300\text{m})^3$ の都市空間では霞ヶ関ビル6個分のビル体積に
 約10万人のオフィスワークを収容することになる

ここで、直方体内で一様な2点間トリップ(すなわちビル間トリップ)と、直方体内で一様な点からローデッキ中央の駅へのトリップの頻度を、 θ と $1-\theta$ で与える($0 \leq \theta \leq 1$)。前者は「この直方体オフィス地域内で完結する往き来」を意味し、後者は「この直方体オフィス地域以外の地域との往き来」を意味している。そして、任意の移動者は速さ v のエレベータと、2つのデッキ(ローとハイ)の便利な方とを選び組み合わせて移動するものと約束しておく(ただし水平方向の徒歩速さは w とする)。このとき、ビル群に収容できるオフィス人口を確保しつつ、直方体のプロポーシオン(すなわち L と H)ならびにハイデッキの高さ h の三者を(同時に)最適化する数理計画問題を考えるのである。すなわち、ハイデッキが適切な高さに建設されることを担保しつつ、(直方体としての)オフィス都市の最適プロポーシオンを求めよう、というアイデアである。

図4-7に $\theta = 0.5$ の場合の平均所用時間の最小解を等高線と共に示す(横軸がビル高さ H 、縦軸がハイデッキ高さ h)。ただし駅高さは $l = 10\text{m}$ とし、都市体積を $V = (300\text{m})^3$ 、垂直-地表速度比を $v/w = 0.3$ とした。新宿高層ビル街での実証によれば、エレベータの(待ちを含む)実質平均速度は30m/分ほどであり[腰塚 & 石井 2000]、加えて[建築単位の事典研究会編 1992]に倣って徒歩速度を100m/分とすれば $v/w = 0.3$ となるからである。図4-7から分かる通り、最適解は $(L_S^*, H_S^*, h_S^*) = (524\text{m}, 98\text{m}, 62\text{m})$ である。つまり一辺524mの正方形領域に93mの高さのビルを敷き詰め、高さ10mのペDESTリアンデッキ(ローデッキ)に加えて高さ62mのハイデッキを設けるのがよい。ただし、最適解の近傍で目的関数は鍋底型だから、設計にはある程度の自由度がある。なお駅高さ l を固定していることに影響されて、 V が大きいほど最適プロポーシオン H_S^*/L_S^* は小さくなる。

4.4 4節の参考文献

- [1] 井関一隆(1995):ビル間高架連絡通路の最適配置, 慶應義塾大学大学院理工学研究科修士論文.
- [2] 建築単位の事典研究会(1992):『建築単位の事典』, 彰国社.
- [3] 腰塚武志(1995):コンパクトな都市のプロポーシオン, 都市計画論文集, No. 30, pp. 499-504.
- [4] 腰塚武志, 石井儀光(2000):新宿高層ビル群における移動時間分布, 都市計画論文集, No. 35, pp. 1003-1008.
- [5] 栗田 治(2001):コンパクトな直方体都市の数理モデル, 日本不動産学会誌, Vol. 15, No. 3, pp. 39-48.
- [6] 栗田 治(2004):『都市モデル読本』(造形ライブラリー05), 共立出版.
- [7] 栗田 治, 市川浩司(2003):プロポーシオンの最適化(技術ノート・建築システムのための最適化3), 建築雑誌, Vol. 118, No. 1511, pp. 054-055.
- [8] 栗田 治, 腰塚武志(2001):省エネルギー直方体都市のプロポーシオン解析-沙漠の摩天楼シバームの数理-, 日本建築学会計画系論文集, 第544号, pp. 125-131.
- [9] 岡本貴章(1999):橋の適正配置モデル-駅構内連絡通路の設計・評価への応用-, 慶應義塾大学大学院理工学研究科修士論文.
- [10] 岡本貴章, 栗田 治(1998):橋の適正配置に基づく逐次添加計画, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1-B-9, pp. 40-41.
- [11] 大澤義明(1986):橋の本数と迂回の関係について, 日本都市計画学会学術研究論文集(都市計画別冊昭和61年度), pp. 241-246.

5. おわりに

本稿のように、都市・建築空間の幾何学的な特性が距離に影響を与える様子を明らかにすることには、都市のORに関する基礎研究としての意義があるものと思われる。中でも領域間平均距離近似公式については、これを(a)空間相互作用モデル、(b)領域間移動を取り扱う非集計ロジットモデル、(c)ハフモデル、等々に適用し、その有効性を検証すべきである。また、都市平面と建築空間を対象とする距離分布モデルに関しては、適用の幅を様々な設計案に拡げてゆくとともに、コンパクトシティ設計への全体系的接近に役立てるべきである。なお、発生・集中制約を満たす空間相互作用モデルを組み込んだ距離分布の導出は未解決問題として残されている。

特に、都市工学ならびに都市のOR分野の大学院生と若手研究者の皆さんが、理論・応用の両面で開拓者精神を発揮なさることに期待します。

謝辞

日頃より都市のオペレーションズ・リサーチ勉強会ならびに科研の勉強会でご指導と励ましを下さる腰塚武志先生(筑波大学)、伏見正則先生(南山大学)、田口 東先生(中央大学)、大山達雄先生(政策研究大学院大学)、大澤義明先生(筑波大学)、鈴木敦夫先生(南山大学)に心より御礼申し上げます。また、本稿の元原稿を詳しく読み、表現上の誤りを指摘し、平均距離に関する文献を紹介してくれた田中健一君(慶應義塾大学理工学研究科博士課程)に謝意を表します。