非分割財交換モデルにおける強コアの存在性について

学習院大学経済学部　和光　純

概　要

本報告では，n 人のプレイヤー間で非分割財が交換される市場ゲームにおける強コアと呼ばれる均衡配分の集合の存在について考察する．既存の研究では，プレイヤーが財に関して線形選好順序を持つ場合を仮定して強コアが非空の場合のみが考察されてきたが，ここでは，無差別を許す一般的な場合を考察し，強コアが存在するための必要十分条件を与える．さらに，この必要十分条件を用いて，各プレイヤーの所与の選好順序について，強コアの存在判定が $O(n^3)$ のアルゴリズムで可能であることを示す．

1　はじめに

経済における，投入，生産，交換という主要な活動に現れる財の非分割性，取引量の離散性は，連続的変化を許すモデルに埋め込み，連続量で与えられる結果をもって近似解とする．このような分析が，経済学では長い間受け入れられてきた様に見える．財の非分割性からくる単位の離散性を考慮することの困難さは容易に予測でき，財の非分割性が経済の均衡に与える影響に関する研究が活発に行われるようになったのは最近になってからであり，その多くはゲーム理論による分析である．

本報告では，非分割財を明示的に取り扱う経済モデルのゲーム理論的分析の発端の１つとなった，Shapley and Scarf [10]が 1974 年に提示した非分割財交換モデル House-swapping market[1]を考察する．House-swapping market では，n 人のプレイヤーが非分割財（例えば，家）を１単位ずつ所有しており，それぞれの財には製品差別がある．各人は，n 個の非分割財に選好順序を持っていて，なるべく好ましい財を獲得しようとする．ただし，各プレイヤーにとって，非分割財はいずれか１単位のみでよく，２単位は欲しない．取引活動は，非分割財の交換のみであって，金銭の支払いはない．このモデルは，取引単位の離散性を考慮する経済分析の準備考察モデルとして提示されたモデルである．しかし，キャンパス最大のマルチメディア教室の使用時間の組み替えのようなタイムシェアリングや，米国大学における学生寮の部屋の交換手続き等では，このモデルが示すゲームそのものが行われる場合も存在する．

House-swapping market には，top trading cycle 法と呼ばれる簡潔なアルゴリズムで求められる財配分（TTC 配分）が存在した．TTC 配分は，経済学的には，競争均衡配分（価格均衡がもたらす配分）として定義できるものであったが，非分割財１単位が他の非分割財１単位と交換されるだけの House-swapping market において，「財の価格」の意味は不明瞭であった．しかし，すべてのプレイヤーの選好順序が無差別を含まない場合には，TTC 配分は一意に定まり，そして，強コア(Strict core または Strong core)と呼ばれる協力ゲームの解概念に一致することが，Roth and Postlewaite [9]によって示された．より正確に述べると，各プレイヤーが線形選好順序を持

---

[1] Shapley 教授自身の命名．House-barter model と呼ばれることもある．

つ場合，強コアは，一意に定まるTTC配分からなる1点集合となるのである．Shapley and Scarf [10]は，プレイヤーの選好順序が無差別を含む場合，強コアが空集合となり得ることを例示していた．しかし，現在に至るまで，強コアの存在性に関する一般的考察はなされなかった．

そこで本報告では，House-swapping market についてこれまでに明らかにされてきた主要な性質を紹介するとともに，新たに Quint and Wako [7]が与えた，強コアが非空となるための必要十分条件，および，強コアの存在判定が $O(n^3)$ のアルゴリズムで可能であることを示す．

2 Shapley-Scarf の非分割財交換モデル House-swapping market

Shapley-Scarf の非分割財交換モデル House-swapping market は，非分割財（例えば，家）を1単位ずつ保有する n 人のプレイヤーがその財を交換するモデルである．そこで，プレイヤー集合を $N=\{1,\ldots,n\}$ とする．この市場で交換される n 個の非分割財には製品差別があるとし，プレイヤー i が初期に保有する非分割財を財 i とよぶ．混乱のない限り，非分割財のことを単に財とよぶ．財の集合としても集合 $N=\{1,\ldots,n\}$ を用いる．各プレイヤー i は，財1から財 n のいずれか1つを所有すれば十分であり，2つ以上は欲しないとする．プレイヤー i の各財に対する選好は，財の集合 N 上の complete, reflexive, transitive な選好順序 $\succsim_i$ によって与えられるとする．ここで，$k \succsim_i h$ は，$k \succ_i h$ または $k \sim_i h$ であることを示す．$k \succ_i h$ は，プレイヤー i は財 k を財 h よりも好むことを表す．$k \sim_i h$ は，財 k と h については，どちらかをより好むわけではなく，無差別であることを表す．n 人のプレイヤーの選好順序の組を $\succsim_N=(\succsim_1,\ldots,\succsim_n)$ と書く．選好順序の組はプレイヤー間で互いに既知とする．

House-swapping market におけるプレイヤーの経済活動は，交換（swap）によって，自己の初期保有財よりも好ましい財を取得しようとすることである．ここで，交換のためには，任意の提携が形成可能とする．3 人以上のプレイヤー $1,\ldots,m$ の間で，循環的に財を交換して，プレイヤー1 の財 1 をプレイヤー2 が取得，. . . , プレイヤー m の財 m をプレイヤー 1 が取得するということも可能である．ただし，2 単位以上は欲しないので，各プレイヤーが取得する財は 1 つである．また，非分割財のみの交換が許され，貨幣等による支払いはない．

交換の結果は，財 $1,\ldots,n$ の，n 人のプレイヤーへの配分となる．上の設定より，配分は集合 N 上の置換写像 $x:N\to N$ と定義される．ここで，$x(i)$ は，配分 x においてプレイヤー i が得る財を示す．配分の集合を X とする．集合 X は，N の置換写像全体である．財の交換のために形成される提携は，プレイヤー集合 N の非空部分集合 S として記述される．提携 S のメンバーのみで財の交換をして得られる配分を S 配分とよび，S の置換写像 $x_S:S\to S$ により定義する．S 配分の集合を X_S とする．よって，$X=X_N$ となるが，N 配分は，単に配分とよぶ．

以上の交換モデルを House-swapping market $M=(N,\succsim_N)$ と定義する．混乱のない限り，単に，市場 M と表記する．

3 コア，強コア，vNM 解

協力ゲーム理論における解の概念を House-swapping market $M=(N,\succsim_N)$ に導入する．いま，$x\in X$ を任意の配分とする．このとき，ある提携 S には，ある S 配分 $y_S\in X_S$ が存在して，

$$y_S(i)\succ_i x(i) \quad \text{for all} \quad i\in S \tag{3.1}$$

であるならば，提携Sは配分xを改善可能という．さらにこととき，各$i \in S$について$y(i)=y_S(i)$となる任意の配分$y \in X$について，配分xは配分yに支配されるという．また，条件(3.1)の代わりに，

$$y_S(i) \succsim_i x(i) \quad \text{for all} \quad i \in S \tag{3.2a}$$

$$y_S(j) \succ_j x(j) \quad \text{for some} \quad j \in S \tag{3.2b}$$

が成立するとき，提携Sは配分xを弱改善可能といい，配分xは配分yに弱支配されるという．

コアCとは，いかなる提携にも改善可能でない配分の集合をいう．コアは，いかなる配分にも支配されない配分の集合である．強コアSCとは，いかなる提携にも弱改善可能でない配分の集合をいう．強コアは，いかなる配分にも弱支配されない配分の集合である．定義より，強コアはコアの部分集合である．強コア配分が存在すれば，プレイヤーはその配分に同意する可能性が高い．弱改善可能性の定義から，あるプレイヤーが他の提携形成によって，より好ましい財を獲得しようとしても，その提携には必ず，より好ましくない財を割当てられるプレイヤー出現してしまい，そのような提携形成が実現しないだろうからである．

vNM解（von Neumann-Morgenstern 解）は，配分間の（弱）支配関係に基づいて定義される解集合である．非空な配分の集合$K \subseteq X$が，次の２つの安定性

Kに属すいかなる配分も，K内の他の配分には支配されない（内部安定性）

$X \setminus K$に属す任意の配分は，K内のいずれかの配分に支配される（外部安定性）

を満たすとき，Kを **vNM** 解という．弱支配によって規定した２つの安定性条件を満たす集合を，弱支配 **vNM** 解とよぶ．外部安定性は，解集合に属さない配分は，新たな提携形成により解集合内のいずれかの配分に（弱）改善されることを規定している．そして，内部安定性が，解集合に属す配分間では（弱）改善は起きないことを規定している．コア・強コアは，内部安定性は満たす．しかし，外部安定性を満たすとは限らない．

4　Top trading cycle 法と競争均衡配分

House-swapping market には，Top trading cycle 法というアルゴリズムによって常に求められる求めれ配分が存在する．**Top trading cycle** 法では，先ず，$V := N$とする．そして，

1) 任意のプレイヤー$i \in V$を選び，これをi_1とする．
2) プレイヤーi_1が財集合Vの中で最も好む財を選び，これをi_2とする．【最も好む財が複数ある場合は任意に１つ選ぶ】
3) プレイヤーi_2が財集合Vの中で最も好む財から任意の１つを選び，これをi_3とする．
4) これを繰り返す．サイクル$C=\{i_{k+1}=i_1,...i_k\}$（$k \geq 1$）ができたら，Cに属すプレイヤーに，この trading cycle に沿って財を配分する．【サイクルは必ずできる】
5) $V := V \setminus C$として，上記手順を繰り返す．$V = \varnothing$となったら，終了．

Top trading cycle 法によって与えられる配分を **TTC** 配分とよび，その集合をTTCと書く．

Top trading cycle 法は，David Gale が House-swapping market の競争均衡配分を求めるアルゴリズムとして考案された．いま，$p=(p_1,\ldots,p_n)$を，各財iの価格$p_i(>0)$を表す価格ベクトルとす

る．このとき，House-swapping market の競争均衡配分 x とは，ある価格ベクトル p が存在して，各プレイヤー $i \in N$ について，次の２条件が成立する配分と定義する：

$$p_{x(i)} = p_i \tag{4.1}$$

$$x(i) \succsim_i h \quad \text{for any} \quad h \quad \text{with} \quad p_h \le p_i \tag{4.2}$$

条件(4.1)は，プレイヤー i に割り当てられる財 $x(i)$ の価格 $p_{x(i)}$ が，プレイヤー i の初期保有財 i の価格 p_i（これが“予算額”となる）に等しいことを示す．条件(4.2)は，財 $x(i)$ は，プレイヤー i が予算額の範囲で“購入”できる財の中で最も好ましいものであることを示す．競争均衡配分集合を CE と書く．

5　House-swapping market における強コアの特徴

House-swapping market の性質として，先ず，Shapley と Scarf が次の基本的結果を証明した．

定理 5. 1（Shapley and Scarf [13]）．

1）コアは常に非空である．$C \neq \emptyset$
2）Top trading cycle 法により，すべての競争均衡配分が求められる．$TTC = CE \neq \emptyset$
3）競争均衡配分はコアに含まれる．$C \supseteq CE \neq \emptyset$
4）強コアは，必ずしも非空ではない．

ついで，Roth と Postlewaite が，強コア配分が存在するための十分条件を与え，その下で，強コアの顕著な性質を持つことを，top trading cycle 法を用いて，証明した．

定理 5. 2（Roth and Postlewaite [9]）．各プレイヤーが選好順序に無差別が含まれないならば，

1）競争均衡配分は一意に定まり，強コアはその１点集合となる．$SC = CE \neq \emptyset$，$\#SC = 1$
2）強コアは，弱支配 vNM 解となる．

支配関係によって定義される vNM 解は，選好順序に無差別が含まれない状況下で既に存在しなくなる例が知られており，House-swapping market は，強コアと弱支配 vNM 解にその特徴が出ることが予想された．Wako [15, 16]は，再び，選好順序が無差別を含む一般的条件で強コアの性質を考察した．

定理 5. 3（Wako [15]）．選好順序が無差別を含む一般的状況の下で，

1）強コアは，競争均衡配分の集合の部分集合である．$SC \subseteq CE \neq \emptyset$
2）非空の強コアが，競争均衡配分の集合の真部分集合となる場合もある．【例 6.2 参照】

定理 5. 4（Wako [16]）．選好順序が無差別を含む一般的状況の下で，

1）任意の強コア配分 $x, y \in SC$ について，x と y は各プレイヤーにとって無差別である．

$$x(i) \sim_i y(i) \quad \text{for each} \quad i \in N$$

2）強コアが非空であるならば，それは，弱支配 vNM 解となる．

定理 5.4 は，定理 5.2 の性質が一般に保存されることを示す．しかし，このような特徴を持った強コアが非空となるのは，一般にどのような状況であるのかは，明らかではなかった．

6 例

選好順序に無差別が含まれる場合，強コアは，非空であったり，空であったりする．この違いについて洞察を得るために２つの例を挙げる．

例 6.1（Shapley and Scarf [16]） $SC=\varnothing$ の例．

各プレイヤーが次の選好順序を持つ 3 人 House-swapping market を考える．

プレイヤー1） $2 \succ_1 3 \succ_1 1$，　プレイヤー2） $1 \sim_2 3 \succ_2 2$，　プレイヤー3） $2 \succ_3 1 \succ_3 3$

この例には 2 つの TTC 配分 $x=(x(1),x(2),x(3))=(2,1,3)$ と $y=(y(1),y(2),y(3))=(1,3,2)$ が存在する．しかし，配分 x は，提携 $\{2,3\}$ の配分 $(y(2),y(3))=(3,2)$ によって弱改善可能，すなわち

$$y(3)=2 \succ_3 3=x(3) \quad \text{かつ} \quad y(2)=3 \sim_2 1=x(2)$$

であり，一方，配分 y は，提携 $\{1,2\}$ の配分 $(x(1),x(2))=(2,1)$ によって弱改善可能，すなわち

$$x(1)=2 \succ_1 1=y(1) \quad \text{かつ} \quad x(2)=1 \sim_2 3=y(2)$$

である．よって，定理 5.3 より，強コアは空となる．

ここで，各プレイヤーを（同時に各財も表す）点として表し，各点からそのプレイヤーの最も好む財へ向かう選好枝がのびるグラフを描いてみると次頁の図 6.1 の様になる．

例 6.2 $SC \neq \varnothing$ の例．

各プレイヤーが次の選好順序を持つ 3 人 House-swapping market を考える．

プレイヤー1） $2 \succ_1 3 \succ_1 1$，　プレイヤー2） $3 \succ_2 1 \succ_2 2$，　プレイヤー3） $2 \sim_3 3 \succ_3 1$

この例にも 2 つの TTC 配分 $x=(x(1),x(2),x(3))=(1,2,3)$ と $y=(y(1),y(2),y(3))=(1,3,2)$ が存在する．しかし，配分 x は，提携 $\{2,3\}$ の配分 $(y(2),y(3))=(3,2)$ によって弱改善可能，すなわち

$$y(2)=3 \succ_2 2=x(2) \quad \text{かつ} \quad y(3)=2 \sim_3 3=x(3)$$

であり，強コア配分ではない．一方，配分 y は，いかなる提携にも弱改善可能ではなく，強コア配分となる．定理 5.3 より，$SC=\{y\} \subset CE=\{x,y\}$ となる．例 6.1 と同様なグラフを描くと，図 6.2 の様になる．

２つのグラフを比較すると，強連結成分[2]の構造が異なっている．図 6.1 の強連結成分は図のグラフ全体である．図 6.2 では，点 2,3 からなる部分グラフである．図 6.2 の強連結成分では，その選好枝から，強コア配分 y の提携 $\{2,3\}$ の部分 $(y(2),y(3))=(3,2)$ を示すサイクルが抽出できる．一方，図 6.1 の強連結成分の選好枝からは，その構成点 1,2,3 を通るサイクルは抽出できず，

---

[2] 所与の有向グラフの部分グラフのうちで，任意の２点を始点・終点とする有向パスが存在する極大な部分グラフを強連結成分という．

強コア配分も存在しない．実は，この違いが，強コアの空・非空と一致することが示せる．

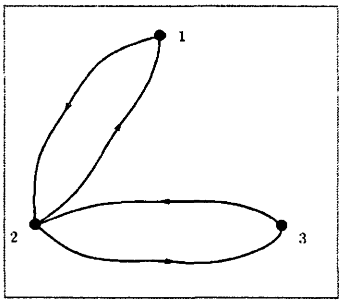

図 6.1

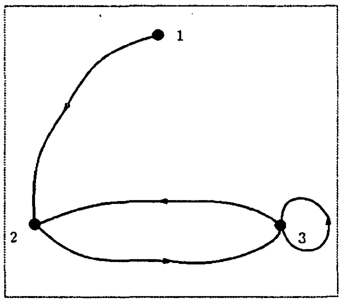

図 6.2

7　最高選好グラフによるプレイヤー分割

いま，$M=(N,\succsim_N)$ を任意の House-swapping market とする．集合 S を N の任意の非空部分集合とする．このときプレイヤー $i\in N$ が，財集合 S の中で最も好む財の集合を $B_i(S)$ と表記し，

$$B_i(S)=\{h\in S\mid h\succsim_i j \text{ for each } j\in S\}$$

と定義する．一方，有向グラフを，点集合 V と，隣接関数 $\Gamma:V\to 2^V$ の組 (V,Γ) によって定義する．ここで，$\Gamma(i)$ は，点 i から出る枝の集合を示す．提携 S における最高選好グラフ $BG(S)$ を，点集合が S，隣接関数 $\Gamma:S\to 2^S$ が，各 $i\in S$ について $\Gamma(i)=B_i(S)$ と定義された有向グラフと定義する．最高選好グラフ $BG(S)$ の各点は，提携 S のプレイヤーであり，同時にそのプレイヤーの初期に保有する財を表す．点 $i\in S$ から出る各枝 $a\in B_i(S)$ は，プレイヤー i が財集合 S の中で最も好む財の点に伸びる．これを選好枝とよぶ．

前節で着目した最高選好グラフの構造を次のように定義する．

定義 7.1. 最高選好グラフ $BG(S)=(S,\Gamma)$ の部分点集合 $T\subseteq S$ が次の 2 条件を満たすとき，最高選好グラフ $BG(S)$ の極小自己写像集合（**minimal self-mapped set**）とよぶ．

$$T=\Gamma(T) \qquad \text{【自己写像性】}$$

$$\nexists T' \text{ with } \emptyset\neq T'\subset T \text{ and } T'=\Gamma(T') \qquad \text{【極小性】}$$

図 6.1 の最高選好グラフにおける極小自己写像集合は，$\{1,2,3\}$，図 6.2 においては，$\{2,3\}$ である．極小自己写像集合は，最高選好グラフの強連結成分の点集合であるが，逆は必ずしも成立しない．最高選好グラフ $BG(S)$ は，各点 $i\in S$ について $\Gamma(i)\neq\emptyset$ のため，次の補題が成立する．

補題 7.2. 任意の提携 S について，最高選好グラフ $BG(S)$ には，少なくとも 1 つ，極小自己写像集合が存在する．

この性質から，プレイヤー集合 N を次のように分割することができる．

定義 7.3. 次の条件を満たすプレイヤー集合 N の分割 $T^* = \{T_1,\ldots,T_m\}$ （$m \geq 1$）を最高選好グラフによるプレイヤー分割とよぶ：

各 $k=1,\ldots,m$ について，T_k が最高選好グラフ $BG(N \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i)$ の極小自己写像集合．

ここで，$k=1$ のときは，$BG(N \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i) = BG(N)$ とする．

最高選好グラフによるプレイヤー分割に含まれる各極小自己写像集合は，分割される順序は異なるかも知れないが，その構成は常に一意であることも証明できる．しかし，プレイヤー分割の構成が一意性が，強コア配分の存在を意味するのではない．例 6.1 では，最高選好グラフによるプレイヤー分割は，$T^* = \{N\}$ （ここで，$N = \{1,2,3\}$）であるが，強コアは空である．強コア配分の存在は，プレイヤー分割を構成する各々の極小自己写像集合上の選好枝の構造に依存する．

8 市場の分断可能性 Segmentability

各プレイヤーの選好順序に線形の場合，すなわち，無差別が含まれない場合の House-swapping market を考えみる．

この場合，任意の提携 S において，最高選好グラフ $BG(S)$ は，各点から 1 本の選好枝しか出ていないグラフとなる．各プレイヤー $i \in S$ について $\#\Gamma(i) = \#B_i(S) = 1$ だからである．よって，グラフ $BG(S)$ の極小自己写像集合 T の上では，T の各点を通る選好枝のサイクルがただ一つ形成される．従って，プレイヤーの選好順序が線形の場合，最高選好グラフによるプレイヤー分割 $T^* = \{T_1,\ldots,T_m\}$ の各提携 T_i 上で，独立したサイクルが形成される．そして，このサイクル群が強コア配分を与える top trading cycles となる．この性質を次のように一般化する．

定義 8.1. 所与の House-swapping market $M = (N, \succsim_N)$ について，最高選好グラフによるプレイヤー分割 $T^* = \{T_1,\ldots,T_m\}$ が与えられたとき，各提携 $T_i \in T$ について，次の条件

$$x_k(i) \in B_i(N \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i) \quad \text{for all} \quad i \in T_k \tag{8.1}$$

を満たす T_i 配分 $x_k \in X_{T_k}$ が存在するとき，House-swapping market $M = (N, \succsim_N)$ は分断可能 **(segmentable)** であるという．

条件(8.1)を満たす T_i 配分 $x_k \in X_{T_k}$ が各提携 T_i に存在すれば，先ず，提携 T_1 のメンバーはその提携内のみで，各自が財集合 N のなかで最も好む財を獲得できる．従って，提携 T_1 のメンバーは，提携外のプレイヤー $j \in N \setminus T_1$ とは事実上取引する必要がない．プレイヤー $j \in N \setminus T_1$ の財は，

彼らにとって最も好ましい財ではないからである．これより，市場は，提携T_1とそれ以外に分断可能となる．同様な状況が，提携$T_2,\ldots,T_m$の各々について成立する．そこで，市場が分断可能であるとよぶ．この条件が強コアが非空となるための必要十分条件となる．
定理 **8.2.** 所与の House-swapping market $M=(N,\succsim_N)$の強コアが非空であるとき，この市場Mは分断可能であり，かつ，強コアが非空となるのは分断可能な場合に限る．

分断可能性は，最高選好グラフによるプレイヤー分割$T^*=\{T_1,\ldots,T_m\}$に依存して定義されている．しかし，最高選好グラフによるプレイヤー分割が複数存在しても，任意の１つについて分断能性が成立すれば，他のすべてについても分断可能性が成立し，逆に，ある１つにおいて分断可能性が成立しなければ，他のすべてにおいても成立しないことが証明できる．

9　強コアの存在判定アルゴリズム

以上の議論から，強コアの存在判定を，２段階の手続きによって行うことができる．第１段階は，最高選好グラフによるプレイヤー分割$T^*=\{T_1,\ldots,T_m\}$の生成であり，第２段階は，分断可能性の判定である．

先ず，第２段階の分断可能性の判定から考察する．最高選好グラフによるプレイヤー分割$T^*=\{T_1,\ldots,T_m\}$が得られたとき，分断可能性の判定は，各T_iについて，隣接関数$\Gamma:T_i\to 2^{T_i}$が$\Gamma(i)=B_i(N\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}T_i)$ (for each $i\in T_i$) と定義される２部グラフ$G_i=(T_i^+,T_i^-,\Gamma)$を考え，各２部グラフG_iが完全マッチングを持つか否かを判定すればよい．この問題には，$O(|T_i|^3)$のアルゴリズムがあることがよく知られており[3]，$\sum|T_i|^3\le(\sum|T_i|)^3=n^3$より，$O(n^3)$で判定可能となる．

次に，プレイヤー分割$T^*=\{T_1,\ldots,T_m\}$を見出すには，所与の最高選好グラフから極小自己写像集合を探索しては，それを取り除き，残りの部分に対して再び最高選好グラフを定義し，その極小自己写像集合を見つける作業を繰り返せばよい．この手続きは，$O(n^3)$で可能であることが分かる．具体的手続きを次頁に挙げる．アルゴリズム*MSMS*が，所与の最高選好グラフから，その極小自己写像集合を見つける手続きであり，アルゴリズム*PMSS*が最高選好グラフを更新しつつ，アルゴリズム*MSMS*を繰り返し呼び出す手続きである．

以上より，与えられた House-swapping market $M=(N,\succsim_N)$における強コア配分の存在を$O(n^3)$で判定することが可能となる．

---

[3] より効率的はアルゴリズムもある．Alt *et al.* [2]，Hopcroft and Karp [5] を参照．

アルゴリズム *MSMS*

Step 0 *(Initialization)* Given a digraph $G=(V,\Gamma)$ with $\Gamma(i)\neq\varnothing$ for all $i\in V$, initialize the label function L by $L(i)=\{i\}$ for each $i\in V$.

Step 1 *(Finding a cycle)*

(1.0) All vertices in V are colored *blue*. Pick any vertex in V and let i_1 denote it. Vertex i_1 is now *red*. Set $t=1$.

(1.1) If $\Gamma(i_t)=\{i_t\}$, then go to Step 3. Otherwise, let i_{t+1} be a vertex in $\Gamma(i_t)$ which is *different* from i_t, and set $f(i_t)=i_{t+1}$.

(1.2) If i_{t+1} is colored *red*, i.e. $i_{t+1}=i_k$ for some $k\in\{1,\dots,t-1\}$, trace out the cycle $C=\{i_k,\dots,i_t\}$ using function f, and go to Step 2. If i_{t+1} is colored *blue*, recolor it *red*, then set $t=t+1$ and return to Step 1.1.

Step 2 *(Contracting digragh G by cycle $C=\{i_k,\dots,i_t\}$)*

(2.1) Update G with the contraction $G\otimes S$ of G by unodered set $S=\{i_k,\dots,i_t\}$.

(2.2) For the new representative vertex s, set $L(s)=\bigcup_{r=k}^{t}L(i_r)$. For all other remaining vertices, L remains unchanged.

(2.3) Return to Step 1.

Step 3 *(End)* The elements of $L(i_t)$ are the vertices that form a minimal self-mapped set in the *original* digraph G.//

アルゴリズム *PMSS*

Step 0 *(Initialization)* Given market $M=(N,\succsim_N)$, set $V=N$ and $k=1$.

Step 1 *(Defining a top preference digraph)* Let G be the top preference digraph $BG(V)=(V,\Gamma)$ with $\Gamma(i)=B_i(V)$ for each $i\in V$.

Step 2 *(Finding a minimal self-mapped set)* Find a minimal self-mapped set in digraph G using algorithm $MSMS$, and denote it by T_k.

Step 3 *(Updating)* Set $V=V\setminus T_k$. If $V=\varnothing$, then go to Step 4. Otherwise, set $k=k+1$ and return to Step 1.

Step 4 *(End)* Let T be the ordered set $\{T_1,\dots,T_m\}$ of the minimal self-mapped sets obtained hitherto. Then T is a Partition by Minimal Self-mapped Sets for market M. Here m is the index number of the last minimal self-mapped set.//

参考文献

[1] H. G. Abeledo and U. G. Rothblum, Stable Matchings and Linear Inequalities, *Discrete Applied Mathematics* 54 (1944) 1-27.

[2] H. Alt, N. Blum, K. Mehlhorn, and M. Paul, Computing a maximum cardinality matching in a bipartite graph in time $O(n^{1.5}\sqrt{m/\log n})$, *Information Processing Letters* 37 (1991) 237-240.

[3] G.. Birkhoff, Tres Observaciones sobre el Algebra Lineal, *Universidad Nacional Tucuman Revista*, Series A (1946), 147-151.

[4] D. Gale and L. Shapley, College Admissions and the Stability of Marriage, *American Mathematical Monthly* 69 (1962) 9-14.

[5] J.E. Hopcroft and R. M. Karp, An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs, *SIAM Journal on Computing* 2 (1973) 225-231.

[6] E. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart, and Winston: New York (1976).

[7] T. Quint and J. Wako, On Houseswapping, the Strict Core, Segmentation, and Linear Programming, *Cowles Foundation discussion paper* no. 1416 (2003).

[8] F. Roberts, *Applied Combinatorics*, Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ (1984).

[9] A. E. Roth and A. Postlewaite, Weak versus Strong Domination in a Market with Indivisible Goods, *Journal of Mathematical Economics* 4 (1977) 131-137.

[10] L. Shapley and H. Scarf, On Cores and Indivisibility, *Journal of Mathematical Economics* 1 (1974) 23-37.

[11] J. Wako, A Note on the Strong Core of a Market with Indivisible Goods, *Journal of Mathematical Economics* 13 (1984) 189-194.

[12] J. Wako, Some Properties of Weak Domination in an Exchange Market with Indivisible Goods, *Economic Studies Quarterly* 42 (1991) 303-314.