離散凸解析の応用 — 離散凹効用関数を用いた経済モデル

田村明久
(京都大学 数理解析研究所)

要旨

マッチング市場の理論において, Gale–Shapley による安定結婚モデルと Shapley–Shubik による割当ゲームという 2 つの標準的なモデルがある. Eriksson–Karlander により, これら 2 つのモデルのハイブリッド版と言えるモデルが提案された. 本報告では, 室田により提案された離散凸解析という枠組を用いてこれらのモデルを一般化した藤重 –田村のモデルを紹介する.

1 概要

雇用者対労働者, 男性対女性のように経済主体（以降では単に主体と呼ぶ）の集合が交わりを持たない 2 つのサイドに分かれた状況で, 異なるサイドに属する主体同士の割当を考える市場を, ここではマッチング市場 (two-sided matching market) と呼ぶ. マッチング市場の理論において, Gale–Shapley [9] による安定結婚モデルと Shapley–Shubik [22] による割当ゲームという 2 つの標準的なモデルがある. 安定結婚モデルと割当ゲームの違いは, 前者は貨幣あるいは効用の譲渡可能性を含まず, 後者は手付け (side payment) を許すことである (詳しくは [20] 参照).

Gale–Shapley [9] による安定結婚モデルでは, n 人の男性と n 人の女性が存在し, 各個人の異性に対する選好の順序 (全順序) が与えられている状況を考える. ここでは, $2n$ 人の男性と女性を n 対の男女の対に分割したものをマッチングと呼ぶ. 与えられたマッチングに対して, マッチングにおけるパートナーよりも互いに好きな (与えられた選好の順序で上位の) 男女の対が存在するとき, (この男女が駆け落ちするという意味で) このマッチングは不安定 (unstable) であるという. このような男女の対が存在しないとき, マッチングは安定 (stable) であるという. Gale–Shapley は, 安定マッチングが常に存在することを構成的に証明した. 彼らの論文以降, 多くのバリエーションの提案や拡張がなされた. 最近, 注目すべき拡張が Fleiner [5]([6] も参照) により成されている. Fleiner は, 安定結婚モデルをマトロイドの枠組に拡張し, このマトロイド上のモデルにおいても安定解が常に存在することを示した. Fleiner [6] は, 更に Knaster–Tarski の不動点定理を用いた枠組を提案し, 安定解の存在や安定解の束構造を示した. Fleiner [5] のモデルでは各主体の選好はマトロイド上の線形効用関数で表現できるが, 江口 –藤重 [3] は室田 [13, 14, 15, 16] により提案された離散凸解析の枠組を用いて Fleiner のマトロイドモデルを拡張した. 彼らのモデルにおいては, 各主体の選好は $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数とよばれる離散凹関数により表現される ($\mathrm{M}^\natural$ 凹性については 2節参照).

一方, 割当ゲームにおいては, 男性 i と女性 j がパートナーシップを結んだ場合には c_{ij} という利益を生み, これを $q_i + r_j = c_{ij}$ と $q_i, r_j \geq 0$ を満たすようにそれぞれ q_i と r_j に分配する. 収益ベクトル q と r と男女の対を表すマッチング X から成る組 $(q, r; X)$ に対して, 全ての男女の対 (i, j) で $q_i + r_j \geq c_{ij}$ が成立するとき, $(q, r; X)$ を安定であるという. この安定性は, どの男女の対もマッチング X を壊しても利益が上がらないことを意味している. Shapley–Shubik [22] は, 線形計画問題の双対性を利用し割当ゲームに常に安定な解 $(q, r; X)$ が存在することを示した. この割当ゲームに対しても多くの拡張が提案されている. Sotomayor [23] は, 同じ男女の対の繰り返しは許さないが各主体が複数の異性とパートナーシップを結ぶことができるように拡張したモデルでも安定な解が常に存在することを示した. Sotomayor [25] では, 割当ゲームの多対多版となるモデル (雇用者と労働者のモデル) についてコアの存在を示した. Kelso–Crawford [12] では, 各雇用者は粗代替性 (gross substitutability) を有する効用関数を持ち, 各労働者は給料に関して狭義単調な (線形とは限らない) 効用関数を持つ多対一のモデルを提案した. また, Danilov–Koshevoy–Murota [2] は離散凸解析を応用した最初のモデルを提案している.

更には, 安定結婚モデルと割当ゲームを統一するという試みもなされている. 金子 [11] は, 特性関数を用いることでこれら 2 つのモデルを包含するモデルを与え, コアの存在を証明した. Roth–Sotomayor [21] もこれら 2 つの標準モデルを包含するモデルを提案し, 収益ベクトルの束構造などを議論しているが, 安定解の存在については言及していない. Eriksson–Karlander [4] は, 安定結婚モデルと割当ゲームのハイブリッド版といえるモデルを提案し, 安定マッチングの存在を示した. このモデルの特徴は, 主体を柔軟な (flexible) 主体と厳格な (rigid) 主体という 2 種類に分類するところにある. 厳格な主体は手付けを受け取らず, すなわち安定結婚モデルにおける主体のように振舞い, 柔軟な主体は手付けを許し割当ゲームの主体のように振舞う. すなわち, このモデルにおいては柔軟な主体の間でのみ手付けが許されている. Sotomayor [24] は, Eriksson–Karlander のモデルを少々拡張し, 安定マッチングの非構成的存在証明を与えた.

本報告では, 藤重 –田村 [7] により提案されたモデルを紹介する. これは, 江口 –藤重と Eriksson–Karlander のアイデアを用いたもので, 上で述べた多くのモデルを特殊ケースとして包含する一般的なマッチング市場モデルであり, 次のような特徴を持つ.

- 各主体の他サイドの主体に対する選好は $\mathrm{M}^\natural$ 凹効用関数で表現されている.
- 各主体は他サイドの複数の主体とパートナーシップを結ぶことができる. 例えば, 雇用者は複数の労働者を雇い, 労働者は複数の仕事に従事可能とみなせる.
- 異なるサイドの主体の対に対して複数のパートナーシップを結ぶことができる. 例えば, 繰返し数は雇用時間とみなせる.
- 異なるサイドの主体の対全体が, 柔軟な対と厳格な対に任意に分割されている. これは, 主体の分割から導かれる分割より自由度が高い.

藤重–田村 [7] の主結果は, この一般的なモデルにおいても常に安定な解が存在することである.

以下, 2節では, 準備として M$^\natural$ 凹関数の紹介と安定結婚モデルと割当ゲームの安定性の効用関数による特徴付けを行なう. 3節では, 離散凸解析に基づいた藤重–田村のモデルを紹介し, 4節ではこのモデルと既存の幾つかのモデルとの関係について議論する.

2 準備

この節では, M$^\natural$ 凹関数の定義, 性質を紹介と安定結婚モデルと割当ゲームの安定性の効用関数による特徴付けを行なう.

2.1 M$^\natural$ 凹関数

まず M$^\natural$ 凹関数を紹介しよう. E を非空な有限集合とし, $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{R}$ をそれぞれ整数と実数全体の集合とする. E を添字集合として持つ整数ベクトル $x = (x(e) : e \in E) \in \mathbf{Z}^E$ に対して, その正の台 (positive support) と負の台 (negative support) を

$$\mathrm{supp}^+(x) = \{e \in E \mid \ x(e) > 0\}, \quad \mathrm{supp}^-(x) = \{e \in E \mid \ x(e) < 0\}$$

と定義する. 任意の $x, y \in \mathbf{Z}^E$ に対して, ベクトル $x \wedge y$ と $x \vee y$ を次のように定義する:

$$x \wedge y(e) = \min\{x(e), y(e)\}, \quad x \vee y(e) = \max\{x(e), y(e)\} \quad (e \in E).$$

それぞれの部分集合 $S \subseteq E$ に対して, その特性ベクトル χ_S を

$$\chi_S(e) = \begin{cases} 1 & (e \in S) \\ 0 & (e \in E \setminus S) \end{cases}$$

と定め, 特に E の各要素 e の特性ベクトルを χ_e と略記する. 与えられたベクトル $p \in \mathbf{R}^E$ と関数 $f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して, 2つの関数 $\langle p, x\rangle$ と $f[p](x)$ を

$$\langle p, x\rangle = \sum_{e \in E} p(e)x(e), \qquad f[p](x) = f(x) + \langle p, x\rangle \qquad (x \in \mathbf{Z}^E)$$

と定義する. また, 関数 f の $U \subseteq \mathbf{Z}^E$ 上の最大解集合 arg max と f の実効定義域 (effective domain) dom f を次のように定める:

$$\arg\max\{f(y) \mid y \in U\} = \{x \in U \mid \forall y \in U : \ f(x) \geq f(y)\},$$
$$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{Z}^E \mid f(x) > -\infty\}.$$

関数 $f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ と次の条件

(M$^\natural$) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall e_1 \in \mathrm{supp}^+(x-y)$, $\exists e_2 \in \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}$:

$$f(x) + f(y) \leq f(x - \chi_{e_1} + \chi_{e_2}) + f(y + \chi_{e_1} - \chi_{e_2})$$

を満たすとき M$^\natural$ 凹 (M$^\natural$-concave)[17] であるという．ただし，χ_0 はゼロベクトルとする．以下で，M$^\natural$ 凹関数の簡単な例を紹介する．

例 1: E の非空な部分集合族 $\mathcal{T}$ が，すべての $X, Y \in \mathcal{T}$ に対して $X \cap Y = \emptyset$ または $X \subseteq Y$ または $Y \subseteq X$ を満たすとき，層族 (laminar family) であるという．与えられた層族 $\mathcal{T}$ とその各要素 X に対応した 1 変数凹関数 $f_X : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ の族に対して，次のように定義される関数

$$f(x) = \sum_{X \in \mathcal{T}} f_X \left(\sum_{e \in X} x(e) \right) \qquad (x \in \mathbf{Z}^E)$$

は M$^\natural$ 凹である ([16] 参照). □

M$^\natural$ 凹関数は数理経済学の観点から効用関数として満たすべき良い性質を有する．例えば，数理経済学では効用関数が凹関数であると仮定することが一般的であるが，任意の M$^\natural$ 凹関数 $f : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対して，$\bar{f}(x) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbf{Z}^E$) という条件を満たす凹関数 $\bar{f} : \mathbf{R}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が存在する [13]．すなわち，$\mathbf{Z}^E$ 上で定義される M$^\natural$ 凹関数は $\mathbf{R}^E$ 上の凹拡張を持つ．また，効用関数は限界効用逓減性 (decreasing marginal returns) を有することを通常仮定する．離散の場合にはこの性質は劣モジュラ性と等価であるが，M$^\natural$ 凹関数 f は劣モジュラ性，すなわち，

$$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y) \qquad (x, y \in \mathrm{dom}\, f)$$

を満たす [18].

次に粗代替性 (gross substitutability) と単改良性 (single improvement property) の自然な拡張と M$^\natural$ 凹性の関係について議論をする．これらは，それぞれ Kelso–Crawford [12] と Gul–Stacchetti [10] によって集合関数に対して定義されたものである．

(GS) $p \leq q$, $x \in \arg\max f[-p]$, $\arg\max f[-q] \neq \emptyset$ を満たす任意の p, $q \in \mathbf{R}^E$ と $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対して，次の条件を満たす $y \in \arg\max f[-q]$ が存在する:

$$e \in E,\ p(e) = q(e) \implies y(e) \geq x(e).$$

(SI) $f[-p](x) < f[-p](y)$ である任意の $p \in \mathbb{R}^E$ と $x, y \in \mathrm{dom}\, f$ に対して，

$$f[-p](x) < \max_{e_1 \in \mathrm{supp}^+(x-y) \cup \{0\}} \max_{e_2 \in \mathrm{supp}^-(x-y) \cup \{0\}} f[-p](x - \chi_{e_1} + \chi_{e_2}).$$

ここで, E と p はそれぞれ不可分財の集合と不可分財の単位当りの価格を表し, $f(x)$ は不可分財の消費個数を表すベクトル x に対する効用を表現しているとする. このとき, 上記の性質は次のように解釈することができる. (GS) は, 価格が上昇したとき, 価格が不変な財の消費個数は減らないことを消費者は望むことを意味する. (SI) は, 消費 x からより好ましい消費 y に高々 2 個の財を入れ換えるだけで変更できることを保証する. 集合関数に対する粗代替性と単改良性の等価性は, 最初に Gul–Stacchetti [10] により示され, 集合関数に対する単改良性と $\mathrm{M}^\natural$ 凹性の等価性は最初に藤重 –楊 [8] により示された. 室田 –田村 [19] は, $\mathrm{M}^\natural$ 凹性が (GS) と (SI) を導き, 逆に $\mathrm{M}^\natural$ 凹性がある種の自然な仮定のもとで, (SI) や (GS) を拡張した性質で特徴付けられることを示した. また, Danilov–Koshevoy–Lang [1] も (GS) を拡張した別の性質による $\mathrm{M}^\natural$ 凹性の特徴付けを与えた.

2.2 安定結婚モデルと割当ゲームの効用関数による表現

この節では, 安定結婚モデルと割当ゲームモデルの安定性を効用関数の言葉で表現する. これは, 次節で扱うモデルを理解するために有益である.

以降では, M と W を交わりを持たない主体の集合とし, E を M と W の主体の対全体からなる集合とする, すなわち, $E = M \times W$. M と W はそれぞれ男性集合と女性集合とみなすことにする. それぞれの対 $(i,j) \in E$ に対して, 実数の対 (a_{ij}, b_{ij}) が与えられている. 割当ゲームにおいては, a_{ij} と b_{ij} は主体 i と j が組んだときに i と j が生み出す利益とみなすことができる. 一方, 安定結婚モデルにおいては, a_{ij} と b_{ij} により選好順序を次のように表現する. $a_{ij_1} > a_{ij_2}$ が成立するとき男性 i は女性 j_2 よりも女性 j_1 を好むとみなし, $a_{ij_1} = a_{ij_2}$ であるときは i にとって j_1 と j_2 を無差別である (同程度に好き) とみなす. b_{ij} により女性の選好順序も同様に定める. また, i が j を許容できるとき $a_{ij} \geq 0$ とし, それ以外のとき $a_{ij} = -\infty$ とする. 同様に j が i を許容できるとき $b_{ij} \geq 0$ とし, それ以外のとき $b_{ij} = -\infty$ とする. ここで, $\{0,1\}^E$ は E 上の 0-1 ベクトル全体を表すとする. 男性の効用を集約した効用関数 f_M と女性の効用を集約した効用関数 f_W を次のように定義する: すべての $x \in \mathbf{Z}^E$ に対して,

$$f_M(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} a_{ij}x_{ij} & (x \in \{0,1\}^E \text{ and } \displaystyle\sum_{j\in W} x_{ij} \leq 1 \text{ for all } i \in M) \\ -\infty & (\text{otherwise}), \end{cases} \tag{2.1}$$

$$f_W(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} b_{ij}x_{ij} & (x \in \{0,1\}^E \text{ and } \displaystyle\sum_{i\in M} x_{ij} \leq 1 \text{ for all } j \in W) \\ -\infty & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{2.2}$$

安定結婚モデルには種々のバリエーションがあるが, ここでは包括的なモデルの一つを紹介する. このモデルでは, 選好において非許容な主体や無差別を許す. ここではマッチング (E の部分集合で各主体が高々 1 度含まれるもの) の安定性について考える. マッチング X に対して, $i \in M$ ($j \in W$) を含む対が X に存在しないとき i (j) は X で非飽和

(unmatched) であるという．X に含まれない対 (i,j) について，i と j が X のパートナーよりもあるいは非飽和であることよりも互いに好きである場合に (i,j) を X に対するブロッキング対 (blocking pair) という．マッチング内の対が互いに許容な主体同士から成り，かつブロッキング対が存在しないとき，このマッチングは安定[1]であるという．このマッチングの安定性は以下のように定義することもできる．ここで，各男性 $i \in M$ に値 q_i を各女性 $j \in W$ に値 r_j を割り振ったとき，マッチング X が安定であるとは以下の 3 条件が成り立つことである:

(m1) すべての対 $(i,j) \in X$ に対して，$q_i = a_{ij} > -\infty$ かつ $r_j = b_{ij} > -\infty$,

(m2) i (j) が X で非飽和ならば，$q_i = 0$ $(r_j = 0)$,

(m3) 任意の対 $(i,j) \in E$ に対して，$q_i \geq a_{ij}$ または $r_j \geq b_{ij}$.

更に，安定性は (2.1) と (2.2) で定義した効用関数を用いて特徴付けられる．E 上の 0-1 ベクトル x が安定[2]であるための必要十分条件は以下の条件を満たす 0-1 ベクトル z_M と z_W が存在することである:

$$\mathbb{1} = z_M \vee z_W, \tag{2.3}$$

$$x \text{ maximizes } f_M \text{ in } \{y \in \mathbb{Z}^E \mid y \leq z_M\}, \tag{2.4}$$

$$x \text{ maximizes } f_W \text{ in } \{y \in \mathbb{Z}^E \mid y \leq z_W\}. \tag{2.5}$$

ここで $\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 である E 上のベクトルを表す．この特徴付けは次のように解釈できる．まず，(2.4) と (2.5) を満たすベクトル x はマッチングに対応しなければならない．なぜならば，ゼロベクトルが f_M と f_W について 0(有限値) を達成するからである．マッチング x に対して，条件 (2.4)(あるいは (2.5)) は，それぞれの男性 (女性) が許された異性集合 $z_M(z_W)$ の中で最良の異性と組んでいることを主張している．すなわち，(2.3) は x でのパートナーあるいは一人でいることよりも互いが好き合う男女の対が存在しないことを意味している．逆に，安定マッチング x から条件を満たす z_M を次のように構成できる．男性 i が x での彼のパートナーあるいは一人でいることよりも好きな女性 j に対して $z_M(i,j) = 0$ と定め (このとき x の安定性より j は x でのパートナーあるいは一人でいることより i を好むことはない)，それ以外は $z_M(i,j) = 1$ とする．同様に z_W を定めるとこれらは (2.3)~(2.5) を満たす．すなわち，制約 $y \leq z_M$ $(y \leq z_W)$ は，それぞれの男性 (女性) はより好ましい男性 (女性) とパートナーシップを確立している女性 (男性) とは組めないことを意味している．

次に割当ゲームを考えよう．割当ゲームは手付けを含み，これが安定結婚モデルとの大きな違いである．割当ゲームにおける安定性は以下のように定義される．各主体の収益を

[1]無差別を許すため安定性の概念にも幾つかあるが，ここでの安定性は弱安定 (weak stability) と呼ばれるもので，以降ではこの弱安定を単に安定と呼ぶ．

[2]E の部分集合とその特性ベクトルを同一視する．

表すベクトル $q=(q_i \mid i \in M) \in \mathbf{R}^M$, $r=(r_j \mid j \in W) \in \mathbf{R}^W$ と部分集合 $X \subseteq E$ の組 $(q,r;X)$ に対して, 以下の条件が成り立つとき $(q,r;X)$ を安定であるという:

(a1) X はマッチング,

(a2) すべての $(i,j) \in X$ に対して, $q_i + r_j = a_{ij} + b_{ij}$,

(a3) i (j) が X において非飽和ならば, $q_i = 0$ $(r_j = 0)$,

(a4) $q \geq \mathbf{0}$, $r \geq \mathbf{0}$ かつすべての $(i,j) \in E$ に対して, $q_i + r_j \geq a_{ij} + b_{ij}$.

ここで $p_{ij} = b_{ij} - r_j = q_i - a_{ij}$ は, 各 $(i,j) \in X$ に対する j から i への手付けを意味する. この安定性は, パートナーシップを構築することで収益が上がるような対 $(i,j) \notin X$ が存在しないことを主張している. Shapley–Shubik [22] は, 線形計画法の双対理論を用いて安定解の存在を次のように示した. 辺 (i,j) が重み $(a_{ij}+b_{ij})$ を持つ 2 部グラフ $(M,W;E)$ 上の最大重みマッチング問題とその双対問題は以下のように定式化できる:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} (a_{ij}+b_{ij})x_{ij} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j\in W} x_{ij} \leq 1 \quad (i \in M) \\ & \displaystyle\sum_{i\in M} x_{ij} \leq 1 \quad (j \in W) \\ & x_{ij} \geq 0 \quad ((i,j) \in E), \end{array} \tag{2.6}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i\in M} q_i + \sum_{j\in W} r_j \\ \text{subject to} & q_i + r_j \geq a_{ij} + b_{ij} \quad ((i,j) \in E) \\ & q_i \geq 0 \quad (i \in M) \\ & r_j \geq 0 \quad (j \in W). \end{array} \tag{2.7}$$

このとき, $(q,r;X)$ が安定であるための必要十分条件は $x = \chi_X$ と q, r がそれぞれ上記の問題の最適解となることである. なぜならば, (a1) と (a4) は主実行可能性と双対実行可能性を意味し, (a2) と (a3) が相補スラック条件を意味している. さらに, (2.1) と (2.2) の効用関数を用いることで割当ゲームの安定性を特徴付けることができる. E 上の 0-1 ベクトル x が安定[3]であるための必要十分条件は次の条件を満たす E 上のベクトル p が存在することである:

$$x \text{ maximizes } f_M[+p], \tag{2.8}$$

$$x \text{ maximizes } f_W[-p]. \tag{2.9}$$

なぜならば, 安定な $(q,r;X)$ からは $x = \chi_X$ とし, すべての $(i,j) \in E$ について $p_{ij} = b_{ij} - r_j$ とすれば良い. 逆に, (2.8) と (2.9) を満たす $x = \chi_X$ と p からは, すべての $(i,j) \in$

[3] ここでは, ベクトル x が安定とは, ある安定な $(q,r;X)$ が存在し, x が X の特性ベクトルになることを意味する.

X について $q_i = a_{ij} + p_{ij}$, $r_j = b_{ij} - p_{ij}$ とし, 非飽和な i, j については $q_i = 0$, $r_j = 0$ とすれば良い. 条件 (2.8) と (2.9) は, 各主体はベクトル p により摂動された効用関数に関して x でのパートナーが最良であることを意味している.

3 モデルと主定理

本節では, 藤重–田村 [7] のモデルを提案する. 以降では, M と W を交わりを持たない 2 つの主体の集合とし, E を有限集合とする. このモデルでは, M と W の効用はそれぞれ E 上で定義される 2 つの $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ で表現されるとする. 2.2節や 4節で紹介する典型的な例では, M と W は交わりを持たない主体の集合, $E = M \times W$ とし, f_M と f_W はそれぞれ M と W の主体の効用の集約と解釈することができる (註 2を参照).

また, E が 2 つの部分集合 F(柔軟な要素の集合) と R(厳格な要素の集合) に分割されていると仮定する. (4節で紹介する Eriksson–Karlander [4] のハイブリッドモデルでは M と W がそれぞれ $\{M_F, M_R\}$ と $\{W_F, W_R\}$ と分割され, $F = M_F \times W_F$, $R = E \setminus F$ と定める. ただし $E = M \times W$.) さらに, f_M と f_W は次の条件を満たすと仮定する.

(A) 実効定義域 $\mathrm{dom}\, f_M$ と $\mathrm{dom}\, f_W$ は, 有界かつ遺伝的であり共通最小点 $\mathbf{0}$ を持つ.

ここで, 実効定義域が遺伝的とは, $\mathbf{0} \le x_1 \le x_2 \in \mathrm{dom}\, f_M$ $(\mathrm{dom}\, f_W)$ ならば $x_1 \in \mathrm{dom}\, f_M$ $(\mathrm{dom}\, f_W)$ であることを意味する.

藤重–田村は安定性を以下のように定義した. ここで z を

$$\mathrm{dom}\, f_M \cup \mathrm{dom}\, f_W \subseteq \{y \in \mathbf{Z}^E \mid \mathbf{0} \le y \le z\}. \tag{3.1}$$

を満たす整数ベクトルとする. $x \in \mathrm{dom}\, f_M \cap \mathrm{dom}\, f_W$ が分割 (F, R) に関する $f_M f_W$-安定解であるとは, $p \in \mathbb{R}^E$ と $z_M, z_W \in \mathbf{Z}^R$ が存在することである:

$$p|_R = \mathbf{0}, \tag{3.2}$$

$$z|_R = z_M \vee z_W, \tag{3.3}$$

$$x \in \arg\max\{f_M[+p](y) \mid y \in \mathbf{Z}^E,\ y|_R \le z_M\}, \tag{3.4}$$

$$x \in \arg\max\{f_W[-p](y) \mid y \in \mathbf{Z}^E,\ y|_R \le z_W\}. \tag{3.5}$$

ただし, $p|_R$ はベクトル p の R 上への制限を表すとする. このモデルでは, p は W から M への手付けを意味し, (3.2) は厳格な要素については手付けがないことを意味する. 条件 (3.3) は, (R に制限はしているが) 条件 (2.4) における上界ベクトル $\mathbf{1}$ を z に置き換えたものに他ならない. (2.1) と (2.2) で定義された関数が $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数であることより, このモデルは安定結婚モデルと割当ゲームを含む. このことは, このモデルの安定性において

$E = R$ あるいは $E = F$ としたものが, それぞれ安定結婚モデルと割当ゲームの安定性の自然な拡張であることより分かる.

以下が藤重–田村の主定理である.

定理 3.1 (主定理): 仮定 (A) を満たす任意の M$^\natural$ 凹関数 $f_M, f_W : \mathbf{Z}^E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ と任意の E の分割 (F, R) に対して, (F, R) に関する $f_M f_W$- 安定解が常に存在する.

註 1: このモデルの安定性は上界ベクトル z に依存するように定義されている. しかし, これは本質的ではなく, z が (3.1) を満たすならば $f_M f_W$- 安定解の集合は z に依存しない. また, 以下のように z を用いずに安定性を定義することができる. x が $f_M f_W$- 安定解である必要十分条件は, (3.2) と以下の条件

$$\begin{aligned} x &\in \arg\max\{f_M[+p](y) \mid y \in \mathbf{Z}^E,\ y|_{R_M} \le z_M\}, \\ x &\in \arg\max\{f_W[-p](y) \mid y \in \mathbf{Z}^E,\ y|_{R_W} \le z_W\}, \end{aligned}$$

を満たすベクトル $p \in \mathbf{R}^E$, R の交わりを持たない部分集合 R_M と R_W, ベクトル $z_M \in \mathbf{Z}^{R_M}$ とベクトル $z_W \in \mathbf{Z}^{R_W}$ が存在することである. □

註 2: この節での説明では, M と W はそれぞれ集約された 1 人の主体とみなせるが, 次のようにこれらは主体の集合とみなすこともできる. ここで, $M = \{1, \cdots, m\}$, $W = \{1, \cdots, w\}$, $E = M \times W$ とする. また $E_i = \{i\} \times W$ $(i \in M)$ と $E_j = M \times \{j\}$ $(j \in W)$ とし, 各主体 $i \in M$ は E_i 上の M$^\natural$ 凹効用関数 $f_i : \mathbf{Z}^{E_i} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を持ち, 各主体 $j \in W$ は E_j 上の M$^\natural$ 凹効用関数 $f_j : \mathbf{Z}^{E_j} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を持つとする. 集約した関数 $f_M(x) = \sum_{i \in M} f_i(x|_{E_i})$ と $f_W(x) = \sum_{j \in W} f_j(x|_{E_j})$ $(x \in \mathbf{Z}^E)$ もまた M$^\natural$ 凹関数である. さらに, E を柔軟な対と厳格な対に任意に分割する. このモデルと本節で紹介したモデルは等価である. □

註 3: M と W がそれぞれ労働者と雇用者の集合であるとき, p は雇用者から労働者への給料とみなせるため非負となるべきである. しかし, この節のモデルではこのような条件を課していない. これは, p の非負性が個々の問題設定から導かれる特有の性質であり, 普遍の性質ではないためである. 例えば, $f_W(x)$ を労働者と雇用者間の割当 x から得られる雇用者の総収入とし, $\mathrm{dom}\, f_M$ は労働者にとり許容できる割当で $\mathrm{dom}\, f_M$ 上で f_M は一様に値 0 を取るとする. このとき, 任意の $f_M f_W$- 安定解 x と $x(e) > 0$ である柔軟な要素 e に対して, $p(e) \ge 0$ となる. これは, $f_M[+p](x) \ge f_M[+p](x - \chi_e)$ と $f_M(x) = f_M(x - \chi_e) = 0$ より得られる. □

4 特殊ケースとなる既存モデル

(2.1) と (2.2) が M$^\natural$ 凹である事実と 2.2節での議論より, 安定結婚モデルも割当ゲームも 3節で紹介したモデルの特殊ケースとなっている. 本節では, 3節のモデルの特殊ケースとなる既存モデルを幾つか紹介する.

4.1 安定結婚モデルの拡張

Fleiner [5] により安定結婚モデルがマトロイドの枠組に拡張された．まず，マトロイドについて簡単に説明をしよう．E の部分集合の族 $\mathcal{I}$ が，次の条件

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \emptyset \in \mathcal{I}, \\
\text{(ii)} & X \subseteq Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}, \\
\text{(iii)} & X, Y \in \mathcal{I}, |X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in Y \setminus X : X \cup \{e\} \in \mathcal{I}
\end{array}
$$

を満たすとき，これを台集合 E 上のマトロイドの独立集合族という．台集合 E 上のマトロイドの独立集合族 $\mathcal{I}$ と E 上の全順序 $>$ に対して，$\mathcal{M} = (E, \mathcal{I}, >)$ を順序付きマトロイドと呼ぶ．E の部分集合 X が要素 $e \in E$ を支配するとは，$e \in X$ またはある X の部分集合 Y が存在し $\{e\} \cup Y \notin \mathcal{I}$ かつ Y のすべての要素 e' に対して $e' > e$ が成立することと定義する．X に支配される要素全体から成る集合を $D_{\mathcal{M}}(X)$ と表記する．同じ台集合を持つ 2 つの順序付きマトロイド $\mathcal{M}_M = (E, \mathcal{I}_M, >_M)$ と $\mathcal{M}_W = (E, \mathcal{I}_W, >_W)$ に対して，$X \subseteq E$ が

(m4) $X \in \mathcal{I}_M \cap \mathcal{I}_W, \quad D_{\mathcal{M}_M}(X) \cup D_{\mathcal{M}_W}(X) = E$

を満たすとき，$\mathcal{M}_M\mathcal{M}_W$- カーネルという．例えば，与えられた安定結婚モデルの問題例 $(M, W, \{a_{ij}\}, \{b_{ij}\})$ に対して (簡単のため選好は全順序とする)，等価なマトロイドモデルの問題例を以下のように構成できる．E を $a_{ij}, b_{ij} > -\infty$ であるような対 (i, j) 全体の集合とする．各 $i \in M$ に対して E_i を i を含む E の要素全体として，同様に各 $j \in W$ に対して E_j を j を含む E の要素全体とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_M &= \{X \subseteq E \mid |X \cap E_i| \leq 1 \ (\forall i \in M)\}, \\
\mathcal{I}_W &= \{X \subseteq E \mid |X \cap E_j| \leq 1 \ (\forall j \in W)\}
\end{aligned}
$$

と定義される部分集合族 $\mathcal{I}_M$ と $\mathcal{I}_W$ はマトロイドの独立集合族となることが知られている．また，X がマッチングであるための必要十分条件は $X \in \mathcal{I}_M \cap \mathcal{I}_W$ となる．次に，E 上の全順序 $>_M$ と $>_W$ を，$a_{ij_1} > a_{ij_2} \Leftrightarrow (i, j_1) >_M (i, j_2)$，$b_{i_1j} > b_{i_2j} \Leftrightarrow (i_1, j) >_W (i_2, j)$ と定める．全順序の定義より，マッチング X が $\mathcal{M}_M\mathcal{M}_W$- カーネルであるための必要十分条件は任意の $(i, j) \notin X$ に対して，$(i, j') >_M (i, j)$ または $(i', j) >_W (i, j)$ である (i, j') または (i', j) が X に含まれることである．すなわち，$\mathcal{M}_M\mathcal{M}_W$- カーネル全体の集合は安定マッチング全体の集合と一致する．Fleiner [5] は任意のマトロイドモデルに対して $\mathcal{M}_M\mathcal{M}_W$- カーネルが存在することを示した．

江口–藤重 [3] は $\mathrm{M}^\natural$ 凹性を用いたモデルを提案している．これは，3節のモデルにおいて効用関数の実効定義域が超立方体に含まれ，E のすべての要素が厳格な場合に等しい．マトロイドモデルは線形効用関数を持つ場合の江口–藤重モデルとなっている．簡単の

ため, E の部分集合とその特性ベクトルを同一視する. $\mathcal{M}_M = (E, \mathcal{I}_M, >_M)$ と $\mathcal{M}_W = (E, \mathcal{I}_W, >_W)$ をマトロイドモデルの問題例とする. 全順序 $>_M$ と $>_W$ を正の数 $\{a_e\}$ と $\{b_e\}$ を用いて $a_{e'} > a_e \iff e' >_M e$ かつ $b_{e'} > b_e \iff e' >_W e$ となるように表現し, 効用関数 f_M と f_W を

$$f_M(X) = \begin{cases} \sum_{e \in X} a_e & (X \in \mathcal{I}_M) \\ -\infty & (X \notin \mathcal{I}_M), \end{cases} \qquad f_W(X) = \begin{cases} \sum_{v \in X} b_e & (X \in \mathcal{I}_W) \\ -\infty & (X \notin \mathcal{I}_W) \end{cases}$$

と定める. これらの関数はマトロイドの独立集合族上の線形関数で $\mathrm{M}^\natural$ 凹関数となることが知られている. マトロイド理論の基本的な定理から, 「X が $\mathcal{M}_M\mathcal{M}_W$- カーネルであることと, それが $f_M f_W$- 安定であることは一致する」ことが示せる. 江口–藤重は彼らのモデルが常に $f_M f_W$- 安定解を持つことを示した.

4.2 割当ゲームの拡張

Sotomayor [23] は, 各主体が反対サイドの複数の主体とパートナーシップを組める（ただし同一対の繰り返しは許されない）マッチング市場モデルでの安定解の存在を示した. また, Sotomayor [25] ではこのモデルの拡張がなされている. 拡張されたモデルでは M と W を雇用者と労働者の集合とみなし, 各雇用者 $i \in M$ は $\alpha_i > 0$ 単位の労働時間だけ雇用でき, 各労働者 $j \in W$ は $\beta_j > 0$ 単位の労働時間だけ働けるとする. 対 (i, j) は単位時間当り $c_{ij} (= a_{ij} + b_{ij})$ の利益を上げるとする. このモデルではマッチングを考える代わりに, i が j を雇用する時間を意味する x_{ij} から成るベクトルを用いる (このベクトルを労働配置 (labor allocation) と呼ぶ). 労働配置 $x \in \mathbf{Z}^{M \times W}$ が実行可能であるとは, $x \geq \mathbf{0}$ かつ次の 2 条件が成立することとする:

$$\sum_{j \in W} x_{ij} \leq \alpha_i \qquad (i \in M), \tag{4.1}$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \leq \beta_j \qquad (j \in W). \tag{4.2}$$

任意の部分集合 $M' \subseteq M$ と $W' \subseteq W$ に対して, $P(M', W')$ を全ての実行可能な労働配置の中での $\sum_{i \in M'} \sum_{j \in W'} c_{ij} x_{ij}$ の最大値とする. すなわち, 提携 $M' \cup W'$ が生む利益とする. 一方, $q \in \mathbf{R}^M$ と $r \in \mathbf{R}^W$ を合わせて貨幣配置 (money allocation) と呼び, $q \geq \mathbf{0}$, $r \geq \mathbf{0}$, かつ $q(M) + r(W) \leq P(M, W)$ を満たすとき実行可能という. ただし, $q(M) = \sum_{i \in M} q_i$, $r(W) = \sum_{j \in W} r_j$ とする. 貨幣配置 (q, r) がコアであるとは, それが実行可能でありかつすべての提携 $M' \subseteq M$, $W' \subseteq W$ に対して $q(M') + r(W') \geq P(M', W')$ と定義する. Sotomayor [25] は輸送問題

$$\text{Maximize} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad \text{subject to} \quad (4.1), (4.2), x \geq \mathbf{0}, \tag{4.3}$$

の双対最適解からコアの要素が導かれることを示した. このことはコアが非空であることを導く. すなわち, 3節の文脈では M♮ 凹関数

$$
f_M(x) = \begin{cases} \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & (\text{if } x \in \mathbf{Z}^E \text{ satisfies (4.1) and } x \geq \mathbf{0}) \\ -\infty & (\text{otherwise}), \end{cases} \tag{4.4}
$$

$$
f_W(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } x \in \mathbf{Z}^E \text{ satisfies (4.2) and } x \geq \mathbf{0}) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{4.5}
$$

を定義し, $f_M f_W$- 安定解 x とそれを規定する p から

$$
q_i = \sum_{j:x_{ij}>0} (c_{ij}+p_{ij})x_{ij} \quad (i \in M), \tag{4.6}
$$

$$
r_j = \sum_{i:x_{ij}>0} (-p_{ij})x_{ij} \quad (j \in W) \tag{4.7}
$$

と定めることでコアに属する貨幣配置 (q,r) が得られる. しかし, Sotomayor [25] の指摘のようにコアは双対最適解集合よりも真に大きくなることがあり, 逆は必ずしも成立しない ([25, Example 2] 参照).

4.3 ハイブリッドモデル

Eriksson–Karlander [4] は, 安定結婚モデルと割当ゲームのハイブリッド版と言えるものを提案した. このモデルでは, 主体が柔軟な主体と厳格な主体に分割されている. すなわち, M と W がそれぞれ (M_F, M_R) と (W_F, W_R) に分割されている. この主体の分割に伴い E を F と R に次のように分割する:

$$
R = \{(i,j) \in E \mid i \in M_R \text{ or } j \in W_R\}, \tag{4.8}
$$

$$
F = \{(i,j) \in E \mid i \in M_F \text{ and } j \in W_F\}. \tag{4.9}
$$

Sotomayor [24] はこのモデルを M と W の大きさが異なってもよい場合に拡張し, 拡張されたモデルでは解 $(q,r;X)$ が安定であることを次のように定めた:

(h1) X はマッチング,

(h2) すべての $(i,j) \in X$ に対して, $q_i + r_j = a_{ij} + b_{ij}$,

(h3) すべての $(i,j) \in X \cap R$ に対して, $q_i = a_{ij} > -\infty$ かつ $r_j = b_{ij} > -\infty$

(h4) i (j) が X において非飽和ならば, $q_i = 0$ $(r_j = 0)$,

(h5) $q \geq \mathbf{0}$, $r \geq \mathbf{0}$ かつすべての $(i,j) \in F$ に対して, $q_i + r_j \geq a_{ij} + b_{ij}$,

(h6) すべての $(i,j) \in R$ に対して, $q_i \geq a_{ij}$ または $r_j \geq b_{ij}$.

$E = R$ (または $E = F$) であるとき, 条件 (h1)~(h6) は明らかに (m1)~(m3) (または (a1)~(a4)) と同じである. このモデルの安定解の存在について, Eriksson–Karlander [4] は構成的な証明を, そして Sotomayor [24] は非構成的な証明を与えた. 本節での議論より3節のモデルはこのモデルも特殊ケースとして含んでいる.

参考文献

[1] Danilov V, Koshevoy G and Lang C (2003) Gross substitution, discrete convexity, and submodularity, *Discrete Appl. Math.* 131:283–298

[2] Danilov V, Koshevoy G and Murota K (2001) Discrete convexity and equilibria in economies with indivisible goods and money. *Math. Social Sci.* 41:251–273

[3] Eguchi A and Fujishige S (2002) An extension of the Gale-Shapley matching algorithm to a pair of $M^\natural$-concave functions. Discrete Mathematics and Systems Science Research Report 02-05, Osaka University

[4] Eriksson K and Karlander J (2000) Stable matching in a common generalization of the marriage and assignment models. *Discrete Math.* 217:135–156

[5] Fleiner T (2001) A matroid generalization of the stable matching polytope. In: Gerards B and Aardal K (eds.) *Proceedings of the 8th International IPCO Conference*, LNCS 2081. Springer-Verlag, Berlin, pp.105–114

[6] Fleiner T (2003) A fixed point approach to stable matchings and some applications. *Math. Oper. Res.* 28:103–126

[7] Fujishige S and Tamura A (2003) A general two-sided matching market with discrete concave utility functions. RIMS Preprints No. 1401, Kyoto University.

[8] Fujishige S and Yang Z (2003) A note on Kelso and Crawford's gross substitutes condition. *Math. Oper. Res.* 28:463–469.

[9] Gale D and Shapley L S (1962) College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly* 69:9–15

[10] Gul F and Stacchetti F (1999) Walrasian equilibrium with gross substitutes. *J. Econom. Theory* 87:95–124

[11] Kaneko M (1982) The central assignment game and the assignment markets. *J. Math. Econom.* 10:205–232

[12] Kelso Jr. A S and Crawford V P (1982) Job matching, coalition formation, and gross substitutes. *Econometrica* 50:1483–1504

[13] Murota K (1996) Convexity and Steinitz's exchange property. *Adv. Math.* 124:272–311

[14] Murota K (1998) Discrete convex analysis. *Math. Programming* 83:313–371

[15] 室田一雄 (2001) 離散凸解析. 共立出版, 東京

[16] Murota K (2003) *Discrete Convex Analysis.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia

[17] Murota K and Shioura A (1999) M-convex function on generalized polymatroid. *Math. Oper. Res.* 24:95–105

[18] Murota K and Shioura A (2001) Relationship of M-/L-convex functions with discrete convex functions by Miller and by Favati–Tardella. *Discrete Appl. Math.* 115:151–176

[19] Murota K and Tamura A (2003) New characterizations of M-convex functions and their applications to economic equilibrium models with indivisibilities. *Discrete Appl. Math.* 131:495–512.

[20] Roth A E and Sotomayor M A O (1990) *Two-Sided Matching — A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge

[21] Roth A E and Sotomayor M A O (1996) Stable outcomes in discrete and continuous models of two-sided matching: A unified treatment. *Rev. Econom.* 16:1–24

[22] Shapley L S and Shubik M (1972) The assignment game I: The core. *Internat. J. Game Theory* 1:111–130

[23] Sotomayor M (1999) The lattice structure of the set of stable outcomes of the multiple partners assignment game. *Internat. J. Game Theory* 28:567–583

[24] Sotomayor M (2000) Existence of stable outcomes and the lattice property for a unified matching market. *Math. Social Sci.* 39:119–132

[25] Sotomayor M (2002) A labor market with heterogeneous firms and workers. *Internat. J. Game Theory* 31:269–283