# 制御差分方程式について

岩本 誠一

〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-19-1
九州大学 経済学研究院
経済工学部門
tel&fax. +81(92)642-2488, email: iwamoto@en.kyushu-u.ac.jp

**概 要**

この報告では差分方程式を動的計画法の視点から考える。動的計画法は運動法則に応じて通常、(1) 確定的と (2) 確率的に分けられる。しかし、差分方程式自身を動的計画法の再帰式と考えるとき、(1),(2) のいずれでもない第３の (3) 非決定性を導入する必要があることを示す。特に、制御差分方程式を新たに構想して、これが非決定性動的計画法の最適方程式に他ならないことを示す。

## 1 はじめに

動的計画法では状態推移に通常２通りある。(1) 確定的と (2) 確率的である。(1) では、任意の状態で決定をとると、次の状態が唯一確定的に定まる。(2) では、複数の可能な状態が確率分布に従って定まる。すなわち、次の状態へ推移する確率の和は１である。これを単位和性 (unit-sum property) と呼ぼう。確定的推移は、特定の状態のみに確率 1 で移る、とみなせる。したがって、(1) でも単位和性が成り立っている。

しかし、現実には (1) でもなく (2) でもない状態推移がたくさん考えられる。たとえば、差分方程式にその例をみることができる。フィボナッチ数列を例にとろう [20, p.73]。これは２階差分方程式

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \ f_1 = c,\ f_0 = d$$

によって与えられる。ここでは、最初の二日の初期値を与えて、今日と明日の値を加えて明後日の値として次々と数値が発生されている。

しかし、非決定性動的計画法ではこれを次のように逆向きに考える。各状態 $n$ が一回に２つの状態 $(n-1)$ と $(n-2)$ に同時に分岐し、各々が最終的に１か０になるまで分岐し続け、状態 1, 0 に到着すると、リターン $c$, $d$ がそれぞれ生じるとみる。任意に与えられた初期状態 $n$ からスタートしたとき終端状態（の１か０）になるまで全リターン（合計）はいくらになるだろうか？

さて、以下では確率（特に推移確率）の概念に拘泥しないで、加重（特に推移加重）という概念を導入しよう。すなわち、加重値は負も許すが、全体として単位和性を仮定しな

い。次の状態への推移加重の和は1とは限らない。たとえば、フィボナッチ数列での非決定性推移である「状態 $n$ が2つの状態 $(n-1)$ と $(n-2)$ に同時に分岐する」ということを、「推移加重1でともに状態 $(n-1)$ と $(n-2)$ に移動する」ととらえる。

以下では、確率ではなく広義の重さ (weight) という加重を前提として状態推移を考える。これを一般的に表せば、次のようになる。「状態 $n$ が推移加重 $\beta(n,n-1)$, $\beta(n,n-2)$ で2つの状態 $(n-1)$ と $(n-2)$ に移動する」と解釈する。さらに、この推移に対して、リターン $a(n)$ が発生するとしよう。このとき、2階非斉次変数係数差分方程式

$$f_n = \beta(n,n-1)f_{n-1} + \beta(n,n-2)f_{n-2} + a(n), \quad f_1 = c,\ f_0 = d$$

が考えられる。さて、この $f_n$ はいかなる量を表しているだろうか。

非決定性逐次システムの研究はオートマトン論にさかのぼる [7,17]。オートマトン上での評価系は再帰的で、0,1値をとる終端型が対応していると考えられる。[8,14] では、再帰的な評価の中で加法型、最小型の評価が導入されている。一般に、オートマトン論では受理能力を中心とした認識を主テーマとしている。非決定性動的計画法の具体例として、コンピュータサイエンス上の例が僅かに [11–13] にみられるが、オートマトン論を除けば、非決定性システム上の動的計画法の研究はまだ十分に研究さているとは言い難い [1–5, 9, 10, 15, 16, 18, 19]。分割問題 (splitting problem) は非決定性動的計画法になっている [6]。本報告では、制御差分方程式を非決定性動的計画法としてとらえている。

## 2 ジョッギング・コース問題

まず、簡単な問題としてジョッギング・コースの総数を考えよう。ここに、周囲が 2 $km$ の○型トラック $C$ と 3 $km$ の△型トラック $T$ がスタート地点 $S$ を共有している競技場がある。$S$ を始発とし、終点とするジョッギング・コースを考える。

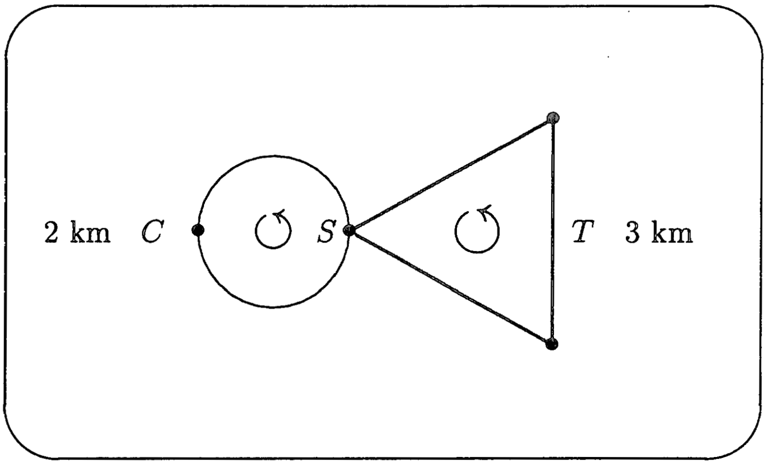


図1 ショート・トラックとロング・トラックの競技場

2 以上の整数 $n$ を与えて、$n$ $km$ のコースの総数を $f(n)$ とする。$\{f(n)\}_{n\geq 2}$ は差分方程式

$$\begin{cases} f(n) = f(n-2)+f(n-3) & n\geq 5 \\ f(2)=f(3)=f(4)=1 \end{cases} \tag{1}$$

を満たす。コースの総数は表.1 のようになる：

| $n$ | $f(n)$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 2 |
| 6 | 2 |
| 7 | 3 |
| 8 | 4 |
| 9 | 5 |
| 10 | 7 |
| 15 | 28 |
| 20 | 114 |
| 42 | 55405 |
| 43 | 73396 |
| 100 | $6.70977E+11$ |

表.1　$n$-$km$ コースの総数

# 3　動的計画法

ここでは、差分方程式 (1) を非決定性推移法則をもつ、最適化を伴わない、動的計画法と考える。すなわち、ある時点の状態 $n$ が次に 2 つの状態 $(n-2)$ と $(n-3)$ に同時に推

移すると考え、「推移加重 1 でともに状態 $(n-2)$ と $(n-3)$ に移動する」ととらえる。

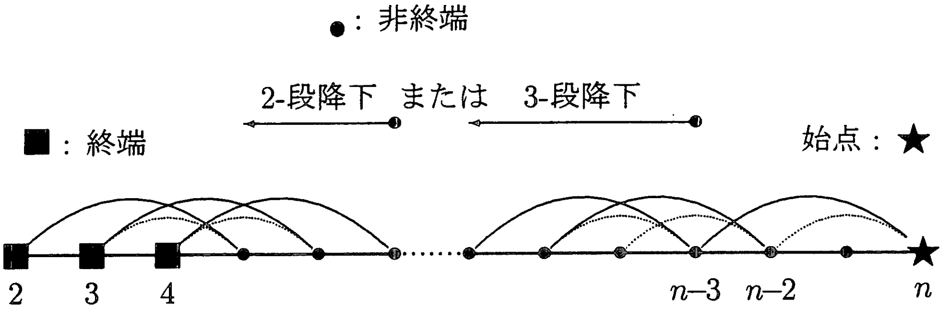


図 2 ★ から ■ への経路総数は?

さて、**状態空間** $\mathcal{S}=\{2,3,\dots\}$ 上のある非決定性システムを考えよう (図 2)。状態空間 $\mathcal{S}$ は **終端状態集合** $\mathcal{T}=\{2,3,4\}$ と **非終端状態集合** $\mathcal{N}=\{5,6,\dots\}$ に分割されている。非終端状態 $n$ は一回の推移で **2 つの次状態** $(n-2)$ と $(n-3)$ に移動する。このシステムではどの非終端状態も一つの終端状態になるまで推移を繰り返す。このとき、任意の状態 $n$ からスタートしたとき、終端状態集合 $\mathcal{T}$ に入るまでの経路の総数 $f(n)$ が問題になる。実際、 $\{f(n)\}$ は差分方程式 (1) を満たす。これを解いて総数が求められる。

たとえば、$n=11$ からスタートした経路の全体は図 3 で示されている。

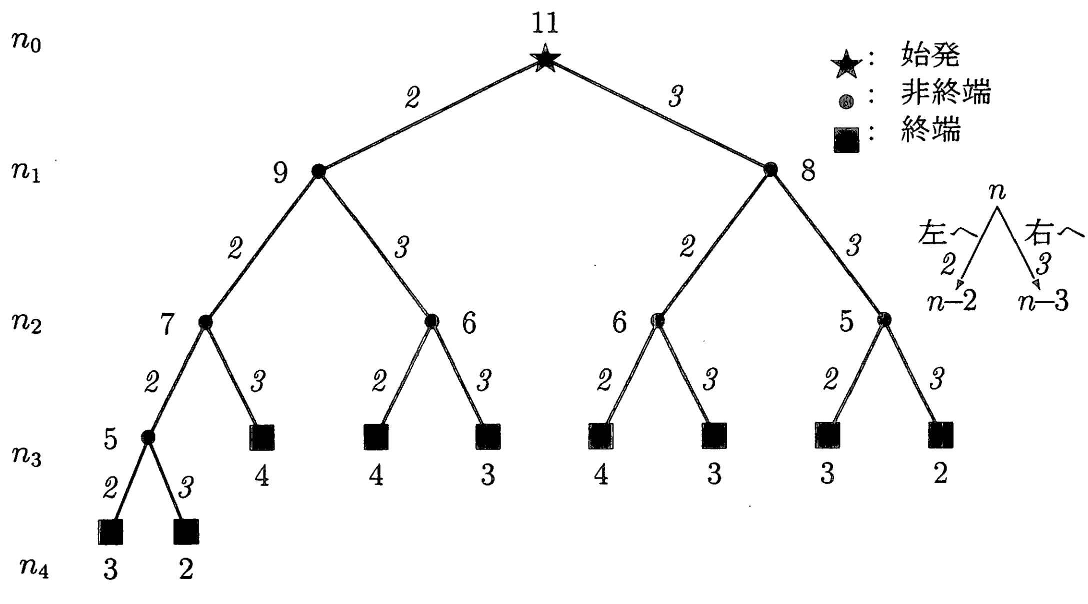


図 3　11 からの経路総数 $f(11)=9$

いま $S(n)$ を $n$ から終端集合 $\mathcal{T}=\{2,3,4\}$ への **軌道** $t=(n_1,n_2,\ldots,n_i)$ の全体とする：

$$S(n)=\left\{t=(n_1,n_2,\ldots,n_i)\;\middle|\;\begin{array}{l} n_0=n,\quad n_i=2,\ 3 \text{ or } 4 \text{ for } i\geq 1, \\ n_{j+1}=n_j-2 \text{ or } n_j-3 \quad 0\leq j\leq i-1 \end{array}\right\}$$

このとき、族 $\{S(n)\}$ は再帰式

$$\begin{cases} S(n)\ =\ (n-2)S(n-2)\oplus(n-3)S(n-3) & n\geq 5 \\ S(n)=\emptyset \quad n=2,3,4 \end{cases}$$

を満たす。ただし、$\oplus$ は排反和集合演算で、$\emptyset$ は空集合、

$$kS(m)=\{(k,p)\,|\,p\in S(m)\}.$$

実際、族は次のようになる：

$$\begin{aligned}
S(5)\ &=\ \{(3),(2)\} \\
S(6)\ &=\ \{(4),(3)\} \\
S(7)\ &=\ \{(5,3),(5,2),(4)\} \\
S(8)\ &=\ \{(6,4),(6,3),(5,3),(5,2)\} \\
S(9)\ &=\ \{(7,5,3),(7,5,2),(7,4),(6,4),(6,3)\} \\
S(10)\ &=\ \{(8,6,4),(8,6,3),(8,5,3),(8,5,2),(7,5,3),(7,5,2),(7,4)\} \\
S(11)\ &=\ \{(9,7,5,2),(9,7,5,3),(9,7,4),(9,6,4),(9,6,3),(8,6,4),(8,5,3),(8,5,2)\}
\end{aligned}$$

また $f(n)$ を集合 $S(n)$ の要素の数とする。ただし、$n=2,3,4$ のとき，$f(n)=1$. このとき、差分方程式 (1) が成り立つ。

# 4 制御差分方程式

ここでは、最適化の立場から前述の差分方程式を考えよう。まず、4 階差分方程式

$$\begin{cases} g(n)\ =\ g(n-1)+g(n-4) & n\geq 5 \\ g(1)=g(2)=g(3)=g(4)\ =\ 1 \end{cases} \tag{2}$$

を考えよう。これに対しても、前述のように軌道全体を導入して、その総数の**評価**が考えられる。

しかし、ここでは差分方程式 (1) と (2) の**最大化**を次のように考えよう。

$$\begin{cases} h(n)\ =\ \mathrm{Max}\begin{cases} a(n)+h(n-2)+h(n-3) \\ b(n)+h(n-1)+h(n-4) \end{cases} & n\geq 5 \\ h(1)=1,\ h(2)=2,\ h(3)=h(4)\ =\ 1 \end{cases} \tag{3}$$

ここに非斉次項 $a = \{a(n)\}$ と $b = \{b(n)\}$ は任意とする：

$$a, b : \{5, 6, \ldots\} \to R^1.$$

ただし、初期値は $h(2) = 2$ としておく。

ここでは式 (3) を**制御差分方程式**という。これを「ある」動的計画法の**最適方程式**（ベルマン方程式）と考えよう。これは、どのような最適化問題をどのような動的計画法でどのように導いた最適方程式であろうか？　以下、これに応えよう。

以下では、次のような決定を伴う非決定性推移と加法的な評価を持っているシステムを考える。**状態空間** $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ を**終端状態集合** $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$ と **非終端状態集合** $\mathcal{N} = \{5, 6, \ldots\}$ に分割して、$\mathcal{S}$ 上のある非決定性最適化システムを考えよう (図 4)。各非終端状態 $n (\in \mathcal{N})$ では 2 つの決定 $a$ と $b$ のいずれか一方が選択される。2 点集合 $\mathcal{D} = \{a, b\}$ を**決定空間**という。$a$ を選択すると、 $n$ は**2つの次状態** $(n-2)$ と $(n-3)$ に移動する。このとき、$a(n)$ 単位の**リターン**（利得）が発生する。また、$b$ を選択すると、$(n-1)$ と $(n-4)$ に移動して、$b(n)$ 単位のターンが発生する。任意の状態 $n$ からスタートしたとき、このような状態推移を繰り返しながら、すべての経路が終端状態集合 $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$ に入るまで、推移する。ただし、終端状態 1, 3 または 4 で終わると、1 単位リターンが追加されるが、2 で終わると、2 単位追加される。

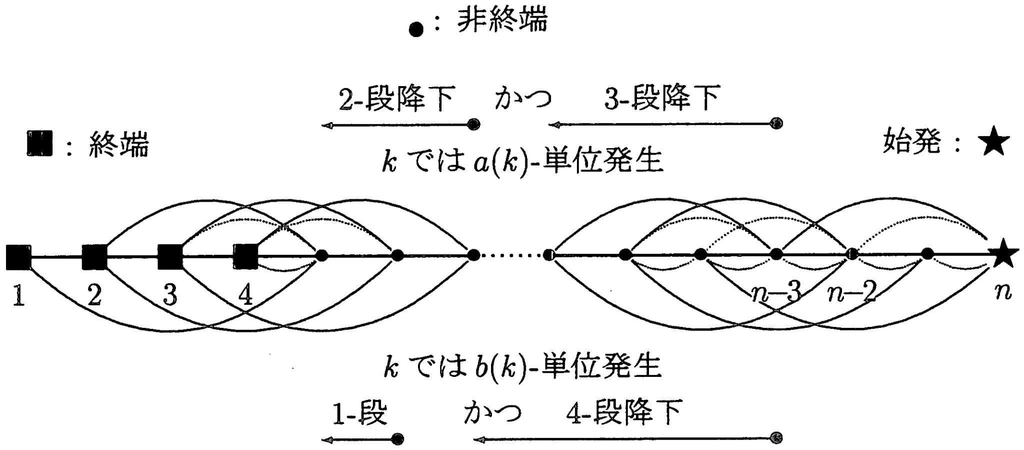


図 4　非終端状態 $k$ $(5 \le k \le n)$ では、（上段、下段の）どちらを選択？

さて、政策とそれに付随する停止時刻を導入しよう。点対集合値写像　$\pi : \mathcal{N} \to \{a, b\}$ を**政策** policy という。 $\pi(n)$ は 非終端状態 $n$ での $a$ または/かつ $b$ の選択を表している。政策の全体 $\Pi$ を**政策クラス**という。政策 $\pi^* (\in \Pi)$ は、初状態 $n$ からの決定列 $\{\pi^*(n), \pi^*(n-1), \ldots, \pi^*(5)\}$ が（以下に述べる）総リターンを政策クラスの中で最大にするとき、状態 $n$ で**最適**という。任意の非終端状態で最適な政策を単に**最適政策**という。

以下では、政策クラス $\Pi$ の中で最適政策 $\pi^*$ を求める。$h(n)$ を $n$ からの最大利得とすると、最適値関数 $h$ は再帰式 (3) を満たす。$\pi^*(n)$ を (3) の $n$ における最大点の全体とすると、最適政策 $\pi^*$ が得られる。

## 5′ 非決定性動的計画の例

前節の差分方程式、制御差分方程式の解を具体的に考えよう。ここでは非決定性システムとして2つの差分方程式

$$\begin{cases} f(n) \;=\; f(n-2)+f(n-3) & n \geq 5 \\ f(2)=2,\; f(3)=f(4) \;=\; 1, & \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(n) \;=\; g(n-1)+g(n-4) & n \geq 5 \\ g(1)=1,\; g(2)=2,\; g(3)=g(4) \;=\; 1, & \end{cases}$$

およびこれを組み合わせた制御差分方程式

$$\begin{cases} h(n) \;=\; \mathrm{Max}\begin{cases} h(n-2)+h(n-3) \\ h(n-1)+h(n-4) \end{cases} & n \geq 5 \\ h(1)=1,\; h(2)=2,\; h(3)=h(4) \;=\; 1 & \end{cases}$$

を考える。3つの値 $f(n),\ g(n),\ h(n)$ と最適政策 $\pi^*$ が表2に示されている。

| $n$ | $f(n)$ | $g(n)$ | $h(n)$ | $\pi^*(n)$ | $h(n-2)$ $+h(n-3)$ | $h(n-1)$ $+h(n-4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 1 | | | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | | | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 5 | 3 | 2 | 3 | $a$ | 3 | 2 |
| 6 | 2 | 4 | 5 | $b$ | 2 | 5 |
| 7 | 4 | 5 | 6 | $b$ | 4 | 6 |
| 8 | 5 | 6 | 8 | $a$ | 8 | 7 |
| 9 | 6 | 8 | 11 | $a, b$ | 11 | 11 |
| 10 | 9 | 12 | 16 | $b$ | 14 | 16 |
| 11 | 11 | 17 | 22 | $b$ | 19 | 22 |
| 12 | 15 | 23 | 30 | $b$ | 27 | 30 |
| 13 | 20 | 31 | 41 | $b$ | 38 | 41 |
| 14 | 26 | 43 | 57 | $b$ | 52 | 57 |
| 15 | 35 | 60 | 79 | $b$ | 71 | 79 |
| $\vdots$ | | | | | | |
| 20 | 107 | 217 | 395 | $b$ | 357 | 395 |
| $\vdots$ | | | | | | |
| 42 | 68,986 | 359,779 | 473,830 | $b$ | 428,896 | 473,830 |
| 43 | 91,387 | 496,595 | 654,017 | $b$ | 591,994 | 654,017 |

表 2　最適解; 最大値関数 $h$ と最適政策 $\pi^*$

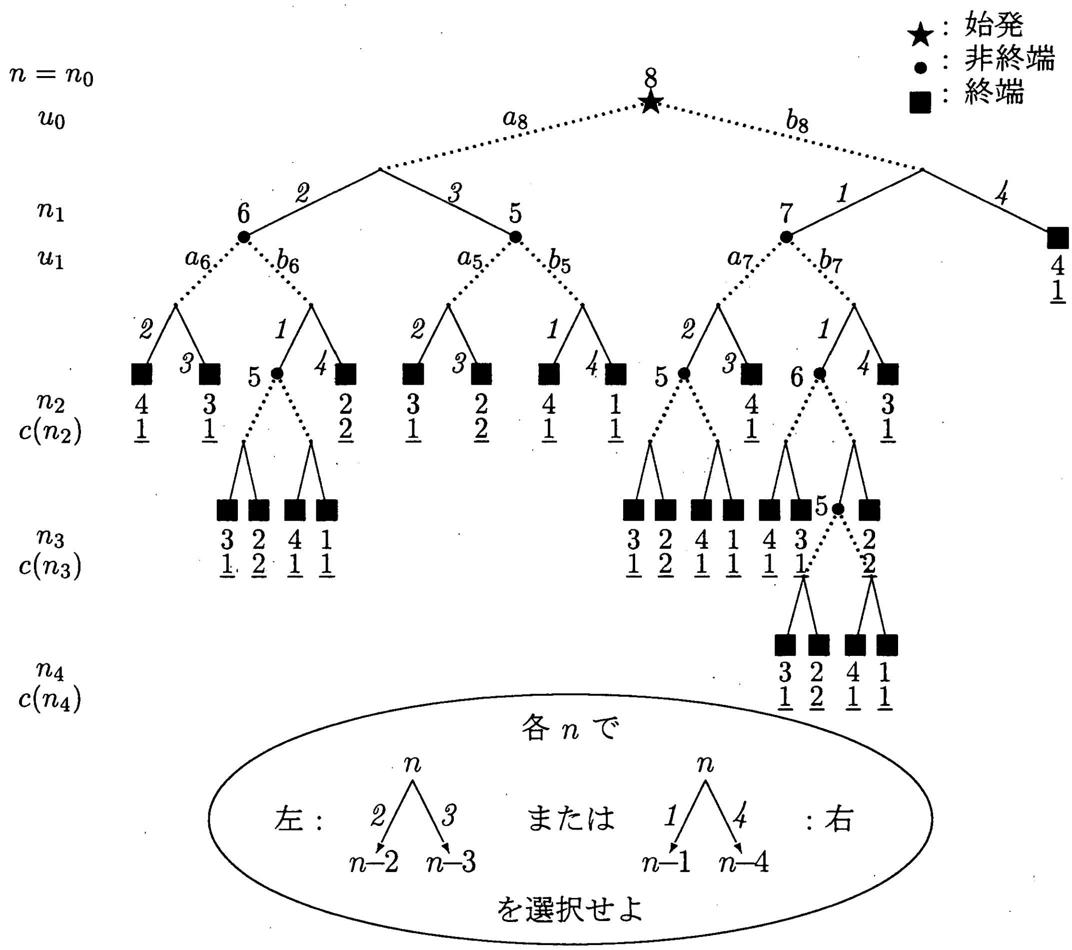

図 5　8 からの決定樹表

図 5 は $n = 8$ からスタートする問題を表している。これは、以下の非終端状態 $n = 8, 7, 6, 5$ で決定 $u_n = a_n$ (左) または $u_n = b_n$ (右) のどちらかを選択して終端状態集合 $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$ に入るまでの経路の「総数」を最小にする問題である。ただし、■ = 2 に至る経路は二重にカウントする。これを図 5 では 2 の下に下線 $\underline{2}$ を付けて表している。

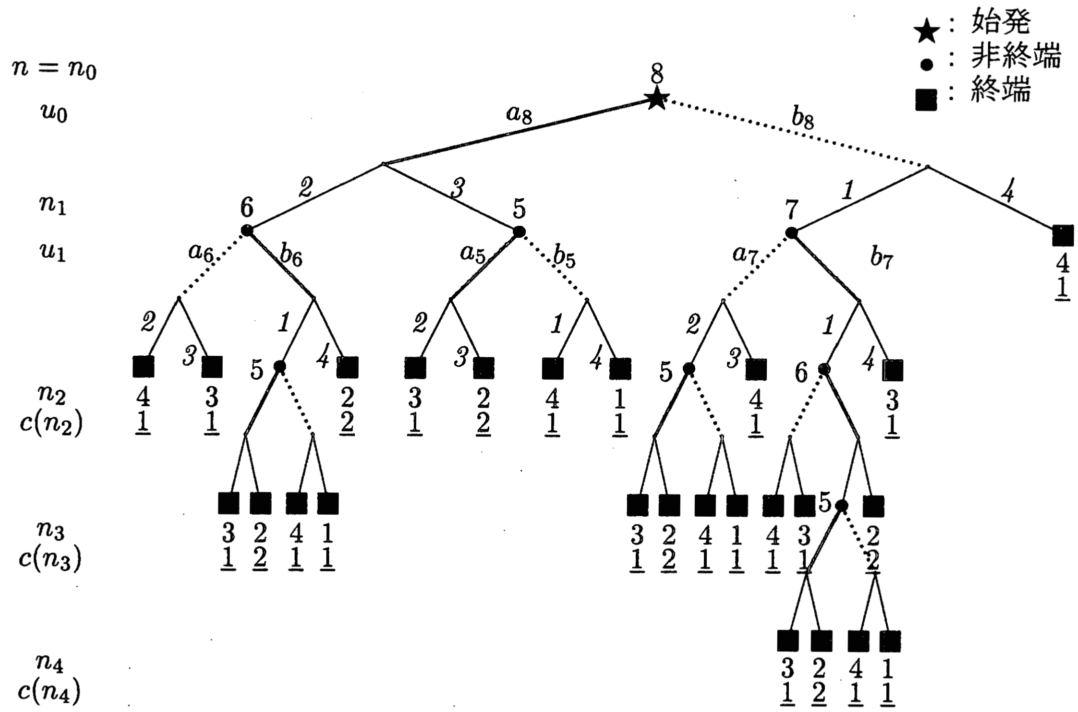


図 6　8 からの最適決定樹表

最適政策は以下の通り：$n = 8$ では $u_8 = a_8$ (左), $n = 7$ では $u_7 = b_7$ (右), $n = 6$ では $u_6 = b_6$ (右), $n = 5$ では $u_5 = a_5$ (左)。この最適政策は表 2 でも表されているように

$$\pi^*(8) = a,\quad \pi^*(7) = b,\quad \pi^*(6) = b,\quad \pi^*(4) = a.$$

図 6 では最適決定は実線で示している。全体で 5 つの経路（その $\underline{値}$）

$$8 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3\ (\ \underline{1}\ )$$
$$8 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2\ (\ \underline{2}\ )$$
$$8 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2\ (\ \underline{2}\ )$$
$$8 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3\ (\ \underline{1}\ )$$
$$8 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2\ (\ \underline{2}\ )$$

が最大値 $\underline{1} + \underline{2} + \underline{2} + \underline{1} + \underline{2} = 8$ を与えている。従って、$h(8) = 8$ (表 2 参照).

# 6　2階線形差分方程式

ここでは、実定数係数 $p, q$ と非斉次項 $a(n)$ をもつ2階線形差分方程式

$$\begin{cases} f(n) \;=\; a(n) + p\cdot f(n-1) + q\cdot f(n-2) & n \geq 3 \\ f(1) \;=\; c(1), \quad f(2) \;=\; c(2) & \end{cases} \tag{4}$$

における値 $f(n)$ を、直接解くことなく、所与データで表すことを考える。すなわち、初期値 $c(1), c(2)$、係数 $p, q$、非斉次項 $a(n)$、および始発状態 $n = n_0$ による $f(n)$ の表現を与える。

さて、**状態空間** $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ を**終端状態集合** $\mathcal{T} = \{1, 2\}$ と **非終端状態集合** $\mathcal{N} = \{3, 4, \ldots\}$ に分割して、$\mathcal{S}$ 上のある非最適化 (評価) システムを考えよう。初期状態 $n\ (\in \mathcal{S})$ を固定する。列 $h = (n_0, n_1, \ldots, n_t, \ldots)$ は

$$n_0 = n, \quad n_{t+1} = n_t - 1 \text{ or } n_t - 2 \quad t = 0, 1, \ldots$$

を満たすとき、$n_0 = n$ からの**経路** (path) という。 $n$ からの任意の経路 $h$ に対して終端集合 $\mathcal{T} = \{1, 2\}$ への **停止時刻** $\tau(h)$ を次で定義する：

$$\tau(h) := \min\{t \geq 0 \,|\, n_t \in \mathcal{T}\}.$$

時刻 $\tau$ は値 $l(n_0), l(n_0)+1, \ldots, n_0 - 2$ をとる。ただし、

$$l(n) = \begin{cases} \dfrac{n-2}{2} & n: \text{偶数} \\ \dfrac{n-1}{2} & n: \text{奇数} \end{cases}$$

以下、任意の経路 $h$ を停止時刻で打ち切られた (terminated) 形で表す：

$$h = (n_0, n_1, \ldots, n_{\tau-1}, n_\tau), \quad \tau = \tau(h).$$

(打ち切られた) 経路の全体 $H$ を**経路空間**という。

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\text{時刻}: & 0 & & 1 & & \cdots & & l-2 & & l-1 & & l & \cdots & u-1 \\
 & \mathcal{N} & & \mathcal{N} & & & & \mathcal{N} & & \mathcal{N} & & \mathcal{N} & & \mathcal{N} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\text{状態}: & n_0 & \longrightarrow & n_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & n_{l-2} & \longrightarrow & n_{l-1} & \longrightarrow & n_l & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & n_{u-1} \\
 & & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \text{状態}: & & & & & n_l & & n_{l+1} & & n_u \\
 & & & & & & & & & \rotatebox{-90}{$\in$} & & \rotatebox{-90}{$\in$} & & \rotatebox{-90}{$\in$} \\
 & & & & & & & & & \mathcal{T} & & \mathcal{T} & & \mathcal{T} \\
 & & & & \text{時刻}: & & & & & l & & l+1 & \cdots & u
\end{array}$$

図 7 $n_0$ から打ち切りまでの状態の流れ、ただし $l = l(n_0)$, $u = n_0 - 2$

さて、任意の経路 $h = (n_0, n_1, \ldots, n_{\tau-1}, n_\tau) \in H$ と時刻 $t$ $(0 \le t \le \tau(h))$ に対して

$$h_t := (n_0, n_1, \ldots, n_{t-1}, n_t)$$

を $h$ の $t$ までの部分経路という。$t$ までの部分経路の全体を $H_t$ で表し、**$t$-部分経路空間**という。さらに、$H_t$ を次のように 2 分割する。$H_t(\mathcal{N})$ $(H_t(\mathcal{T}))$ を $t$ 番目の状態が非終端（終端）である部分経路 $h_t$ の全体とする：

$$\begin{aligned} H_t(\mathcal{N}) &= \left\{(n_0, n_1, \ldots, n_t) \in H_t \;\middle|\; n_t \in \mathcal{N} \right\} \qquad 0 \le t \le n_0 - 3 \\ H_t(\mathcal{T}) &= \left\{(n_0, n_1, \ldots, n_t) \in H_t \;\middle|\; n_t \in \mathcal{T} \right\} \qquad l(n_0) \le t \le n_0 - 2. \end{aligned}$$

$n_t$ から $n_{t+1}$ への (1-段) **推移加重** $\mu(n_t, n_{t+1})$ を

$$\mu(n_t, n_{t+1}) := \begin{cases} p & n_{t+1} = n_t - 1 \\ q & n_{t+1} = n_t - 2 \end{cases}$$

で定義する。非決定性システム (4) では、状態 $n$ が加重 $p, q$ でそれぞれ 2 つの状態 $(n-1)$, $(n-2)$ に推移して、**リターン** $a(n)$ を生むと考える。しかし、このリターンはそれまでの経路による加重を乗じて評価される。一連の推移を経て終端状態 $i$ $(\in \mathcal{T})$ に到達したとき、**終端リターン** $c(i)$ が経路に沿った加重値が加算される。すなわち、任意の部分経路 $h_t = (n_0, n_1, \ldots, n_t)$ はその **加重**

$$W(h_t) := \mu(n_0, n_1)\mu(n_1, n_2) \cdots \mu(n_{t-1}, n_t)$$

をもつと考える。このとき、最後の時刻 $t$ での状態 $n_t$ が非終端 $n_t \in \mathcal{N}$ のときは、非終端リターン $a(n_t)$ を加重値

$$W(h_t)a(n_t)$$

で評価する。また、状態 $n_t$ が終端 $n_t \in \mathcal{T}$ のときは、終端リターン $c(n_t)$ を加重値

$$W(h_t)c(n_t)$$

で評価する。さらに、部分経路 $h_t$ 全体にわたってこれらの加重値を合算する。すなわち、時刻 $t$ では次の 2 種類の評価値が考えられる：

- $0 \le t \le n_0 - 3$ のとき、非終端リターンの加重値の多重和

$$\sum \cdot \cdot \sum_{h_t \in H_t(\mathcal{N})} W(h_t)a(n_t).$$

- $l(n_0) \le t \le n_0 - 2$ のとき、終端リターンの加重値の多重和

$$\sum \cdot \cdot \sum_{h_t \in H_t(\mathcal{T})} W(h_t)c(n_t).$$

したがって、$n_0 \in \mathcal{N}$ のとき

$$J(n_0) \;:=\; \sum_{t=0}^{n_0-3}\left[\sum_{h_t\in H_t(\mathcal{N})}\!\cdot\!\cdot\sum W(h_t)a(n_t)\right] + \sum_{t=l(n_0)}^{n_0-2}\left[\sum_{h_t\in H_t(\mathcal{T})}\!\cdot\!\cdot\sum W(h_t)c(n_t)\right], \tag{5}$$

$n_0 \in \mathcal{T}$ のとき、$J(n_0) := c(n_0)$ とする。このようにして、**全評価関数** $J : \mathcal{S} \to R^1$ が定義される。

したがって、任意の $n\ (\in \mathcal{S})$ に対して、評価問題

$$\mathrm{P}(n) \qquad \text{Evaluate} \quad J(n)$$

が考えられる。$f(n)$ を $\mathrm{P}(n)$ の値とする。このとき、値関数 $f$ は前述の 2 階線形差分方程式 (4) を満たすことが分かる。

さて、2 階線形差分方程式

$$\begin{cases} f(n) \;=\; n + f(n-1) + 2f(n-2) \qquad n \geq 3 \\ f(1) \;=\; -1, \;\; f(2) \;=\; 1 \end{cases} \tag{6}$$

について、 $f(n)$ に対する上述の表現 (5) が成り立つことを観よう。(6) は解析解

$$f(n) = -\frac{1}{2}n - \frac{5}{4} + \frac{7}{12}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n.$$

を持つ。したがって、

$$f(3) = 2, \quad f(4) = 8, \quad f(5) = 17, \quad f(6) = 39, \; \ldots .$$

である。

さて、次の図8は $f(6) = \mathbf{39}$ を示している。実際、

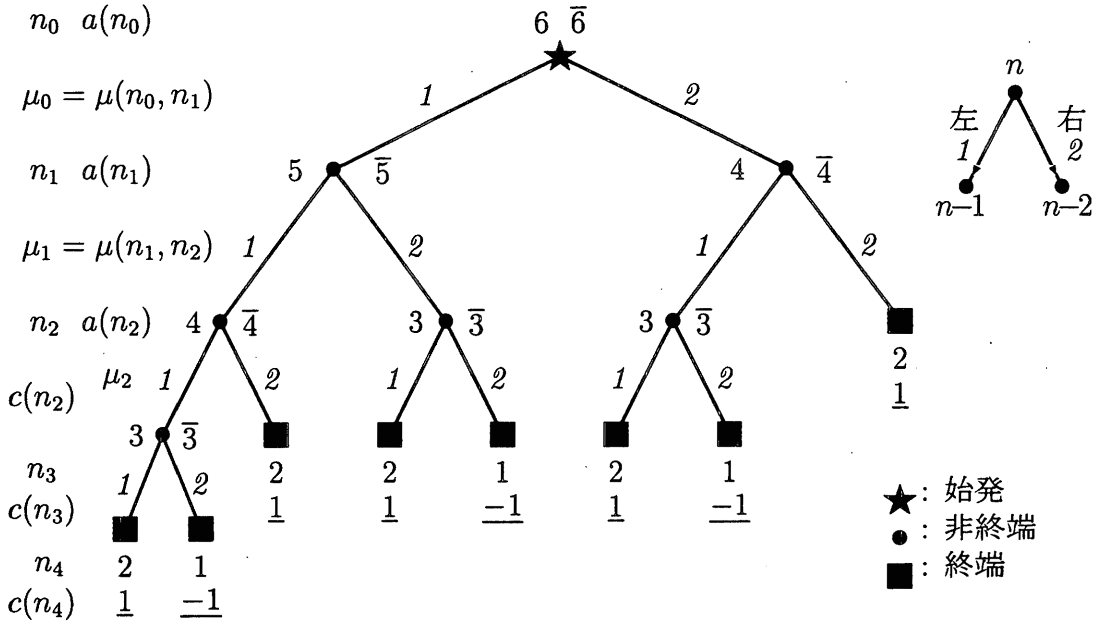


図8　6からの全評価値

図8では、全体の評価値は次のようになる。第0段では、状態 $n_0 = 6$ で非終端リターン $a(n_0) = a(6) = \overline{6}$ が得られる。以後、上線つき数値 $\overline{n}$ は非終端状態 $n$ のリターンとする。

段1では、状態 $n_1 = 5$ での非終端リターン $a(n_1) = a(5) = \overline{5}$ と $n_1 = 4$ での非終端リターン $a(4) = \overline{4}$ がある。2つのリターン $\overline{5}$ と $\overline{4}$ は推移 $n_0 = 6 \to n_1 = 5$ と $n_0 = 6 \to n_1 = 4$ による加重 $\mu(n_0, n_1) = \mu(6,5) = \mathit{1}$ と $\mu(6,4) = \mathit{2}$ でそれぞれ評価される。ここでイタリック体の数値 $\mathit{n}$ は1段加重値を表す。これを次のよう $n_0 = 6 \xrightarrow{\mathit{1}} n_1 = 5$ と $n_0 = 6 \xrightarrow{\mathit{2}} n_1 = 4$ で表す。さらに、簡単に $6 \xrightarrow{\mathit{1}} 5$ と $6 \xrightarrow{\mathit{2}} 4$ とする。したがって、段1では和の値 $\mathit{1}\cdot\overline{5}+\mathit{2}\cdot\overline{4}$ が評価値である。

段2では、4つの状態 $n_2 = 4, 3, 3, 2$ におけるリターン $\overline{4}, \overline{3}, \overline{3}, \underline{1}$ がある。前3つは非終端であり、最後は終端である。4つは経路加重値 $6 \xrightarrow{\mathit{1}} 5 \xrightarrow{\mathit{1}} 4$, $6 \xrightarrow{\mathit{1}} 5 \xrightarrow{\mathit{2}} 3$, $6 \xrightarrow{\mathit{2}} 4 \xrightarrow{\mathit{1}} 3$, $6 \xrightarrow{\mathit{2}} 4 \xrightarrow{\mathit{2}} 2$ によってそれぞれ評価される。したがって、段2での評価値は $\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\overline{4} + \mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot\overline{3} + \mathit{2}\cdot\mathit{1}\cdot\overline{3} + \mathit{2}\cdot\mathit{2}\cdot\underline{1}$ である。

同様に、段3では、和の値 $\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\overline{3}+\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot\underline{1}+\mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot\mathit{1}\cdot\underline{1}+\mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot\mathit{2}\cdot(\underline{-1})+\mathit{2}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\underline{1}+\mathit{2}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot(\underline{-1})$ が評価される。 最後の段4では、$\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\underline{1} + \mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot(\underline{-1})$ が評価に加えられる。

したがって、全体の評価値は

$$
\begin{aligned}
& \overline{6} \\
& + \mathit{1}\cdot\overline{5} + \mathit{2}\cdot\overline{4} \\
& + \mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\overline{4} + \mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot\overline{3} + \mathit{2}\cdot\mathit{1}\cdot\overline{3} + \mathit{2}\cdot\mathit{2}\cdot\underline{1} \\
& + \mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\overline{3} + \mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot\underline{1} + \mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot\mathit{1}\cdot\underline{1} + \mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot\mathit{2}\cdot(\underline{-1}) + \mathit{2}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\underline{1} + \mathit{2}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot(\underline{-1}) \\
& + \mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\underline{1} + \mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{1}\cdot\mathit{2}\cdot(\underline{-1}) \\
= {} & 39
\end{aligned}
$$

となり、6 に対する次の値が得られる：

$$f(6) = \mathbf{39}.$$

さらに、

$$f(5) = \mathbf{17}, \quad f(4) = \mathbf{8}$$

になる。したがって、

$$f(6) = 6 + f(5) + 2f(4)$$

が成り立っている。

## 7 制御差分方程式に対する非決定性動的計画法

さて、式 (3) の型の制御差分方程式：

$$
\begin{cases}
h(n) = \mathrm{Max}\begin{cases} a(n) + p_1\cdot h(n-2) + q_1\cdot h(n-3) \\ b(n) + p_2\cdot h(n-1) + q_2\cdot h(n-4) \end{cases} & n \geq 5 \\
h(n) = c(n) \qquad n = 1, 2, 3, 4
\end{cases}
\tag{7}
$$

を考えよう。ただし、

$$a, b : \{5, 6, \dots\} \to R^1, \quad c : \{1, 2, 3, 4\} \to R^1, \quad p_1, q_1, p_2, q_2 \geq 0.$$

これに対して次の問題を考える。値 $h(n)$ はいかなる最適化問題の最大値であろうか? 式 (7) はいかなる最適化問題群の最適方程式であろうか?

この問題に対して以下のように応えよう。**状態空間** $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \dots\}$ を**終端状態集合** $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$ と **非終端状態集合** $\mathcal{N} = \{5, 6, \dots\}$ に分割して、$\mathcal{S}$ 上に非決定性最適化システムを考えよう。

まず、状態 $n_t$ から決定 $u_t = a_t$ または $b_t$ を経て状態 $n_{t+1}$ に至る **1 段推移加重** $\mu = \{\mu(n_t, u_t, n_{t+1})\}$ を次で定義する：

$$\mu(n_t, a_t, n_{t+1}) := \begin{cases} p_1 \\ q_1 \end{cases} \quad n_{t+1} = \begin{cases} n_t - 2 \\ n_t - 3 \end{cases}$$

$$\mu(n_t, b_t, n_{t+1}) := \begin{cases} p_2 \\ q_2 \end{cases} \quad n_{t+1} = \begin{cases} n_t - 1 \\ n_t - 4. \end{cases}$$

意思決定者が、状態 $n$ で決定 $a$ をとると、次期には加重 $p_1$, $q_1$ で状態 $(n-2)$, $(n-3)$ にそれぞれ推移すると考える。また、決定 $b$ をとると、加重 $p_2$, $q_2$ で状態 $(n-1)$, $(n-4)$ にそれぞれ推移する。次に、**利得関数** $a:\mathcal{N}\times\mathcal{D}\to R^1$ を

$$a(n,u) := \begin{cases} a(n) \\ b(n) \end{cases} \quad u = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

で定義する。彼/彼女は状態 $n$ で決定 $a$ $(b)$ をとると、$a(n)$ $(b(n))$ 単位のリターンを得る。差分方程式 (7) の初期条件は多段最適化問題の**終端利得関数** $c:\mathcal{T}\to R^1$ になる。彼/彼女は状態 $i(\in\mathcal{T})$ に到達すると、$c(i)$ 単位のリターンを追加的に得る。任意の写像 $\pi:\mathcal{N}\to\mathcal{D}$ を **政策** (policy) という。政策の全体 $\Pi$ を政策クラスとよぶ。

さて、政策 $\pi$ $(\in\Pi)$ を任意に与えて、初期状態 $n$ $(\in\mathcal{S})$ とる。このとき、停止時刻を導入する。まず、列

$$h = (n_0, u_0, n_1, u_1, \ldots, n_t, u_t, \ldots) \quad u_t = \pi(n_t) \quad t \ge 0$$

は

$$n_0 = n, \qquad n_{t+1} = \begin{cases} n_t - 2 \text{ or } n_t - 3 & \text{if } u_t = a_t \\ n_t - 1 \text{ or } n_t - 4 & \text{if } u_t = b_t \end{cases} \quad t = 0, 1, \ldots.$$

を満たすとき、政策 $\pi$ の下での $n$ からの**経路**という。 経路 $h$ に対して**停止時刻** $\tau(h)$ を

$$\tau(h) := \min\{t \ge 0 \mid n_t \in \mathcal{T}\}$$

で定義する。以後、経路 $h$ を**打ち切られた**型で表す：

$$h = (n_0, u_0, n_1, u_1, \ldots, n_{\tau-1}, u_{\tau-1}, n_\tau), \ \ \tau = \tau(h).$$

$n_0 \ge 4$ のとき、$\tau$ は値を

$$\{l(n_0), l(n_0)+1, \ldots, n_0 - 4\}$$

の中にとる。ただし、

$$l(n) = \begin{cases} \dfrac{n-4}{4} & n = 4m \\ \dfrac{n-1}{4} & n = 4m+1 \\ \dfrac{n-2}{4} & n = 4m+2 \\ \dfrac{n-3}{4} & n = 4m+3. \end{cases}$$

$1 \le n_0 \le 4$ のとき、$\tau$ は値 0 をとる。さて、$H$ を $\pi$ の下での $n_0$ からの経路の全体とする：

$$H \ := \ \left\{ h = (n_0, u_0, \ldots, n_{\tau-1}, u_{\tau-1}, n_\tau) \ \middle| \ u_t = \pi(n_t) \ \ 0 \le t \le \tau - 1 \ \right\}$$

さらに、$H_t(\mathcal{N})$ ( $H_t(\mathcal{T})$) を初期状態 $n_0 = n$ から時刻 $t$ で非終端状態 ( 終端状態 ) で終わる、そこまでの**部分経路**の全体とする：

$$
\begin{aligned}
H_t(\mathcal{N}) &= \left\{(n_0, u_0, \ldots, n_{t-1}, u_{t-1}, n_t) \in H \;\middle|\; n_t \in \mathcal{N}\right\} \quad 0 \le t \le n_0 - 5 \\
H_t(\mathcal{T}) &= \left\{(n_0, u_0, \ldots, n_{t-1}, u_{t-1}, n_t) \in H \;\middle|\; n_t \in \mathcal{T}\right\} \quad l(n_0) \le t \le n_0 - 4.
\end{aligned}
$$

ただし、$n_0 = n = 1, 2, 3, 4$ のとき、$H_0(\mathcal{T}) = \{(n_0)\}$ とする。このとき、任意の部分経路 $h_t = (n_0, u_0, n_1, u_1, \ldots, n_t)$ の**加重** を

$$
W(h_t) := \begin{cases} \mu(n_0, u_0, n_1)\mu(n_1, u_1, n_2) \cdots \mu(n_{t-1}, u_{t-1}, n_t) & t \ge 1 \\ 1 & t = 0 \end{cases}
$$

で定義する。非終端値 $a(n_t, \pi(n_t))$ と終端値 $c(n_t)$ はそれぞれ加重値

$$
W(h_t)a(n_t, \pi(n_t)) \quad と \quad W(h_t)c(n_t)
$$

で評価する。したがって、$n_0 \ge 5$ のときの第 $t$ $(\ge 1)$ 段では、次の 2 種類の多重和で評価される：

- $0 \le t \le n_0 - 5$ のとき、加重非終端値の多重和

$$
\sum_{h_t \in H_t(\mathcal{N})} \!\!\cdot\!\! \sum W(h_t)a(n_t, \pi(n_t)).
$$

- $l(n_0) \le t \le n_0 - 4$ のとき、加重終端値の多重和

$$
\sum_{h_t \in H_t(\mathcal{N})} \!\!\cdot\!\! \sum W(h_t)c(n_t).
$$

$n_0 = 1, 2, 3, 4$ のときの第 0 段では、終端値 $c(n_0)$ のみで評価される。したがって、政策 $\pi$ の下で $n_0$ $(\in \mathcal{N})$ からの**全評価値関数** $J : \mathcal{S} \to R^1$ は次で定義される： $n_0 \in \mathcal{N}$ のとき

$$
\begin{aligned}
J(n_0; \pi) \; := \; & \sum_{t=0}^{n_0-5} \left[ \sum_{h_t \in H_t(\mathcal{N})} \!\!\cdot\!\! \sum W(h_t)a(n_t, \pi(n_t)) \right] \\
& + \sum_{t=l(n_0)}^{n_0-4} \left[ \sum_{h_t \in H_t(\mathcal{N})} \!\!\cdot\!\! \sum W(h_t)c(n_t) \right], \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$n_0 \in \mathcal{N}$ のとき、$J(n_0; \pi) := c(n_0)$.

さて、 $n \ge 5$ のとき、**最適化問題**:

$$
\mathrm{P}(n) \qquad \text{Maximize} \quad J(n; \pi) \quad \text{subject to} \qquad \pi \in \Pi
$$

を考えよう。問題 $\mathrm{P}(n)$ の最大値を $h(n)$ とする：

$$
h(n) \;=\; \underset{\pi \in \Pi}{\mathrm{Max}}\, J(n; \pi) \qquad n \ge 5. \qquad (9)
$$

ただし、$1 \le n \le 4$ のとき、$h(n) = c(n)$ とする。このとき、最大値関数 $h$ は所与の式を満たす。

**定理 7.1** 最大値関数 $h$ は最適化表現

$$\begin{cases} h(n) \ = \ \mathrm{Max} \begin{cases} a(n) + p_1 \cdot h(n-2) + q_1 \cdot h(n-3) \\ b(n) + p_2 \cdot h(n-1) + q_2 \cdot h(n-4) \end{cases} & n \geq 5 \\ h(n) = c(n) \qquad n = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \tag{10}$$

をゆるす。式 *(10)* の最大値を与える点を $\pi^*(n)$ とすると、政策 $\pi^*$ は政策クラス $\Pi$ において最適である。

最適化問題の例としては、図5、図6がある。そこでは

$$n = 8, \ \ a(n) = b(n) = 0, \ \ c(1) = c(3) = c(4) = 1, \ c(2) = 2, \ \ p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = 1$$

になっていた。

**おわりに** この報告では、差分方程式を最適化を伴なわない非決定性動的システム上の評価問題ととらえ、その解（関数）の多重和表現を与えた。また、複数の差分方程式から1つの制御差分方程式を構成し、その解（関数）の最適化問題表現を与えた。これは、従来の確定的および確率的の動的計画法研究の逆の立場である。最初に最適方程式が与えられたとき、そこから非決定性動的システム上の評価問題・最適化問題を構成している。本報告によって非決定性動的計画法研究の新たな門戸が開いたことになる。

# 参考文献


[1] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] R.E. Bellman and K.L. Cooke, *Differential-Difference Equation*, Academic Press, NY, 1963.

[3] R.E. Bellman, *Modern Elementary Differencial Equations*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1968.

[4] List of Publications: Richard Bellman, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-26**(1981), No.5(Oct.), 1213-1223.

[5] R.E Bellman, *Eye of the Hurricane: an Autobiography*, World Scientific, Singapore, 1984.

[6] 藤田敏治: 分割問題について ～ 動的計画からのアプローチ ～ , 第５０回シンポジュウム『ＯＲと数学』、日本OR学会、九大国際交流プラザ、平成15年9月9日、Ed. H. Kawasaki, Proceedings of OR and Mathematics, Fukuoka, Japan, September 9, 2003.

[7] 茨木俊秀，組合せ最適化の理論，電子通信学会，1979.

[8] T, Ibaraki, Finite automata having cost functions; nondeterministic models, Information and Controls, **37**(1978), 40–69; 茨木俊秀、コスト関数をもつ有限オートマトンの受理能力：非決定性モデル, 信学論、**58-D**(1975), 562–569.

[9] 岩本誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987.

[10] S. Iwamoto, Iterative integral versus dynamic programming. Fourth International Workshop of the Bellman Continuum (Manhattan, KS, 1990). Comput. Math. Appl. 21 (1991), no. 11-12, 23–39.

[11] A. Lew, *N* Degrees of separation: influences of dynamic programming on computer sciences. Special issue in honor of Richard Bellman. J. Math. Anal. Appl. 249 (2000), no. 1, 232–242.

[12] A. Lew, Nondeterministic dynamic programming on a parallel coprocessing system, Applied Mathematics and Computation **120**(2001), 139-147.

[13] A. Lew, A Petri net model for discrete dynamic programming, Proceedings of the 9-th Bellman Continuum : International Workshop on Uncertain Systems and Soft Computing, July, 2002, Beijing, China, pp.16–21.

[14] 室章次郎、茨木俊秀、長谷川利治、加法性コスト関数をもつ有限オートマトンの受理能力：非決定性モデル, 信学論、**62-D**(1979), 479–482.

[15] G.L. Nemhauser, *Introduction to Dynamic Programming*, Wiley,New York, 1966.

[16] M. L. Puterman, *Markov Decision Processes : discrete stochastic dynamic programming*, Wiley & Sons, New York, 1994.

[17] A. Salomaa, *Computation and Automata*, Cambridge Univ. Press, 1985; 野崎昭弘他訳、『計算論とオートマトン理論』、サイエンス社、1988。

[18] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. NY, 1992.

[19] N.L. Stokey and R.E. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1989

[20] H. Walser, Der Goldene Schnitt, Teubner, 1996; 蟹江幸博訳、『黄金分割』、日本評論社、2002.