

極値問題とニュートン図形*

岩崎 克則 (九大・数理)

概要

極値問題とは、ある関数がある点で極値（極小値・極大値）をとるか否かを判定する問題である。一変数の極値問題は高校数学の範囲で解け、多変数の極値問題はヘッセ行列が非退化の場合は大学一年生の微分積分学の範囲で解ける。問題なのは、ヘッセ行列が退化した場合の多変数極値問題である。本稿では、その場合の解法にニュートン図形というものが有効に使われる様子を解説する。話を簡単にするために二変数の関数を使って解説するが、三変数以上についても原理的には同じである。

キーワード：極値問題，極大値，極小値，ニュートン多角形，ニュートン図形

1 はじめに

極値問題とは、与えられた関数がある点で極値（極小値・極大値）をとるかどうかを判定する問題である。一変数関数の極値問題は、理系の高校生が微分を習った後にその応用として学ぶ項目である。また多変数関数の極値問題は、理系の大学一年生が偏微分を習った後にその応用として学ぶ項目である。少し復習をしてみよう（例えば、杉浦 [2] 参照）。

n 変数関数 $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, が点 $a = (a_1, \dots, a_n)$ において極値をとるならば、関数 $f(x)$ の点 a における一階偏微分はすべて消える。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

条件 (1) をみたすような点 a を臨界点という。さて臨界点 a があつたとき、それが本当に極値点かどうかを判定するのが極値問題である。この問題に対して微分積分学で習うのは、大要、次のようなことである：点 a における $f(x)$ の二階偏微分全体がなす n 次対称行列

$$H_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (2)$$

をヘッセ行列という。臨界点 a が非退化、即ちヘッセ行列 $H_a(f)$ が 0 を固有値に持たないとき、

- (1) すべての固有値が正のとき a は極小点である (図 5 参照)。
- (2) すべての固有値が負のとき a は極大点である。
- (3) 正負の固有値が入り混じるとき a は鞍点であり、極大点でも極小点でもない (図 6 参照)。

*第 50 回 OR シンポジウム予稿

この結果により、臨界点为非退化のときは問題が解かれたことになる。たいていの臨界点是非退化であるので、実際問題としては、これで極値問題がほぼ解かれたと言ってよい。

しかし、たまに退化した臨界点が極値問題に登場することがある。この場合、上の定理は結論について何も言ったことになっていない。この退化した場合を考えるのが本稿の目的である。退化した臨界点においては、ニュートン図形を考えることが重要となる。そこで、講演ではニュートン図形が多変数の極値問題において有効に利用される様子を解説する。話を簡単にするために、二変数の極値問題に焦点を絞るが、その手法はより多変数の場合に自然に拡張される。今回の講演内容は、決して最新の話題ではないが、世間的にはそれほど常識にはなっていないようなので、ここで紹介させて頂く次第である。

2 一変数関数の極値問題

主題は二変数極値問題であるが、話の枕として一変数の極値問題を復習することにする。この場合、話は単純であるが、二変数への導入として、簡単な話をわざわざ難しく言い換えている箇所がある。まず極値の定義を確認しておく。

定義 2.1 (極値) 関数 $y = f(x)$ が点 $x = a$ で極小値をとるとは、 $x (\neq a)$ が a に十分近いとき常に $f(x) > f(a)$ が成り立つことである。同様に、点 $x = b$ で極大値をとるとは、 $x (\neq b)$ が b に十分近いとき常に $f(x) < f(b)$ が成り立つことである。

例を二つ挙げよう。

例 2.2 関数 $f(x) = 2x - 3x^2 + x^3$ と $f(x) = x^2 - x^3$ の極値は 図 1 の通りである。図では濃い黒丸が極小を表わし、淡い黒丸が極大を表わす。

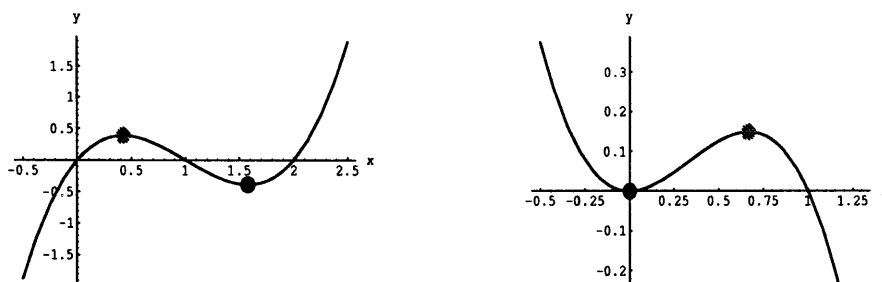


図 1: $f(x) = 2x - 3x^2 + x^3$ (左) と $f(x) = x^2 - x^3$ (右) のグラフ

注意 2.3 極大も同様に取り扱えので、以後、極小のみを考える。また、必要ならば座標軸を平行移動することにより、極小点を原点 $x = 0$ とし、極小値を $f(0) = 0$ と仮定して一般性を失わない。以後そうする。

このとき、問題は次のように述べられる。

問題 2.4 (極値問題) 与えられた関数 $y = f(x)$ は、いつ $x = 0$ で極小値をとるか？

対象とする関数はもっと一般でもよいが、話を簡単にするために、多項式とする。

定義 2.5 (一変数多項式) 次の形の関数を n 次多項式という。

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (a_0, \dots, a_n \text{ は実数, } a_n \neq 0)$$

ただし、注意 2.3 により、以後 $a_0 = 0$ とする。

例 2.6 多項式の例を三つ挙げる。

(1) $f(x) = 2x - 3x^2 + x^3$ (3 次多項式, 図 1 参照)

(2) $f(x) = x^2 - x^3$ (3 次多項式, 図 1 参照)

(3) $f(x) = 3x^4 + 5x^7 - 9x^{11}$ (11 次多項式)

ここで、ちょっと大げさな言葉づかいをし「台」という言葉を導入する。

定義 2.7 (台) 集合 $\Delta(f) = \{n : a_n \neq 0\}$ を $f(x)$ の台という。すなわち係数 a_n が 0 とならないような次数 n の集合のことである。台に属する n の最小値を k とおく：

$$k = \min \Delta(f).$$

例 2.8 例 2.6.(3) の 11 次多項式 $f(x)$ の台は $\Delta(f) = \{4, 7, 11\}$ である。これを図示すると 図 2 のようになる。このとき $k = 4$ である。

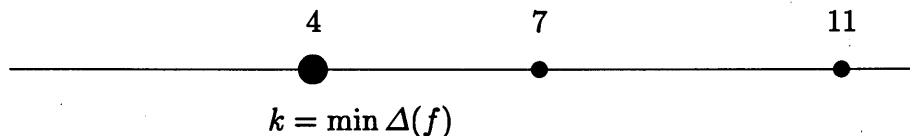


図 2: 11 次多項式 $f(x) = 3x^4 + 5x^7 - 9x^{11}$ の台

さて、極値問題を $f(x)$ が単項式の場合と一般の場合に分けて考察する。

単項式の場合. $f(x) = ax^k$ の場合。ただし、 k は自然数、 $a \neq 0$ とする。この場合は、図 3 及び 図 4 からわかるように、次の命題が成り立つ。

$$f(x) \text{ が } x=0 \text{ で極小} \iff k \text{ は偶数で, かつ } a > 0.$$

一般の場合. $f(x)$ が単項式とは限らない多項式の場合、 $k = \min \Delta(f)$ とおいたので、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_nx^n \\ &= a_kx^k \left(1 + \boxed{\frac{a_{k+1}}{a_k}x + \cdots + \frac{a_n}{a_k}x^{n-k}} \right) \\ &\sim a_kx^k \quad (x \sim 0) \quad \leftarrow \text{主要部} \end{aligned}$$

ここで x が十分 0 に近ければ、ボックス $\boxed{\phantom{\frac{a_{k+1}}{a_k}x + \cdots + \frac{a_n}{a_k}x^{n-k}}}$ で囲まれた部分の値は 1 に較べて十分小さいので無視できる。従って関数 $f(x)$ は近似的に単項式 a_kx^k と思える。このような考察により、一変数関数の極値問題については次の定理が成り立つ。

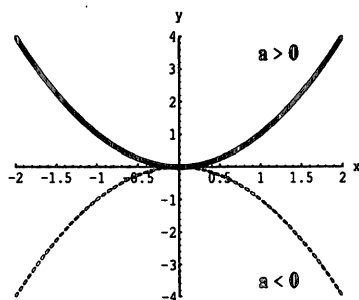


図 3: $y = ax^k$ のグラフ ; k が 2 以上の偶数の場合

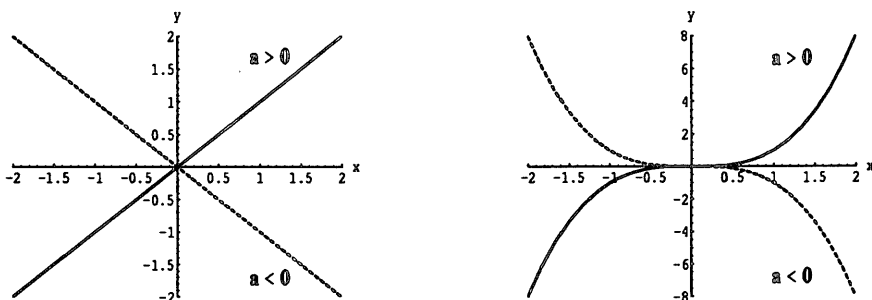


図 4: $y = ax^k$ のグラフ ; k が 1 (左) 及び 3 以上の奇数 (右) の場合

定理 2.9 (一変数極値問題の解) $f(x)$ を $f(0) = 0$ なる多項式とする.

$$y = f(x) \text{ が } x = 0 \text{ で極小値をとる} \iff \begin{cases} k = \min \Delta(f) \text{ は偶数} \\ a_k > 0. \end{cases}$$

この定理は、極値問題においては、最低次、すなわち $k = \min \Delta(f)$ 次の項が最も重要な役割を果たすことを示している。そのような項を主要部という。

3 二変数多項式

本論の二変数関数の極値問題に入る前に、二変数関数、特に二変数多項式について初歩から説明しておく。以後、独立変数は $x = (x_1, x_2)$ 、従属変数は y によって表わす。 y は実数であるが、 x は二次元のベクトルであることに注意しよう。

$$y = f(x) = f(x_1, x_2).$$

まず、単純な具体例を二つ挙げ、その後に一般的な定義をする。

例 3.1 二変数多項式の例.

(1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (グラフの概形は 図 5 参照)

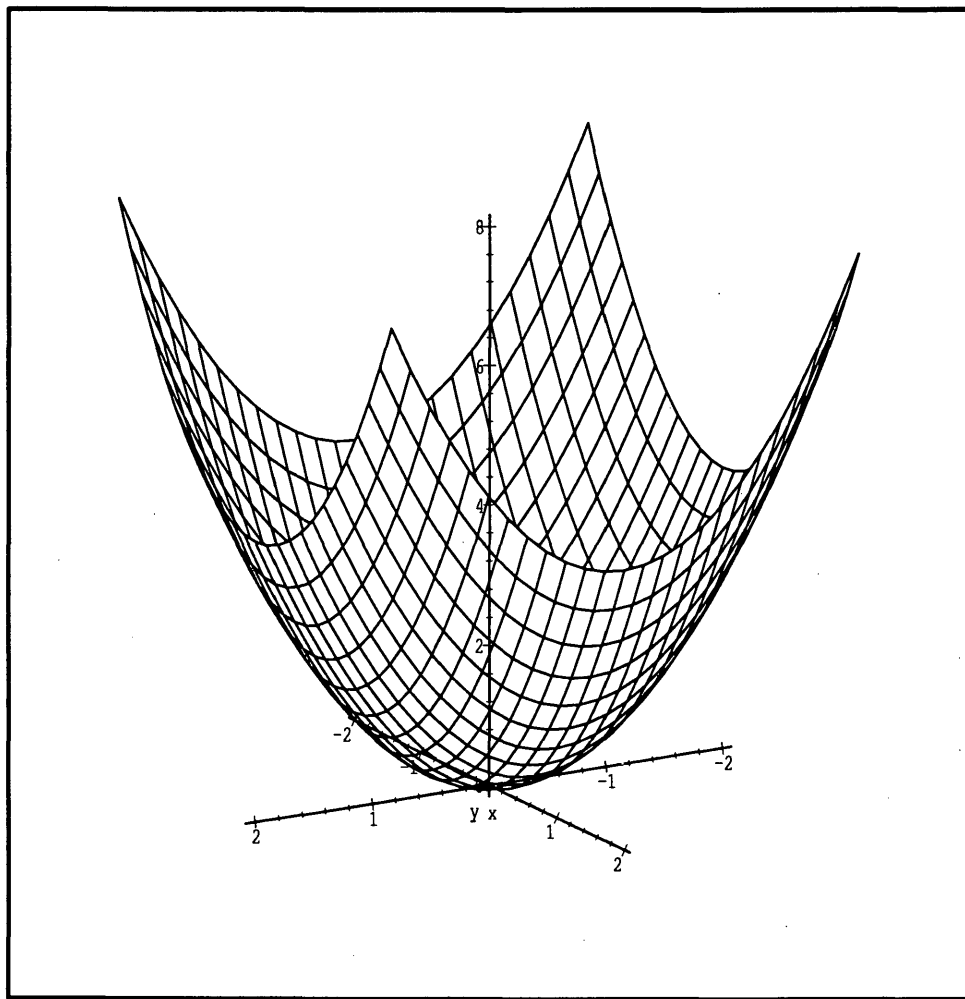


図 5: $z = x^2 + y^2$ のグラフ ($-2 \leq x, y \leq 2$)

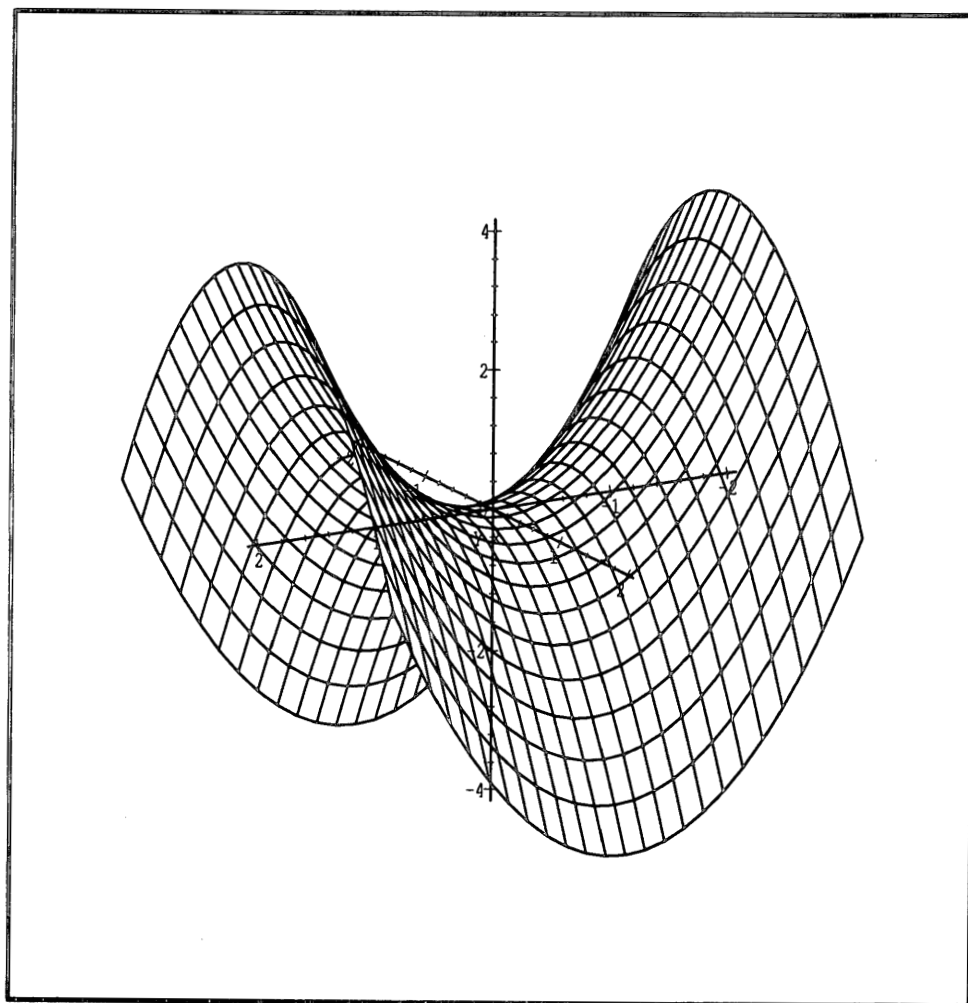


図 6: $z = x^2 - y^2$ のグラフ ($-2 \leq x, y \leq 2$)

(2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ (グラフの概形は 図 6 参照)

定義 3.2 (二変数多項式) 次のような形の関数のことを二変数多項式という。

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(n_1, n_2)} a_{n_1, n_2} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \quad (a_{n_1, n_2} \text{ は実数}), \quad (3)$$

ただし、上記のシグマ記号は 0 以上の整数の組 (n_1, n_2) にわたる和を表わし、 $a_{n_1, n_2} \neq 0$ となるような整数の組 (n_1, n_2) はぜいぜい有限個であるとする。

ここで、二変数多項式を表わすのに便利な記号法を導入する。

定義 3.3 (二重指数) 二次元ベクトルを $x = (x_1, x_2)$ と表わしたのと同様に、0 以上の整数の組を $n = (n_1, n_2)$ と表わす。これを二重指数と呼ぶ。そして、

$$x^n = x_1^{n_1} x_2^{n_2}, \quad a_n = a_{n_1, n_2}$$

とおく。このとき、式 (3) はあたかも一変数多項式のように、

$$f(x) = \sum_n a_n x^n \quad (\text{有限和}) \quad (4)$$

と書き直すことができる。この記法は、二変数の場合はそれほどでもないかもしれないが、より多変数になると非常に便利である。

例を一つ挙げよう。

例 3.4 下記の多項式に対して、 $a_{16} = 11$, $a_{24} = 8$, $a_{43} = -7$, $a_{55} = -10$, $a_{72} = 2$, $a_{81} = 3$ であり、他の $n = (n_1, n_2)$ に対しては $a_n = 0$ である。

$$f(x) = 11x_1x_2^6 + 8x_1^2x_2^4 - 7x_1^4x_2^3 - 10x_1^5x_2^5 + 2x_1^7x_2^2 + 3x_1^8x_2. \quad (5)$$

この例は、今後、何度も引用されるので記憶に留めておいて頂きたい。さて一変数多項式の場合 (定義 2.7) と同様に、二変数多項式の「台」というものを定義する。

定義 3.5 (台) 集合 $\Delta(f) = \{n = (n_1, n_2) : a_n \neq 0\}$ を $f(x)$ の台という。即ち係数 a_n が 0 でないような二重指数 $n = (n_1, n_2)$ 全体の集合である。台を用いると式 (4) は更に次のように書くことができる。

$$f(x) = \sum_{n \in \Delta(f)} a_n x^n. \quad (6)$$

例を一つ挙げよう。

例 3.6 例 3.4 の多項式 $f(x)$ の台は次の通りである。これを視覚化したものが 図 7 である。

$$\Delta(f) = \{(1, 6), (2, 4), (4, 3), (5, 5), (7, 2), (8, 1)\}.$$

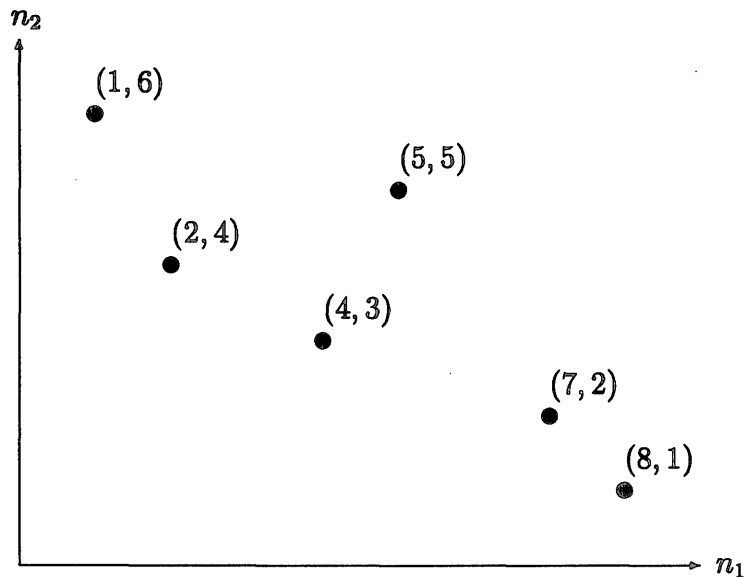


図 7: 例 3.4 の多項式 (5) の台

4 二変数関数の極値問題

さて、本論の二変数の極値問題に入る。二変数関数に対する極値の定義は、一変数関数の場合の定義 (定義 2.1) と同じであるが、念のため再述しておく。下記において $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ が実数軸上の点ではなく平面上の点を表わすことのみが変更点である。

定義 4.1 (極値) 関数 $y = f(x)$ が点 $x = a$ で極小値をとるとは、 $x (\neq a)$ が a に十分近いとき常に $f(x) > f(a)$ が成り立つことである。同様に、点 $x = b$ で極大値をとるとは、 $x (\neq b)$ が b に十分近いとき常に $f(x) < f(b)$ が成り立つことである。

注意 4.2 一変数の場合の注意 2.3 と同様に、以後、極小のみを考える。また、必要ならば座標軸を平行移動することにより、極小点を原点 $x = (0, 0)$ とし、極小値を $f(0, 0) = 0$ と仮定して一般性を失わない。以後そうする。

例を二つ挙げよう。

例 4.3 例 3.1 の関数が原点 $x = (0, 0)$ において極小値をとるかどうかが考えてみよう。式の考察より明らかであるし、また、図 5, 図 6 のグラフの概形より、

- (1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$: 原点は極小点である,
- (2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$: 原点は極小点でない (鞍点)。

さて、極値問題を定式化しておく。

問題 4.4 (極値問題) 与えられた二変数関数 $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ は、いつ原点 $x = (0, 0)$ で極小値をとるか? ただし、注意 4.2 に従って $f(0, 0) = 0$ とする。

問題 4.4 の具体例を二つ挙げよう.

問題 4.5 以下の問では, 変数 (x_1, x_2) の代りに変数 (x, y) を用いる.

- (1) 多項式 $1.5x^6 - 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^8$ は原点 $(0, 0)$ で極小値をとるか?
- (2) 多項式 $0.5x^6 - 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^8$ は原点 $(0, 0)$ で極小値をとるか?

問 (1) と 問 (2) は, 一見, 殆ど同じ問題であるが, x^6 の係数が問 (1) では 1.5, 問 (2) では 0.5 であるという点がわずかに異なっている. 実は, この違いのために答に差違が生じるのである.

問題 4.5 の解答 問 (1) の答は Yes, 問 (2) の答は No である!

今, この正解を知らないものとして, コンピュータに図を描かせることによって問題に接近してみよう. まず, $-2 \leq x, y \leq 2$ の範囲で 問 (1) と 問 (2) の多項式のグラフを描いてみたのが, 図 8 と 図 9 である.¹ これらの図を見ても正解を推し量ることは困難である. それでは? ということで, 原点のまわりでこれらの図を 2000 万倍に拡大してみたのが, 図 10 と 図 11 である. 図 11 の方は原点がわずかに鞍点らしくなってきたが, 図 10 の方は未だ原点が極小点かどうか心許ない. このような実例をみると, 極値問題というものが実は大変微妙な問題であることが実感できるだろう.

さて, コンピュータに図を描かせてもよく分からない時はどうすれば良いのだろうか? また, そもそも, コンピュータで答を推量できたとしても, それが本当に正解かどうかは別に検証する必要があるだろう. このような局面において活躍するのが「理論」である. 極値問題においては, その「理論」がニュートン図形の方法なのである.

5 ニュートン図形

以上の前置きを受けて, いよいよニュートン図形の説明に入っていく. 一変数関数の極値問題の場合, 関数の台 $\Delta(f)$ の最小元 $k = \min \Delta(f)$ が重要な役割を果たした. 二変数関数の極値問題において同様の役割を果たすのがニュートン図形である. いくつかの言葉の準備をした後, 先ずニュートン多角形というものを導入し, それを用いてニュートン図形を定義する.

定義 5.1 (第一象限) 二重指数 $n = (n_1, n_2)$ に対して, D_n を次のようにおく.

$$D_n = \{ (x_1, x_2) : x_1 \geq n_1, x_2 \geq n_2 \}.$$

すなわち, D_n は平面内における (通常の) 第一象限をベクトル $n = (n_1, n_2)$ の分だけ平行移動した領域である. D_n を n を基点とする第一象限という (図 12 参照).

定義 5.2 (凸図形, 凸包) 平面内の図形 Q が凸であるとは, Q 内の任意の 2 点を結ぶ線分が再び Q に含まれることをいう. 与えられた図形 Q を含む凸図形の中で, 包含関係に関して最小のものを Q の凸包という. 即ち Q の凸包は Q 内の任意の 2 点を結ぶ線分全体の合併として得られる図形である.

¹作図には数式処理ソフト Maple を用いた.

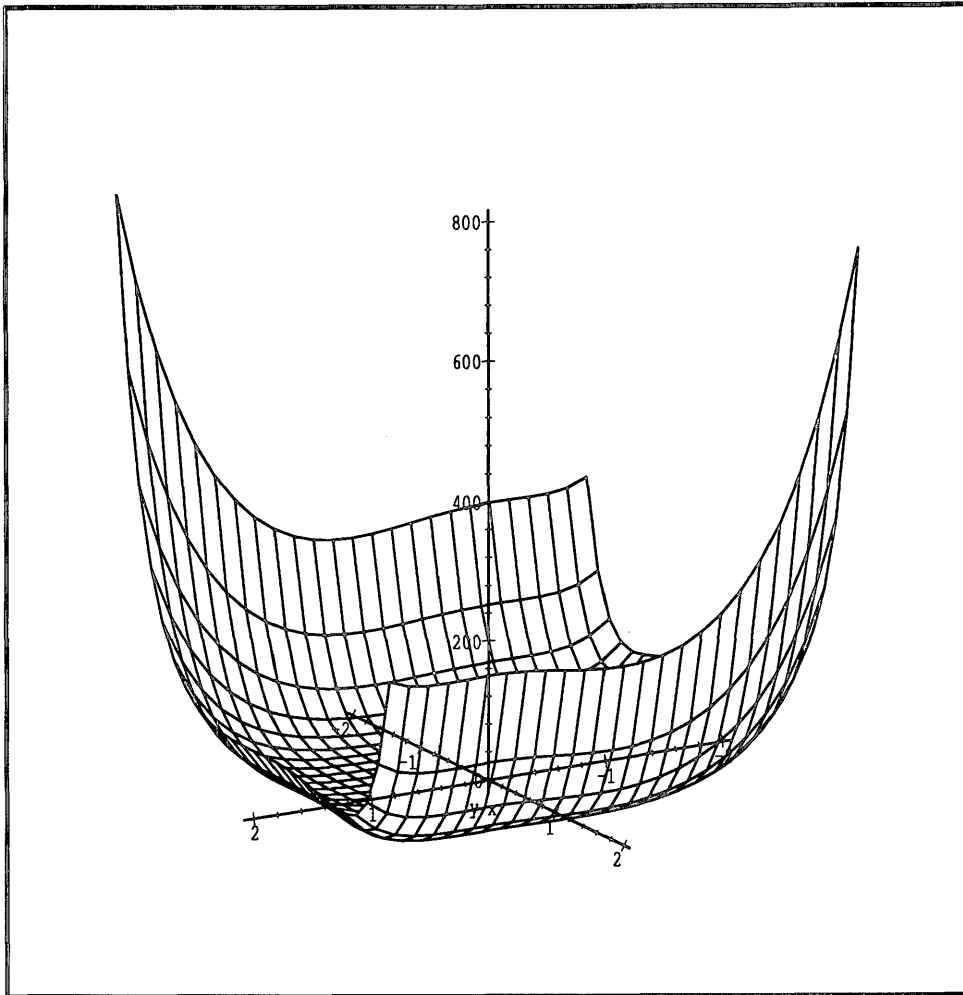


図 8: $z = 1.5x^6 - 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^8$ のグラフ ($-2 \leq x, y \leq 2$). 原点 $(0, 0)$ は極小点であるが見えづらい. もっと拡大して見た方が良さだろう.

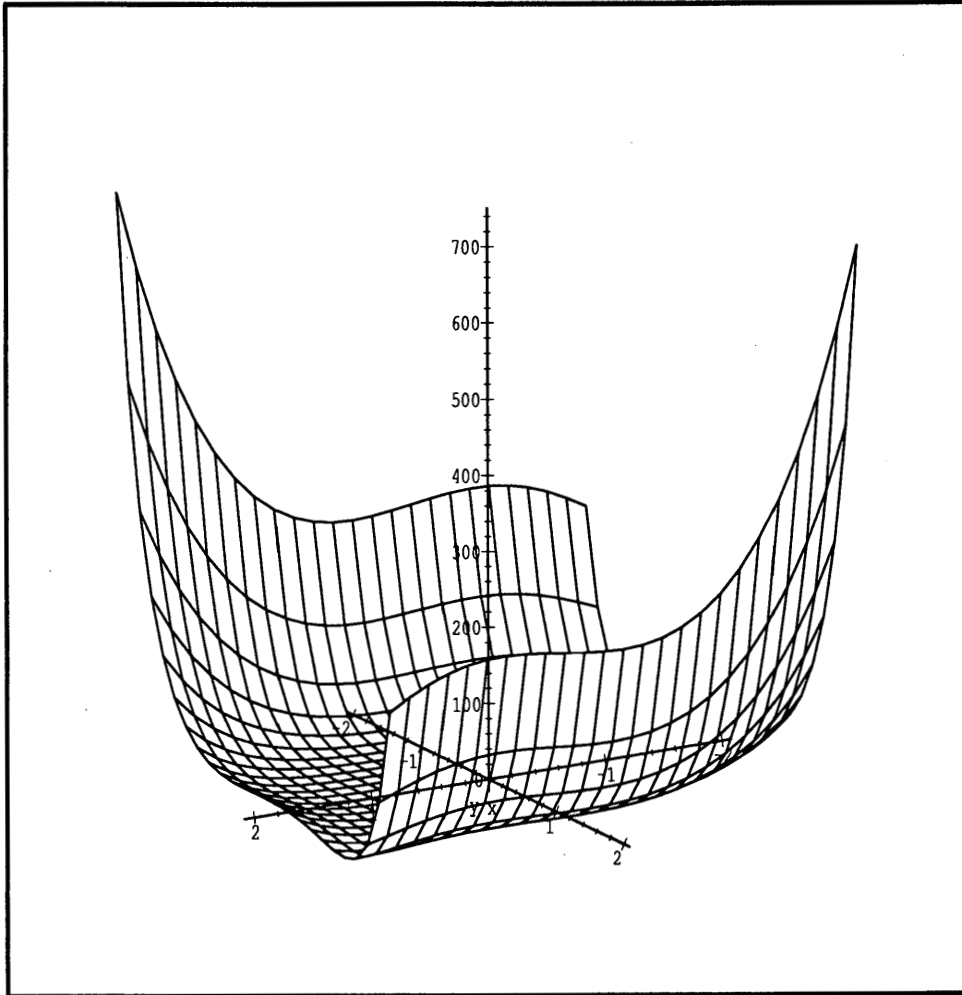


図 9: $z = 0.5x^6 - 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^8$ のグラフ ($-2 \leq x, y \leq 2$). 原点 $(0, 0)$ は極小点ではないが見えづらい. もっと拡大して見た方が良さだろう.

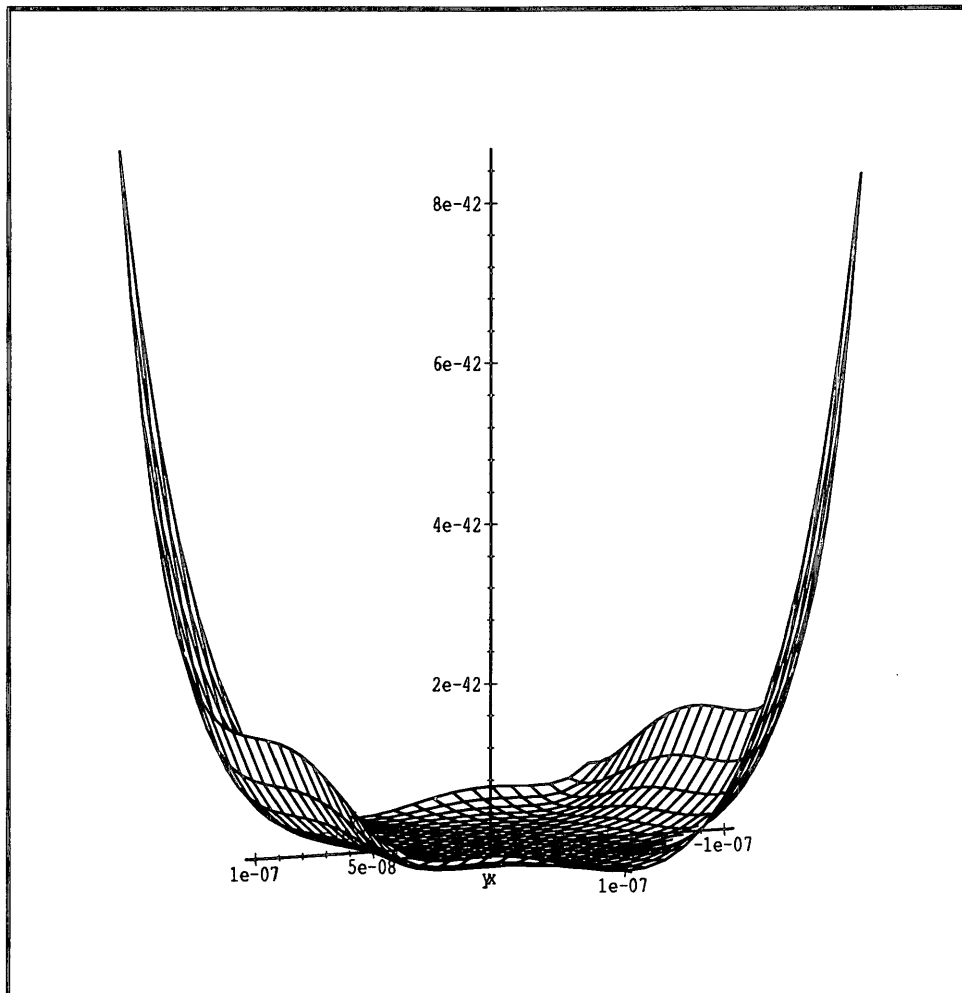


図 10: $z = 1.5x^6 - 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^8$ のグラフ ($-0.0000001 \leq x, y \leq 0.0000001$). 図 8 を原点のまわりで 2000 万倍に拡大したグラフ. 依然として原点 $(0, 0)$ が極小点であることは見えづらい.

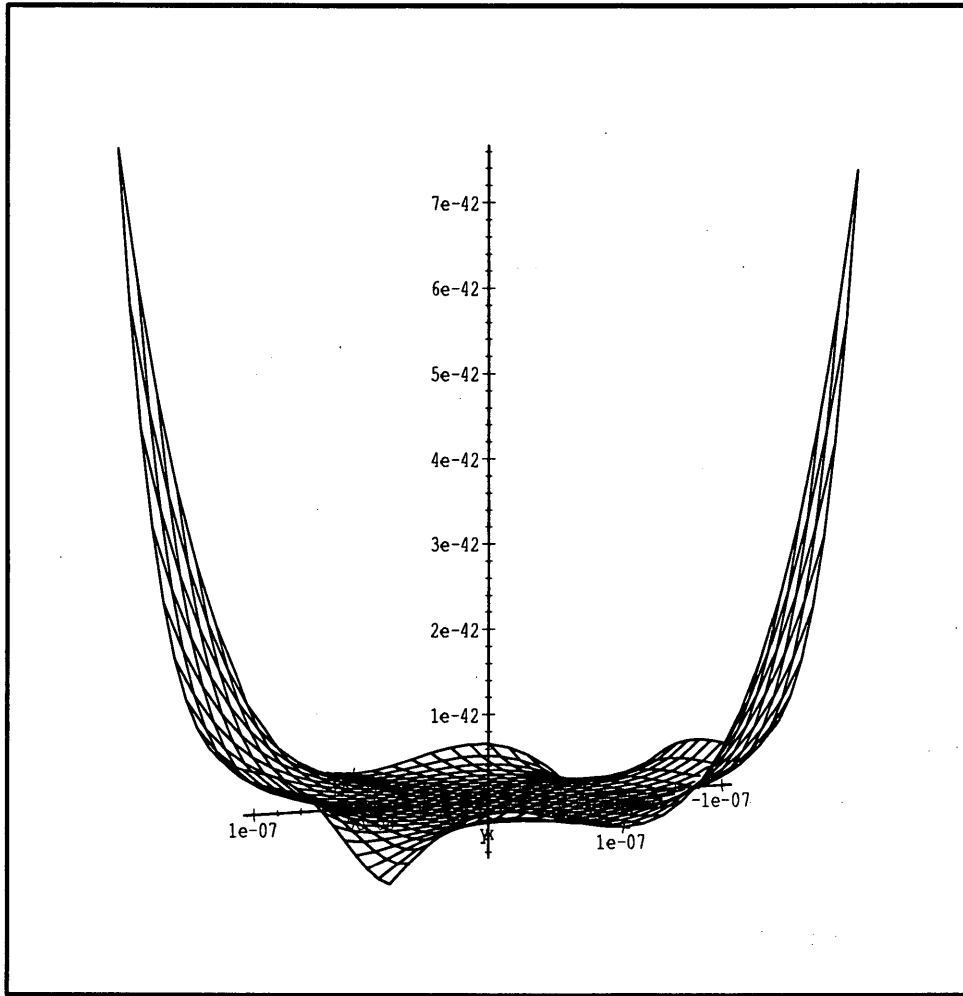


図 11: $z = 0.5x^6 - 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^8$ のグラフ ($-0.0000001 \leq x, y \leq 0.0000001$). 図 9 を原点のまわりで 2000 万倍に拡大したグラフ. わずかに原点 $(0, 0)$ が鞍点であることが見えてきた.

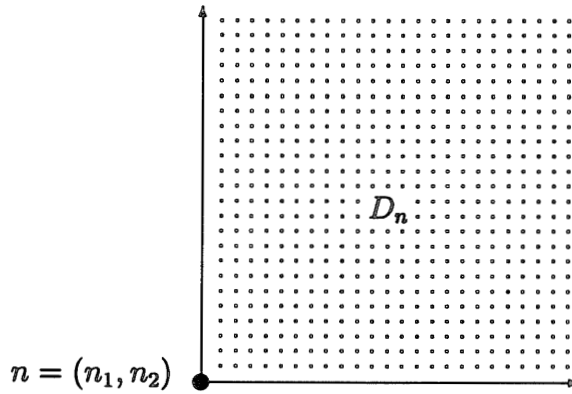


図 12: $n = (n_1, n_2)$ を基点とする第一象限

定義 5.3 (ニュートン多角形) $f(0,0) = 0$ なる二変数多項式 $f(x)$ に対して,

$$P(f) = \text{図形 } \bigcup_{n \in \Delta(f)} D_n \text{ の凸包}$$

とおき, $f(x)$ のニュートン多角形と呼ぶ。

ニュートン多角形 $P(f)$ は n_1 軸と n_2 軸に平行な 2 本の半直線と有限本の傾き負の線分を辺とする凸多角形である。このことを例を用いて説明しよう。

例 5.4 例 3.4 の多項式 $f(x)$ のニュートン多角形 $P(f)$ は 図 13 の下側の図によって与えられる。実際, 定義 5.3 によって, 図 13 の上側の図の凸包をとれば良いからである。この例では $P(f)$ の辺は, 2 本の半直線及び 2 本の線分から成る。

以上の準備の下に, ニュートン図形の定義をしよう。

定義 5.5 (ニュートン図形) 二変数多項式 $f(x)$ に対して,

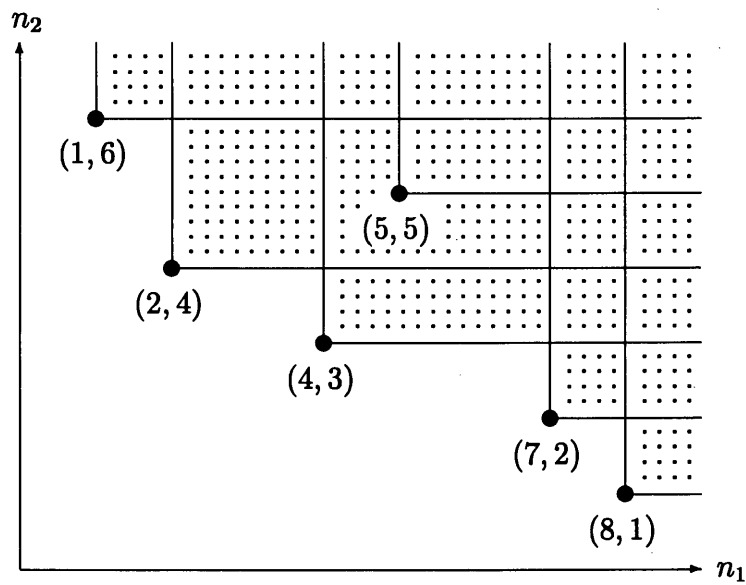
$$\Gamma(f) = \text{ニュートン図形 } P(f) \text{ の有限の長さの辺の和集合}$$

とおき, $f(x)$ のニュートン図形と呼ぶ。ニュートン図形 $\Gamma(f)$ は有限の長さの折れ線であるが, 折れ線を構成する線分を $\Gamma(f)$ の辺と呼び, 辺の端点を頂点と呼ぶ。辺に埋め込まれた点は頂点とは呼ばない。

例を挙げよう。

例 5.6 例 3.4 の多項式 $f(x)$ のニュートン図形 $\Gamma(f)$ は 図 14 に与えられている。頂点は $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(8, 1)$ の 3 点からなる。辺は, 2 頂点 $(1, 6)$ と $(2, 4)$ を結ぶ線分 γ_1 と, 2 頂点 $(2, 4)$ と $(8, 1)$ を結ぶ線分 γ_2 の 2 本である。辺 γ_2 に埋め込まれた点 $(4, 3)$ は頂点ではない。

ここで, ニュートン図形の一つの辺を含む直線の方程式について考察しておく。



上の図形の凸包をとるとニュートン多角形が得られる

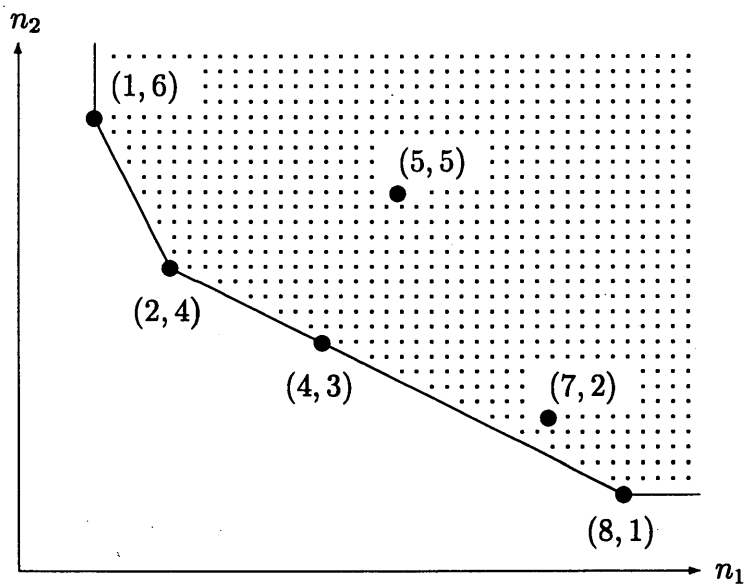


図 13: 例 3.4 の多項式 (5) のニュートン多角形 $P(f)$

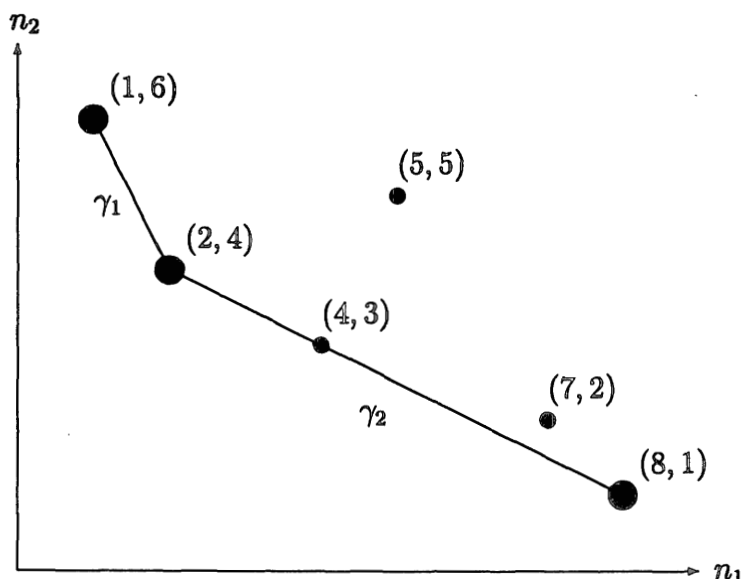


図 14: 例 3.4 の多項式 (5) のニュートン図形 $\Gamma(f)$: 頂点 ● (太丸), 辺 γ_1, γ_2

注意 5.7 ニュートン図形 $\Gamma(f)$ の辺 γ を含む直線 l の方程式は, 互いに素な自然数の組 (p, q) と自然数 r を用いて次の形に表される.

$$pn_1 + qn_2 = r \quad (7)$$

実際, γ の両端点は格子点 (両座標が整数であるような点) であるから, その傾きは有理数である. 更にニュートン図形の定義から容易に分るように, γ は第一象限内の傾きが負の線分である. 従って l の方程式は, 互いに素な自然数の組 (p, q) と正の実数 r を用いて (7) の形に表わされる. 再度, 辺の端点が格子点であることを考慮すると, r も自然数であることがいえる.

ニュートン図形 $\Gamma(f)$ の頂点 n や辺 γ に付随して, 元々の多項式 $f(x)$ からその部分多項式 $f_n(x)$ や $f_\gamma(x)$ を抽出することができる. そして, これらの部分多項式が今後の議論において重要な役割を果たすことになる. そこで次の定義をする.

定義 5.8 (頂点に付随する単項式・辺に付随する多項式) $f(x)$ を式 (6) で与えられる多項式とする, $f(x)$ のニュートン図形 $\Gamma(f)$ の各頂点 n に対して,

$$f_n(x) = a_n x^n$$

とおき, 頂点 n に付随する単項式という. また, $\Gamma(f)$ の各辺 γ に対して,

$$f_\gamma(x) = \sum_{n \in \gamma \cap \Delta(f)} a_n x^n$$

とおき, 辺 γ に付随する多項式と呼ぶ.

例を一つ挙げよう.

例 5.9 $f(x)$ を例 3.4 の多項式 (5) とする. このとき, ニュートン図形 $\Gamma(f)$ の頂点 $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(8, 1)$ に付随する単項式は次の通りである.

$$\begin{cases} f_{(1,6)}(x) = 11x_1x_2^6, \\ f_{(2,4)}(x) = 8x_1^2x_2^4, \\ f_{(8,1)}(x) = 3x_1^8x_2. \end{cases} \quad (8)$$

また, $\Gamma(f)$ の辺 γ_1, γ_2 に付随する多項式は次の通りである.

$$\begin{cases} f_{\gamma_1}(x) = 11x_1x_2^6 + 8x_1^2x_2^4, \\ f_{\gamma_2}(x) = 8x_1^2x_2^4 - 7x_1^4x_2^3 + 3x_1^8x_2. \end{cases} \quad (9)$$

6 極値になるための必要条件

さて, 前節でニュートン図形が定義されたので, それを用いて極値問題 (問題 4.4) の解を与えていくことにする. まず, 与えられた関数が原点で極小値をとるための必要条件として, 次のものが知られている.

定理 6.1 (必要条件) $f(x)$ を $f(0, 0) = 0$ なる二変数多項式とする. $f(x)$ が $x = (0, 0)$ において極小値をとるとすると, 次の 4 つの条件が成り立つ.

- (A) ニュートン図形 $\Gamma(f)$ の両端点は n_1 軸及び n_2 軸上にある.
- (B) $\Gamma(f)$ の任意の頂点 $n = (n_1, n_2)$ の両座標 n_1 及び n_2 は偶数である.
- (C) $\Gamma(f)$ の任意の頂点 n に付随する単項式 $f_n(x) = a_nx^n$ の係数 a_n は正である.
- (D) $\Gamma(f)$ の任意の辺 γ に対して, $f_\gamma(x) \geq 0$ (任意の x に対して).

これらは必要条件であるので, 与えられた多項式 $f(x)$ に対して各条件を検証してみた結果, 一つでも破れていれば, 原点 $(0, 0)$ が極小点ではないことがわかる. 例を挙げよう.

例 6.2 例 3.4 の多項式 (5) に対して, 定理 6.1 の 4 条件を検証してみよう.

- (A) ニュートン図形 $\Gamma(f)$ の両端点 $(1, 6)$, $(8, 1)$ は共に n_1 軸, n_2 軸の上にはない. 従って, 条件 (A) は成り立たない.
- (B) $\Gamma(f)$ の 3 頂点 $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(8, 1)$ のうち, $(2, 4)$ は両座標が偶数であるが, $(1, 6)$, $(8, 1)$ は座標のひとつが奇数である. 従って, 条件 (B) は成り立たない.
- (C) 式 (8) より, 頂点 $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(8, 1)$ に付随する単項式の係数はそれぞれ 11, 8, 3 であるので, 正であり, 条件 (C) は成り立つ. 点 $(4, 3)$ に付随する単項式の係数は -7 で負であるが, 点 $(4, 3)$ は頂点ではないので, 条件 (C) の検証には無関係である.

(D) 式 (9) により, 辺 γ_1 に付随する多項式は

$$f_{\gamma_1}(x) = x_1 x_2^4 (8x_1 + 11x_2^2)$$

である. 従って

$$-\frac{11}{8}x_2^2 < x_1 < 0 \quad \text{のとき} \quad f_{\gamma_1}(x) < 0$$

となる. すなわち, 条件 (D) は成り立たない. 辺 γ_2 に付随する多項式 $f_{\gamma_2}(x)$ の方は複雑なので, ここでは考えない. いずれにせよ, 辺 γ_1 に対する考察で既に条件 (D) の破れがわかっているため, これ以上の検証の必要はない.

例 6.2 では, 定理 6.1 の 4 条件に慣れて頂くために, すべての条件について検証したが, 極小になるか否かの検証自体は (A) の不成立を確かめた²時点で既に終わっている. さて, 一般に 4 つの条件のうち (A) (B) (C) の検証は簡単であるが, (D) の検証はもっと大変である. その意味で (D) が最も本質的な条件であると言える. そこで条件 (A) (B) (C) が成り立っていると仮定した上で, 条件 (D) を検証する方法を確立することが必要になる. その基本的なアイデアは

$f(x)$ に対する二変数の極値問題を $f_{\gamma}(x)$ に対する一変数の極値問題に還元する

ということである. これは重要なことなので, 節を改めて説明を行うことにし, 条件 (A) (B) (C) を満たす具体例を提示して, ひとまずこの節を終えることにする.

例 6.3 $a > 0$ を正のパラメータとして, 次の多項式を考える.

$$f(x) = x_2^8 + 3x_1^2 x_2^4 - 4x_1^3 x_2^3 + a x_1^6. \quad (10)$$

この多項式のニュートン多角形 $P(f)$ 及びニュートン図形 $\Gamma(f)$ は図 15 で与えられる. ニュートン図形の頂点は $(0, 8)$, $(2, 4)$, $(6, 0)$ である. 頂点 $(0, 8)$ は n_2 軸上にあり, 頂点 $(6, 0)$ は n_1 軸上にあるから, 定理 6.1 の条件 (A) は成り立つ. また, 3 頂点の両座標が共に偶数であるから, 条件 (B) も成り立つ. 頂点に付随する単項式は下記の通りであり, いずれの係数も正であるから, 条件 (C) も成り立つ.

$$f_{(0,8)}(x) = x_2^8, \quad f_{(2,4)}(x) = 3x_1^2 x_2^4, \quad f_{(6,0)}(x) = a x_1^6.$$

ニュートン図形 $\Gamma(f)$ の辺は, 2 頂点 $(0, 8)$, $(2, 4)$ を結ぶ線分 γ_1 と, 2 頂点 $(2, 4)$, $(6, 0)$ を結ぶ線分 γ_2 である. 各々の辺に付随する多項式は次の通りである.

$$\begin{cases} f_{\gamma_1}(x) = x_2^8 + 3x_1^2 x_2^4, \\ f_{\gamma_2}(x) = 3x_1^2 x_2^4 - 4x_1^3 x_2^3 + a x_1^6. \end{cases} \quad (11)$$

辺 γ_1 に付随する多項式 $f_{\gamma_1}(x)$ に関しては, 条件 (D) が成り立つことは明らかである. しかし, $f_{\gamma_2}(x)$ に関しては, 条件 (D) が成り立つか否か直ちには明らかではない. この部分の検証は次節で行うことにしよう (例 7.3 参照).

²これは確かめるまでもない.

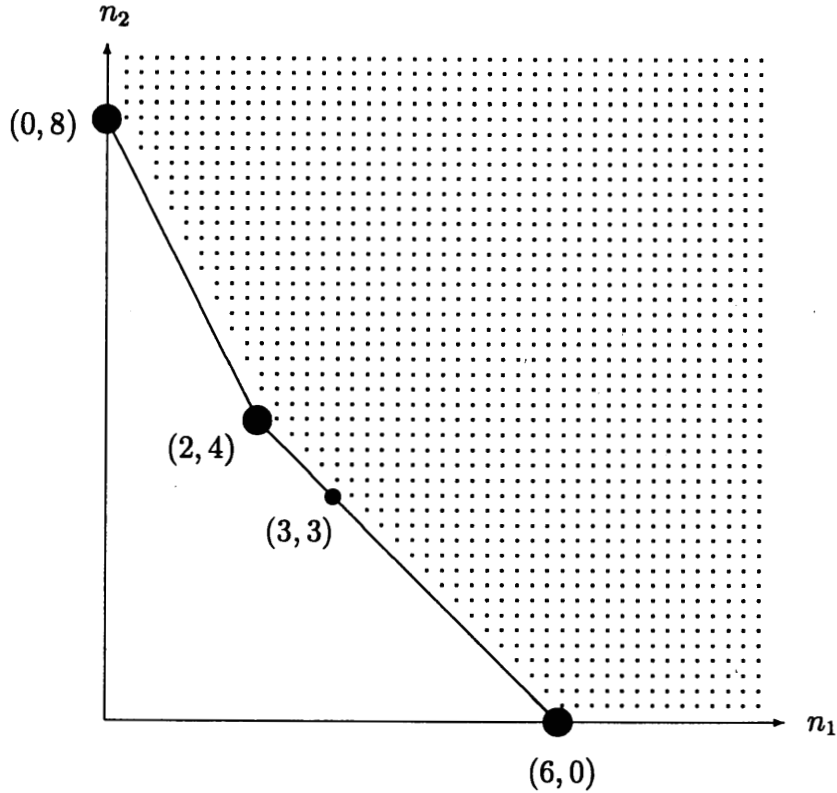


図 15: 例 6.3 の多項式 (10) のニュートン多角形とニュートン図形

7 一変数の極値問題への還元

定理 6.1 の条件 (A) (B) (C) が成り立っている状況下で条件 (D) を検証する作業は、一変数関数の極小問題を解く作業に帰着される. このことの意味を以下に説明しよう. γ をニュートン図形 $\Gamma(f)$ の任意の辺とする. 辺 γ を含む直線 l の方程式は式 (7) のように表わされる. ここで, 条件 (B) より γ の端点の両座標は偶数であるので, 直線 l は両座標が偶数であるような点を通ることが分る. このことより, 式 (7) の r は偶数である. 一方, 対 (p, q) は互いに素であるから, p, q のうちの少なくとも一つは奇数である. 以上を確認した上で次の補題を示す.

補題 7.1 (変数低減の原理) 定理 6.1 の条件 (A) (B) (C) が成り立っているとす. このとき, 条件 (D) は次の条件と同値である.

(D₁) p が奇数のとき: 任意の x_2 に対して, $f_\gamma(0, x_2) \geq 0, f_\gamma(1, x_2) \geq 0$.

(D₂) q が奇数のとき: 任意の x_1 に対して, $f_\gamma(x_1, 0) \geq 0, f_\gamma(x_1, 1) \geq 0$.

証明 定理 6.1 の条件 (D) が成り立てば, 補題 7.1 の条件 (D₁), (D₂) が成り立つのは明らかである. 逆を示すために, 先ず, 任意の実数 λ に対して $f_\gamma(x)$ が等式

$$f_\gamma(\lambda^p x_1, \lambda^q x_2) = \lambda^r f_\gamma(x_1, x_2) \quad (12)$$

を満たすことを示す。実際、任意の実数 λ に対して、

$$\begin{aligned} f_\gamma(\lambda^p x_1, \lambda^q x_2) &= \sum_{n \in \gamma} a_n (\lambda^p x_1)^{n_1} (\lambda^q x_2)^{n_2} \\ &= \sum_{n \in \gamma} a_n \lambda^{pn_1 + qn_2} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \\ &= \sum_{n \in \gamma} a_n \lambda^r x_1^{n_1} x_2^{n_2} \quad (\text{式 (7) より}) \\ &= \lambda^r f_\gamma(x_1, x_2). \end{aligned}$$

よって等式 (12) が示された。さて、 p が奇数のとき、条件 (D₁) から条件 (D) が導かれることを示そう。すなわち、条件 (D₁) の下で任意の $x = (x_1, x_2)$ に対して $f(x) \geq 0$ を示す。まず $x_1 = 0$ のとき、条件 (D₁) の第一不等式より、 $f(x) \geq 0$ であることはよい。 $x_1 \neq 0$ のときは、 p が奇数であるから、 $\lambda^p x_1 = 1$ を満たす実数 λ が一意的に存在する (この λ は 0 でない)。 r は偶数であるので、 $\lambda^r > 0$ であることに注意すると、等式 (12) と条件 (D₁) の第二不等式より、

$$f_\gamma(x) = \lambda^{-r} f_\gamma(\lambda^p x_1, \lambda^q x_2) = \lambda^{-r} f_\gamma(1, \lambda^q x_2) \geq 0$$

を得る。従って条件 (D) が成り立つ。 q が奇数のとき、条件 (D₂) から条件 (D) が導かれることも同様に示される。(証明終)

補題 7.1 の意味を考えてみよう。

注意 7.2 (補題 7.1 の意味) 定理 6.1 の条件 (D) はある二変数多項式が常に非負であるという条件であるのに対し、補題 7.1 の条件 (D₁), (D₂) はある一変数多項式が常に非負であるという条件である。この意味で、二変数の条件が一変数の条件に還元されている。それでは、還元された条件である「一変数多項式が常に非負である」という条件を検証するにはどうすればよいのであろうか? そのことを考えてみよう。

一般に、一変数 n 次多項式 $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ ($n \geq 1$) が任意の実数 x に対して非負になるための必要十分条件は、次によって与えられる³。

(ア) $g(x)$ の次数 n は偶数、最高次の係数 $b_n > 0$ 。

(イ) $g(x)$ の任意の極小点 $x = t$ において $g(t) \geq 0$ 。

このうち条件 (ア) は $x \rightarrow \pm\infty$ のときに $g(x)$ が非負に留まるための条件である。この状況下で $g(x)$ が常に非負かどうかを見るためには、 $g(x)$ の極小点においてのみそれを見れば十分である、というのが条件 (イ) である。この条件 (イ) を検証するためには、 $g(x)$ の極小点がどこにあるかを知らなければならないが、そのためには定理 2.9 (一変数の極値問題の解) を用いればよい。実際 $x = t$ が $g(x)$ の極小点であるか否かは $x = 0$ が多項式

$$h(x) = g(x+t) - g(t)$$

の極小点であるか否かと同値である。そこで $h(x)$ が定理 2.9 の条件を満たすかどうかを調べてみればよい。そして、いったん点 $x = t$ が $g(x)$ の極小点であると分ったら、その点において値 $g(t)$ が非負かどうか検証してみればよい。この意味で、条件 (D) の検証が一変数の極値問題に還元された訳である。

³ここでは x はベクトル (x_1, x_2) ではなく 1 次元の変数を表わしている

補題 7.1 及び 注意 7.2 を具体例に適用して理解を深めよう。

例 7.3 注意 7.2 で述べたことを式 (11) 内の $f_{\gamma_2}(x)$ に適用して、条件 (D) を検証してみよう。辺 γ_2 に対して $(p, q, r) = (1, 1, 6)$ であり p は奇数であるから、補題 7.1 の条件 (D₁) を検証すればよい。⁴ 先ず $f_{\gamma_2}(0, x_2) = 0$ であるから、(D₁) の第一不等式は成り立っている。次に第二不等式について考えよう。 $g(x_2) = f_{\gamma_2}(1, x_2)$ とおくと、これは、

$$g(x_2) = 3x_2^4 - 4x_2^3 + a$$

と計算される。 $g(x_2)$ は x_2 に関する一変数 4 次多項式であり、かつ 4 次の係数は 3 で正である。従って 注意 7.2 の条件 (ア) は成り立っている。次に条件 (イ) を検証するために、 $g(x_2)$ の極小点を探そう。そこで $h(x_2) = g(x_2 + t) - g(t)$ とおくと、

$$h(x_2) = 12t^2(t-1)x_2 + 6t(3t-2)x_2^2 + 4(3t-1)x_2^3 + 3x_2^4$$

となる。 $x_2 = t$ が $g(x_2)$ の極小点となることと $x_2 = 0$ が $h(x_2)$ の極小点になることは同値である。 $x_2 = 0$ が $h(x_2)$ の極小点であるならば、定理 2.9 より $h(x_2)$ の 1 次の係数 $12t^2(t-1)$ が 0 にならなければならない。従って $t = 0, 1$ でなければならない。逆にこのとき、

$$h(x_2) = \begin{cases} -4x_2^3 + 3x_2^4 & (t = 0 \text{ のとき}) \\ 6x_2^2 + 8x_2^3 + 3x_2^4 & (t = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、再び 定理 2.9 を適用して $t = 1$ の場合のみ $x_2 = 0$ が $h(x_2)$ の極小点であることが分かる。即ち $t = 1$ のみが $g(x_2) = f_{\gamma_2}(1, x_2)$ の極小点であることがわかる。従って、今の場合、条件 (イ) は次で与えられる。

$$f_{\gamma_2}(1, x_2)|_{x_2=1} = a - 1 \geq 0.$$

これが、多項式 $f_{\gamma_2}(x)$ が条件 (D) を満たすための必要十分条件である。例 6.3 における考察と併せると、多項式 (10) が 定理 6.1 の条件 (A) (B) (C) (D) を満たすための必要十分条件が

$$a \geq 1. \tag{13}$$

で与えられることが分る。特に定数 a が $a < 1$ なら、多項式 (10) は $x = 0$ で極小値をとらないことが結論される。

8 極値になるための十分条件

定理 6.1 の四つの条件 (A) (B) (C) (D) は多項式 $f(x)$ が原点 $x = 0$ で極小値をとるための必要条件ではあるが、十分条件ではない。しかしながら、これらの必要条件に非常に近い十分条件を与えることができる。この節では、そのことについて述べよう。

定理 8.1 (十分条件) $f(x)$ を $f(0, 0) = 0$ なる二変数多項式とする。次の 4 条件が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = (0, 0)$ において極小値をとる。

⁴ q も奇数であるから条件 (D₂) を検証してもよい。

- (A) ニュートン図形 $\Gamma(f)$ の両端点は n_1 軸及び n_2 軸上にある。
- (B) $\Gamma(f)$ の任意の頂点 $n = (n_1, n_2)$ の両座標 n_1 及び n_2 は偶数である。
- (C) $\Gamma(f)$ の任意の頂点 n に付随する単項式 $f_n(x) = a_n x^n$ の係数 a_n は正である。
- (D') $\Gamma(f)$ の任意の辺 γ に対して $f_\gamma(x) > 0$ ($x_1 x_2 \neq 0$ であるような任意の x に対して)。

定理 6.1 (必要条件) と 定理 8.1 (十分条件) の違いについて確認しておこう。

注意 8.2 (必要条件と十分条件の差) 定理 8.1 における四つの条件のうち, (A) (B) (C) は 定理 6.1 と共通である。条件 (D') のみが 定理 6.1 の (D) とわずかに違っている。⁵ この点が 定理 6.1 と 定理 8.1 の違いであり, 必要条件と十分条件の差違となっている。

定理 8.1 においても条件 (A) (B) (C) の検証は容易であり, (D) の検証が最も本質的である。そして, 定理 6.1 の場合と同様, (A) (B) (C) が成り立つ状況下で, (D') の検証を一変数の極値問題の考察に還元することができる。すなわち, 補題 7.1 及び 注意 7.2 に平行して, 次の補題及び注意を述べることができる。

補題 8.3 (変数低減の原理) 定理 8.1 の条件 (A) (B) (C) が成り立っているとす。このとき, 条件 (D') は次の条件と同値である。

(D'₁) p が奇数のとき: 任意の $x_2 \neq 0$ に対して, $f_\gamma(1, x_2) > 0$ 。

(D'₂) q が奇数のとき: 任意の $x_1 \neq 0$ に対して, $f_\gamma(x_1, 1) > 0$ 。

注意 8.4 (補題 8.3 の意味) 定理 8.1 の条件 (D') はある二変数多項式が常に正であるという条件であるのに対し, 補題 8.3 の条件 (D'₁), (D'₂) はある一変数多項式が常に正であるという条件である。⁶ この意味で, 二変数の条件が一変数の条件に還元されている。以下, 注意 7.2 の文言は「非負」を「正」に読み替えることでそのまま通用するので省略する。条件 (ア)(イ) の読み替えだけ書いておく。

(ア') $g(x)$ の次数 n は偶数, 最高次の係数 $b_n > 0$,

(イ') $g(x)$ の $x = 0$ 以外の任意の極小点 $x = t$ において $g(t) > 0$ であり, かつ $x = 0$ が極小点ならば $g(0) \geq 0$ 。

例を挙げよう。

例 8.5 例 6.3 の多項式 (10) に対して, 定理 8.1 の条件 (A) (B) (C) (D') がいつ成り立つかを考えてみよう。このうち条件 (A) (B) (C) の成立については 例 6.3 において既に確認済みである。そこで条件 (D') のみが問題となる。辺 γ_1 に関しては, (11) の第一式より, $x_1 x_2 \neq 0$ のとき, $f_{\gamma_1}(x) = x_2^8 + 3x_1^2 x_2^4 > 0$ が成り立っている。辺 γ_2 に関しては, 注意 7.2 の代りに 注意 8.4 を利用して, 例 7.3 と平行した議論を行うことにより, 条件 (D'₁) が

$$f_{\gamma_2}(1, x_2)|_{x_2=1} = a - 1 > 0.$$

⁵条件 (D') の方が条件 (D) より, ごくわずかに強い。

⁶正確にいうと, 二変数多項式に対しては両座標が共に 0 でない限り, 一変数多項式に対しては原点以外の点で, 常に正ということ。

と同値であることが分かる。このことより、多項式 (10) が条件 (A) (B) (C) (D') を満たすための必要十分条件が

$$a > 1 \quad (14)$$

で与えられることが分かる。条件 (13) は $a = 1$ を含むが条件 (14) は $a = 1$ を含まない。ここに必要条件 (定理 6.1) と十分条件 (定理 8.1) の差違が具体的に見えていることに注意しよう。

ここで、必要条件と十分条件の差違について、もう一度、注釈を加えておこう。

注意 8.6 残念ながら、定理 8.1 の十分条件 (A) (B) (C) (D') は必要条件ではない (例 8.7 参照)。一般に、式 (6) のように与えられた多項式 $f(x)$ に対して、

$$f_{\Gamma}(x) = \sum_{n \in \Gamma \cap \Delta} a_n x^n$$

とおき、 $f(x)$ の主要部と呼ぶ。⁷ このとき、条件 (A) (B) (C) (D) (D') が主要部 $f_{\Gamma}(x)$ のみに係わるデータを用いて書かれていることに注意しよう。このことは、我々の必要条件 (定理 6.1) と十分条件 (定理 8.1) には多項式 $f(x)$ の主要部 $f_{\Gamma}(x)$ の情報しか使われていないことを意味する。従って、必要条件 (A) (B) (C) (D) と十分条件 (A) (B) (C) (D') の隙間にあるような微妙な多項式に対しては、主要部以外の情報まで加味しなければ、極値問題が完全には解けないこともあり得る。この意味で定理 6.1 と定理 8.1 は完璧とはいえない。とはいえ、そのような狭い隙間に横たわる多項式はごくわずかであり⁸、実際的な適用性においては、やはり、定理 6.1 と定理 8.1 は非常にいい線を行った定理なのである。

定理 8.1 の十分条件が必要条件ではないことを示す例を一つ提示しよう。

例 8.7 定理 8.1 の 4 条件のうち (A) (B) (C) を満たすが (D') は満たさず、それにもかかわらず、原点 $x = (0, 0)$ で極小値をとるような多項式の例を挙げる。

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^4 = (x_1 - x_2)^2 + x_1^4.$$

この多項式は明らかに $x = (0, 0)$ で極小値 0 をとる (実際、それは最小値である)。 $f(x)$ のニュートン多角形 $P(f)$ 及びニュートン図形 $\Gamma(f)$ は図 16 のようになる。 $f(x)$ に対して条件 (A) (B) (C) が成り立っているのは見やすい。このことは、実際に確かめるのも容易であるが、 $f(x)$ が $x = (0, 0)$ で極小値をとることと定理 6.1 から明らかである。一方、条件 (D') は成り立たない。実際、 $\Gamma(f)$ の辺は 2 頂点 $(0, 2)$, $(2, 0)$ を結ぶ線分のみであり、この辺 γ に付随する多項式は次で与えられる。

$$f_{\gamma}(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

このとき $x_1 = x_2 \neq 0$ に対して $f_{\gamma}(x) = 0$ となる。従って条件 (D') は成り立たない。

⁷ただし $\Delta = \Delta(f)$ は $f(x)$ の台とし、 $\Gamma = \Gamma(f)$ は $f(x)$ のニュートン図形とする。

⁸多項式 (10) においては $a = 1$ の場合のみが、この微妙な隙間に入る。条件 (13) と (14) を対比せよ。

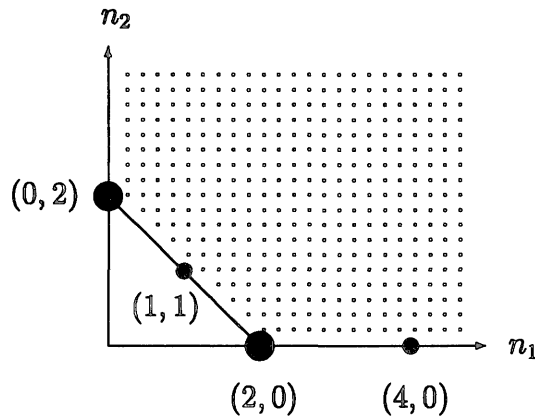


図 16: 例 8.7 の多項式のニュートン多角形とニュートン図形

9 おわりに

今回紹介した極値問題の解法において注目して頂きたいのは、その解かれ方である。

変数低減の原理：二変数の極値問題が、ニュートン図形を仲立ちにして、一変数の極値問題に還元されて解かれる。

この変数低減の原理は、もっと多変数の極値問題にそのまま拡張される。一般に n 変数の極値問題は、 $n-1$ 次元のニュートン図形を観察することにより、いくつかの $n-1$ 変数の極値問題に還元される。そうして得られた、いくつかの $n-1$ 変数の極値問題は、その各々に対する $n-2$ 次元ニュートン図形を観察することにより、さらにいくつかの $n-2$ 変数の極値問題に還元される。このプロセスを次々にたどっていくことにより、ついには当初の多変数の極値問題が（一般には非常にたくさんの）一変数の極値問題に還元されて解かれるのである。

今回の講演内容は、初等的でありながら、一般に流通している文献にはあまり触れられていないようである。定理 6.1 及び 定理 8.1 の原典は論文 Vasil'ev [3] である。本稿では上記の論文のさわりの部分を噛み砕いて説明した。定理 6.1 及び 定理 8.1 についても証明までは踏み込まず、むしろ具体例を使って背景説明を行うことに重点を置いた。証明に関心がある向きは上記の論文を御覧頂きたい。また、日本語による解説としては金子 [1] がある。

最後に演習問題を提出して本稿を終わることとする。

問題 9.1 a を定数とし、次の多項式 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = ax_2^4 - 4x_1x_2^3 + 3x_1^2x_2^2 - 10x_1^4x_2^3 + 7x_1^5x_2 + x_1^6.$$

- (1) $f(x)$ のニュートン多角形 $P(f)$, ニュートン図形 $\Gamma(f)$ を求め、図示せよ。
- (2) $f(x)$ が 定理 6.1 の条件 (A) (B) (C) (D) を満たすような a の範囲を決定せよ。
- (3) $f(x)$ が 定理 8.1 の条件 (A) (B) (C) (D') を満たすような a の範囲を決定せよ。

参考文献

- [1] 金子 晃「ニュートン図形・特異点・振動積分」上智大学数学講究録 11 (1981).
- [2] 杉浦光夫「解析入門 I」東大出版会, (II 章 §8).
- [3] Vasil'ev, V.A., *Asymptotic exponential integrals, Newton's diagram and classification of minimal points*, (ロシア語), *Funkt. Anal. i Prilož.* 11 (3) (1977), 1–11; 英語訳 *Funct. Anal. Appl.* 11 (3) (1977), 163–172.