分割問題について
— 動的計画からのアプローチ —

藤田 敏治

九州工業大学 工学部 電気工学科

〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1

tel&fax. 093-884-3256, email: fujita@comp.kyutech.ac.jp

概 要

分割問題に対し，動的計画法の枠組みにおいてその取り扱いを考える．分割問題とは，有限な長さを持つ列を有限な分割点で分割する際，必要となるコストを最小化（あるいは得られる利得を最大化）するための最適な分割順序を求める問題である．ここで必要となる動的計画法は確定環境，確率環境のいずれでもなく，いわば非決定性環境下のものである．

1 はじめに

有限な長さを持つ列に対し，有限個の分割点が与えられているものとする．ある分割点を選択した際，もとの列はその点で２つに分割され，またその際にはコストを生じる．そして，可能であればさらに分割を繰り返すが，分割点の存在しない列に対しては終端コストが生じるものとする．このとき，必要となるコストの総和を最小にするためには，いかなる順序で分割を行うのが最適であろうか．この種の問題を分割問題と呼ぶ．

この枠組みで扱われる問題としては，高速道路における「インターチェンジ建設問題」，コンピュータにおいてかな漢字変換入力を行う際の「文字列分割問題」，あるいは行列積等の計算における「計算量最小化問題」などが挙げらる．

分割問題は，その構造上，直感的にも再帰性を持つことが予想され，動的計画法 [1,6,7,12,14] が有効であろうことは容易に想像がつく．動的計画法は「最適性の原理」をその基礎とし，離散・連続，確定・確率・ファジィ等を問わず，また様々な評価関数に適用可能な強力なツールである [2–5,8–11,13,15]．しかしながら，実際に分割問題へ動的計画法を適用するにあたっては，問題を表現する際，通常考え得る状態推移ではその取り扱いが困難であった．ここでいう「通常の状態推移」とは「確定的推移」および「確率的推移」である．

そこで，この分割問題に対しては，より一般的な推移を許容する非決定性動的計画の枠組みを採用し，問題の解析を行う．

まず，第２節では用いる記号や用語等を与える．第３節では，政策と評価関数について詳しく考えた後，問題を定式化し，第４節で再帰式を導く．そして第５節で数値例を与え，

第6節はまとめと補足を述べる.

2　記号と定義

簡単のため，分割対象の列を

$$S_0 = \{1,\ 2,\ \ldots\ ,8,\ 9\}$$

とおき，これを内部の点 $2, 3, \ldots, 8$ で分割する問題を考える．たとえば，この S_0 を 4 で分割すると

$$\{1,2,3,4\},\quad \{4,5,6,7,8,9\}$$

へと分割される．さらに前者に対し 3 での分割を考えると，

$$\{1,2,3\},\quad \{3,4\}$$

へと分割される．ここで生じた $\{1,2,3\}$ はさらに分割が可能であるが，$\{3,4\}$ については内部に分割点を持たず，これ以上の分割はできない．以上のような操作を，すべての列が分割できなくなるまで繰り返すのである．なお，列の長さ，および分割点の個数については直ちに一般化可能で，以後の結果はすべて適用できる．

ここで，連続する要素のみからなる S_0 の部分集合でかつ2つ以上の要素を含むものの族を $\mathcal{S}$ であらわす：

$$\mathcal{S} = \{\{i,\ i+1,\ \ldots\ ,\ j\} \mid 1 \leq i < j \leq 9\}$$

この $\mathcal{S}$ を**状態空間**，その要素 $\{i,\ i+1,\ \ldots\ ,\ j\} \in \mathcal{S}$ を**状態**と呼ぶ．また，S_0 の分割点の集合を

$$\mathcal{A} = \{2, 3, \ldots, 8\}$$

であらわし，これを**決定集合**と呼ぶ．**決定** $k \in \mathcal{A}$ は，状態 $S \in \mathcal{S}$ を k で分割することをあらわすものとする．この a は**分割点**とも呼ばれる．ただし，状態 $S = \{i,\ i+1,\ \ldots\ ,\ j\}$ に対し，決定 $k = i+1,\ i+2,\ \ldots\ ,\ j-1$ 以外は無効であり，特定の状態に対し有効な決定の集合を

$$\mathcal{A}(S) = \{i+1,\ i+2,\ \ldots\ ,\ j-1\},\quad S = \{i,\ i+1,\ \ldots\ ,\ j\} \in \mathcal{S}$$

と定める．

状態空間 $\mathcal{S}$ を以下のように2つに分割する．まず，$\mathcal{N}\ (\subset \mathcal{S})$ をその構成要素数が3つ以上である S_0 の部分集合全体：

$$\mathcal{N} = \{\{i,\ i+1,\ \ldots\ ,\ j\} \subset S_0 \mid i+2 \leq j\} \subset \mathcal{S}$$

とし，これを**非終端状態集合**と呼ぶ．$\mathcal{N}$ は，分割可能な状態全体をあらわしている．$\mathcal{N}$ の要素を**非終端状態**と呼び，次の簡略形を用いて表現する．

$$[i,j] := \{i,\ i+1,\ \ldots\ ,\ j\} \in \mathcal{N} \quad (i+2 \leq j)$$

次に，$\mathcal{T}$ をその構成要素数が2つである S_0 の部分集合全体:

$$\mathcal{T} = \{\{0,1\},\ \{1,2\}, \dots,\ \{8,9\}\} \subset \mathcal{S}$$

とし，これを**終端状態集合**と呼ぶ．$\mathcal{T}$ は，これ以上分割が不可能な状態の全体をあらわしており，$\mathcal{T}$ の要素を**終端状態**と呼ぶ．$\mathcal{N}$ および $\mathcal{T}$ の定義より

$$\mathcal{N} \cup \mathcal{T} = \mathcal{S},\ \ \mathcal{N} \cap \mathcal{T} = \phi$$

である．

状態 $S \in \mathcal{N}$ を分割点 $k \in \mathcal{A}(S)$ で分割する際のコストを $c_S(S,k)$ とし**分割コスト**と呼ぶ．また，終端状態 $S \in \mathcal{T}$ に対しては**終端コスト** $c_T(S)$ を考える．

3 定式化

分割問題は，状態 S_0 が終端状態へ分割されるまで分割を繰り返し，分割コストと終端コストの総和を最小にする分割順序を求める問題として表される．動的計画問題としての定式化のため，まず政策と評価関数の表現について考える．

写像

$$\pi : \mathcal{N} \to \{2, 3, \dots, 8\}$$

で $i < \pi([i,j]) < j$ を満たすものを S_0 上の（マルコフ）**政策** と呼ぶ．以後，次の表現を用いる．

$$\pi[i,j] := \pi([i,j])$$

任意の政策は，非終端状態に対する分割点を与える．すなわち，$\pi[i,j] = k$ は，状態 $[i,j]$ を状態 $\{i,\ i{+}1,\ \dots,\ k\}$ と状態 $\{k,\ k{+}1,\ \dots,\ j\}$ へと分割することを意味する．Π $(= \Pi(S_0))$ で（マルコフ）政策全体を表し，S_0 上の（マルコフ）政策クラスと呼ぶ．

任意の政策 π $(\in \Pi)$ に対し，π から生成される状態と決定の有限交互列 $h = (S_0, k_0, S_1, k_1, \dots)$ を初期状態 S_0 に対し政策 π が実現する**履歴**と呼ぶ．すなわち，h が S_0 に対し π が実現する履歴であるとは

(i) $k_n = \pi(S_n)$

(ii) S_{n+1} が S_n の k_n による分割の一つ

を満たす場合をいう．

例 1 初期状態 S_0 および政策 π が以下のように与えられたとする．

$$S_0 = \{1, 2, 3, 4\},\ \pi[1,\ 4] = 2,\ \pi[2,\ 4] = 3$$

このとき，S_0 に対し π が実現する履歴は

$$([1,\ 4],\ 2,\ \{1,\ 2\})$$

$$([1,\ 4],\ 2,\ [2,\ 4],\ 3,\ \{2,\ 3\})$$

$$([1,\,4],\;2,\;[2,\,4],\;3,\;\{3,\,4\})$$

である． □

履歴 h は

$$\tau(h) := \min\{n \geq 0 : S_n \in \mathcal{T}\} \tag{1}$$

で定まる一意な終了時刻 $\tau(h)$ $(1 \leq \tau(h) \leq 7)$ をもつ．したがって，履歴は

$$h = (S_0, k_0, S_1, k_1, \ldots, S_{\tau-1}, k_{\tau-1}, S_\tau), \quad \tau = \tau(h)$$

とあらわされる．
定義 (1) より，

$$\begin{aligned} \tau(h) > n &\iff S_t \in \mathcal{N} \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq n, \\ \tau(h) = n &\iff S_t \notin \mathcal{T} \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq n-1, \\ &\qquad\;\; S_n \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

である．政策 π に対し $\tau(h)$ のとりうる値を $l, l+1, \cdots, u$ $(1 \leq l \leq u \leq 7)$ とするとき，状態推移の様子を表したものが図 1 である．

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{time :} & 0 & & 1 & \cdots & l-2 & & l-1 & & l & \cdots & u-1 \\
 & \mathcal{N} & & \mathcal{N} & & \mathcal{N} & & \mathcal{N} & & \mathcal{N} & & \mathcal{N} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\text{state :} & S_0 & \longrightarrow & S_1 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & S_{l-2} & \longrightarrow & S_{l-1} & \longrightarrow & S_l & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & S_{u-1} \\
 & & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \text{state :} & & & S_l & & S_{l+1} & & S_u \\
 & & & & & & & \rotatebox{-90}{$\in$} & & \rotatebox{-90}{$\in$} & & \rotatebox{-90}{$\in$} \\
 & & & & & & & \mathcal{T} & & \mathcal{T} & & \mathcal{T} \\
 & & & & \text{time :} & & & l & & l+1 & \cdots & u
\end{array}$$

図 1 Stream of states from S_0 to termination

政策 π を固定したとき，部分履歴 $h_n = (S_0, k_0, S_1, k_1, \ldots, S_{n-1}, k_{n-1}, S_n)$ で第 n 期の状態 S_n が非終端状態集合に含まれるもの，および終端状態集合に含まれるものをそれぞれ

$$\begin{aligned} H_n(\mathcal{N}) &:= \{h_n \,|\, h_n : \text{実行可能},\ S_n \in \mathcal{N}\} && 0 \leq n \leq u-1 \\ H_n(\mathcal{T}) &:= \{h_n \,|\, h_n : \text{実行可能},\ S_n \in \mathcal{T}\} && l \leq n \leq u \\ &= \{h \,|\, h : \text{履歴},\ \tau(h) = n\} \end{aligned}$$

と定義する．ここで，**実行可能**性は，各 $0 \leq m \leq n-1$ に対し S_{m+1} が S_m $(\in \mathcal{N})$ の分割点 $k_m = \pi(S_m)$ による分割の一つであることを表す．実行可能な部分履歴を**実行可能**

部分履歴と呼び，$H_n(\mathcal{N})$ および $H_n(\mathcal{T})$ をそれぞれ**非終端状態をもつ可能部分履歴集合**，**終端状態をもつ可能部分履歴集合**と呼ぶ．このとき，各可能部分履歴集合に対し，次の2種類のコストを考える：

- 時刻 n $(0 \leq n \leq u-1)$ における分割コスト

$$\sum_{h_n \in H_n(\mathcal{N})} c_S(S_n, k_n)$$

- 時刻 n $(l \leq n \leq u)$ における終端コスト

$$\sum_{h_n \in H_n(\mathcal{T})} c_T(S_n)$$

ただし，(部分) 履歴 $h_n = (S_0, k_0, \ldots, S_{n-1}, k_{n-1}, S_n)$ に関する和は，h_n の最後の状態 S_n に関してとられることを意味するものとする．

次に，初期状態 S_0 と政策 $\pi \in \Pi$ から導かれる総コスト $J(\pi; S_0)$ を

$$J(\pi; S_0) := \sum_{n=0}^{u-1} \sum_{h_n \in H_n(\mathcal{N})} c_S(S_n, k_n) + \sum_{n=l}^{u} \sum_{h_n \in H_n(\mathcal{T})} c_T(S_n),$$

と定める．ただし $k_n = \pi(S_n)$ である．ここで，$h_n \in H_n(\mathcal{N})$ は $\tau(h) > n$ と同値であり，また $h_n \in H_n(\mathcal{T})$ は $\tau(h) = n$ と同値であることより，次式が成り立つ．

$$J(\pi; S_0) = \sum_{n=0}^{u-1} \sum_{h_n \,:\, \tau(h) > n} c_S(S_n, k_n) + \sum_{n=l}^{u} \sum_{h_n \,:\, \tau(h) = n} c_T(S_n) \tag{2}$$

以上より，初期状態 S_0 に対する最適分割問題は次の最小化問題として定式される．

$$\mathbb{P}(S_0) \qquad \text{minimize} \quad J(\pi; S_0) \quad \text{subject to} \quad \pi \in \Pi \tag{3}$$

ここで，政策 π^* $(\in \Pi)$ に対し

$$J(\pi^*; S_0) \leq J(\pi; S_0) \qquad \forall \pi \in \Pi$$

のとき，π^* は**最適**であるという．我々の目的は最小値 $J(\pi^*; S_0)$ を与えるマルコフ政策 $\pi^* \in \Pi$ を見つけることである．

4 再帰式

問題 $\mathbb{P}(S_0)$ の部分問題群への埋め込みについて考える．任意の非終端状態 $S = [i, j]$ $(\in \mathcal{N})$ をえらび，S を初期状態とみなした問題 $\mathbb{P}(S)$ を，S_0 を初期状態としてもつ問題 $\mathbb{P}(S_0)$ と同様に定義する．

$$\mathbb{P}(S) \qquad \text{minimize} \quad J(\pi; S) \quad \text{subject to} \quad \pi \in \Pi(S) \tag{4}$$

ただし，$\Pi(S)$ は $\mathbb{P}(S)$ に対するマルコフ政策全体 — すなわち S に対する分割を定める政策全体 — とする．さらに，状態 S と政策 π $(\in \Pi(S))$ から定まる総コスト $J(\pi;S)$ は (2) と同様に定義されるものとする．この $\mathbb{P}(S)$ を**部分問題**と呼ぶ．なお，政策 $\hat{\pi}$ $(\in \Pi(S))$ は問題 $\mathbb{P}(S)$ の最小値を与えるときに S で最適という．

値関数 $v(S)$ で問題 $\mathbb{P}(S)$ の最小値をあらわす．

$$v(S) := \min_{\pi \in \Pi(S)} J(\pi;S) \qquad S \in \mathcal{N}$$

また

$$v(S) := c_T(S) \qquad S \in \mathcal{T}$$

とする．

このとき，次の再帰式が成り立つ．

定理 4.1

$$\begin{cases} v(S) \;=\; \underset{k \in \mathcal{A}(S)}{\mathrm{Max}} \left[c_S(S,k) + v(S'(k)) + v(S''(k)) \right] & S \in \mathcal{N} \\ v(S) \;=\; c_T(S) \qquad S \in \mathcal{T} & \end{cases} \tag{5}$$

ここで $S = [i,j]$ に対し $S'(k) = [i,k]$, $S''(k) = [k,j]$ である．

5 例題

ここでは，S_0 内の各点に対し，そのコストを**コスト関数**

$$c : S_0 \to R^1$$

で与える．そして，状態 $s = \{i,\, i+1,\, \ldots\, ,\, j\} \in \mathcal{N}$ を分割点 $k \in \mathcal{A}(s)$ で分割する際のコストを

$$c_S([i,j],k) = c(i)c(k)c(j)$$

とおき，終端状態 $s = \{i, i+1\} \in \mathcal{T}$ に対しては

$$c_T(\{i,j\}) = c(i)c(i+1)$$

とおく．なお，コスト関数については，以後省略形 $c_i := c(i)$ を用いる．

まず，簡単な例について分割の様子をツリーで表し，前節までの諸定義に対し例を与える．

5.1 Leftmost split

最も単純な分割規則のひとつとして leftmost split (図 2) が考えられる．このツリーは政策 π :

$$\pi[i,9] = i+1 \qquad 1 \leq i \leq 7$$

で与えられ，高さ7の最も高いツリーをあらわす．総コストは

$$c_9 \sum_{i=1}^{7} c_i c_{i+1} + \sum_{i=1}^{8} c_i c_{i+1}$$

となる．

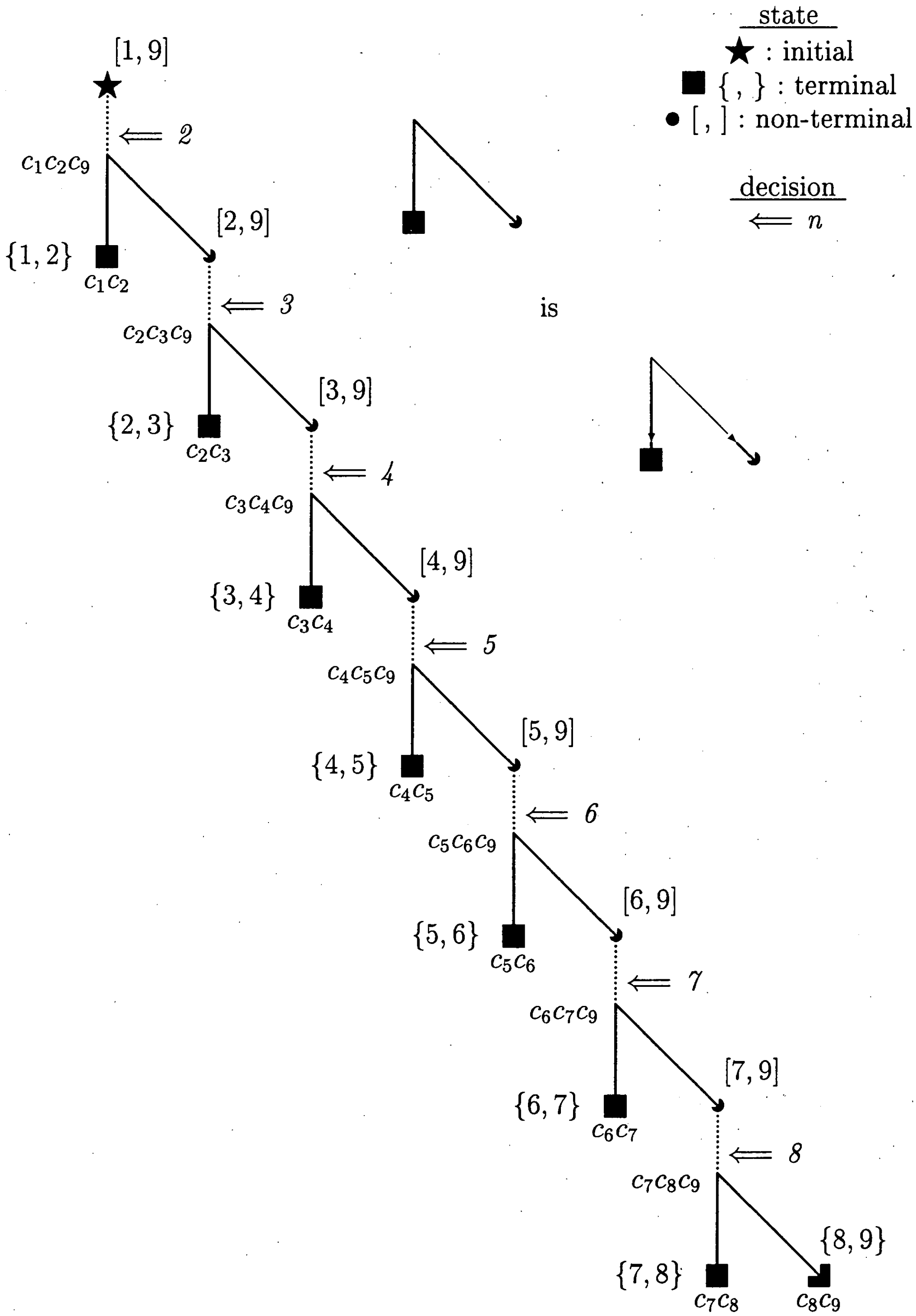

図2 The leftmost split

この leftmost split は次の 8 つの履歴をもつ．なお，各履歴の右端の数字は停止時間 $\tau(h)$ の値である．

$$
\begin{array}{l}
[1,9]2\{1,2\}: \quad 1 \\
[1,9]2[2,9]3\{2,3\}: \quad 2 \\
[1,9]2[2,9]3[3,9]4\{3,4\}: \quad 3 \\
[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5\{4,5\}: \quad 4 \\
[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6\{5,6\}: \quad 5 \\
[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6[6,9]7\{6,7\}: \quad 6 \\
[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6[6,9]7[7,9]8\{7,8\}: \quad 7 \\
[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6[6,9]7[7,9]8\{8,9\}: \quad 7
\end{array}
$$

このとき，停止時間 τ は $1,2,\ldots,7$ をとり，可能部分履歴集合 $H_n(\mathcal{N})$，$H_n(\mathcal{T})$ は以下で与えられる．

$$
\begin{array}{rcl}
H_0(\mathcal{N}) &=& \{[1,9]\} \\
H_1(\mathcal{N}) &=& \{[1,9]2[2,9]\} \\
H_1(\mathcal{T}) &=& \{[1,9]2\{1,2\}\} \\
H_2(\mathcal{N}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]\} \\
H_2(\mathcal{T}) &=& \{[1,9]2[2,9]3\{2,3\}\} \\
H_3(\mathcal{N}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]\} \\
H_3(\mathcal{T}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4\{3,4\}\} \\
H_4(\mathcal{N}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]\} \\
H_4(\mathcal{T}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5\{4,5\}\} \\
H_5(\mathcal{N}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6[6,9]\} \\
H_5(\mathcal{T}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6\{5,6\}\} \\
H_6(\mathcal{N}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6[6,9]7[7,9]\} \\
H_6(\mathcal{T}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6[6,9]7\{6,7\}\} \\
H_7(\mathcal{T}) &=& \{[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6[6,9]7[7,9]8\{7,8\}, \\
&& \quad ,[1,9]2[2,9]3[3,9]4[4,9]5[5,9]6[6,9]7[7,9]8\{8,9\}\}
\end{array}
$$

5.2 Mid-center split

次に政策 σ：

$$
\sigma[1,9]=5; \quad \sigma[1,5]=3, \quad \sigma[5,9]=7;
$$
$$
\sigma[1,3]=2, \quad \sigma[3,5]=4, \quad \sigma[5,7]=6, \quad \sigma[7,9]=8
$$

で与えられる分割規則 Mid-center split (図 3) を考える．この分割規則は，高さ 3 の最も低い左右対称なツリーをあらわす．

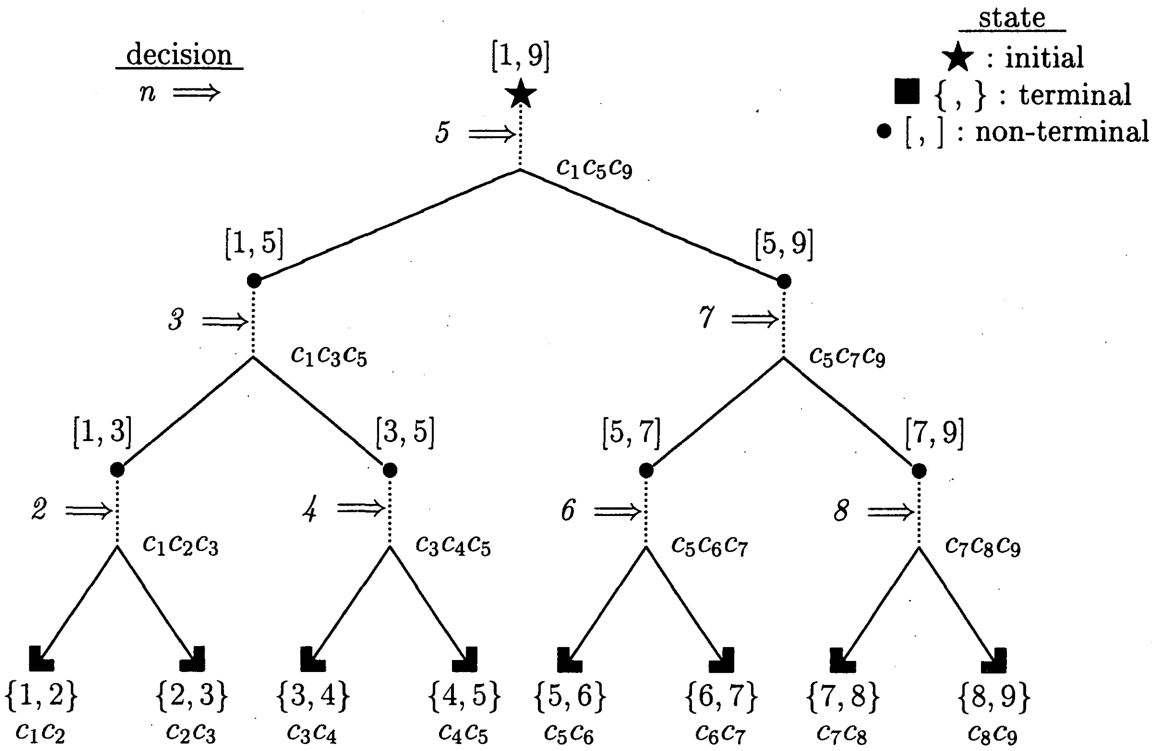

図 3 The mid-center split

総コストは

$$c_1c_5c_9 + c_1c_3c_5 + c_5c_7c_9 + c_1c_2c_3 + c_3c_4c_5 + c_5c_6c_7 + c_7c_8c_9 + \sum_{i=1}^{8} c_ic_{i+1}$$

で与えられ，次の 8 つの履歴をもつ．

$$\begin{array}{ll}
[1,9]5[1,5]3[1,3]2\{1,2\}: & 3 \\
[1,9]5[1,5]3[3,5]4\{3,4\}: & 3 \\
[1,9]5[1,5]3[3,5]4\{4,5\}: & 3 \\
[1,9]5[5,9]7[5,7]6\{5,6\}: & 3 \\
[1,9]5[5,9]7[5,7]6\{6,7\}: & 3 \\
[1,9]5[5,9]7[7,9]8\{7,8\}: & 3 \\
[1,9]5[5,9]7[7,9]8\{8,9\}: & 3
\end{array}$$

ここでは，すべての履歴が共通の停止時間 3 をもつ．よって，可能部分履歴集合は

$$
\begin{aligned}
H_0(\mathcal{N}) &= \{[1,9]\} \\
H_1(\mathcal{N}) &= \{[1,9]5[1,5], [1,9]5[5,9]\} \\
H_1(\mathcal{T}) &= \phi \\
H_2(\mathcal{N}) &= \{[1,9]5[1,5]3[1,3], [1,9]5[1,5]3[3,5], \ldots, [1,9]5[5,9]7[7,9]\} \\
H_2(\mathcal{T}) &= \phi \\
H_3(\mathcal{N}) &= \{[1,9]5[1,5]3[1,3]2\{1,2\}, [1,9]5[1,5]3[1,3]2\{2,3\}, \ldots, [1,9]5[5,9]7[7,9]8\{8,9\}\}
\end{aligned}
$$

で与えられ，総コストは次のようにあらわされる．

$$
\begin{aligned}
& c_S([1,9], \sigma[1,9]) \\
& + c_S([1,5], \sigma[1,5]) + c_S([5,9], \sigma[5,9]) \\
& + c_S([1,3], \sigma[1,3]) + c_S([3,5], \sigma[3,5]) + c_S([5,7], \sigma[5,7]) + c_S([7,9], \sigma[7,9]) \\
& + c_T(\{1,2\}) + c_T(\{2,3\}) + \cdots + c_T(\{8,9\}) \\
= & \sum_{h_0 \in H_0(\mathcal{N})} c_S(S_0, \sigma(S_0)) + \sum_{h_1 \in H_1(\mathcal{N})} c_S(S_1, \sigma(S_1)) + \sum_{h_2 \in H_2(\mathcal{N})} c_S(S_2, \sigma(S_2)) + \sum_{h_3 \in H_3(\mathcal{T})} c_T(S_3)
\end{aligned}
$$

5.3 再帰式の計算

再帰式 (5) を用いた計算の概要を示す．実際，この場合の再帰式は次のように表現される．

$$
\begin{cases}
w(i,j) = \min_{i<k<j} [\, c_i c_k c_j + w(i,k) + w(k,j) \,] & 1 \le i < i+1 < j \le 9 \\
w(i,i+1) = c_i c_{i+1} & 1 \le i \le 8
\end{cases} \tag{6}
$$

ただし，ここでは次のコスト関数を用いるものとする．

$$
c_i = c(i) = i \quad 1 \le i \le 9
$$

また，非終端状態 $S = [i,j]$ に対し，$\Delta = j - i$ と定める．この Δ を増加させながら計算は進められる．

$\boxed{\Delta = 1}$

$$
\begin{aligned}
w(1,2) &= c_1 c_2 = 1 \cdot 2 = 2 \\
w(2,3) &= c_2 c_3 = 2 \cdot 3 = 6 \\
&\vdots \\
w(8,9) &= c_8 c_9 = 8 \cdot 9 = 72
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Delta = 2}$

$$
\begin{aligned}
w(1,3) &= \min_{1<k<3} [\, c_1 c_k c_3 + w(1,k) + w(k,3) \,] \\
&= c_1 c_2 c_3 + w(1,2) + w(2,3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 + 6 \\
&= 14, \qquad \pi^*(1,3) = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w(2,4) &= \min_{2<k<4}[\, c_2 c_k c_4 + w(2,k) + w(k,4)\,] \\
&= c_2 c_3 c_4 + w(2,3) + w(3,4) = 2\cdot 3\cdot 4 + 6 + 12 \\
&= 42, \qquad \pi^*(2,4) = 3
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
w(7,9) &= \min_{7<k<9}[\, c_7 c_k c_9 + w(7,k) + w(k,9)\,] \\
&= c_7 c_8 c_9 + w(7,8) + w(8,9) = 7\cdot 8\cdot 9 + 56 + 72 \\
&= 632
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Delta = 7}$

$$
\begin{aligned}
w(1,8) &= \min_{1<k<8}[\, c_1 c_k c_8 + w(1,k) + w(k,8)\,] \\
&= \min[\, c_1 c_2 c_8 + w(1,2) + w(2,8),\ c_1 c_3 c_8 + w(1,3) + w(3,8), \\
&\qquad c_1 c_4 c_8 + w(1,4) + w(4,8),\ c_1 c_5 c_8 + w(1,5) + w(5,8), \\
&\qquad c_1 c_6 c_8 + w(1,6) + w(6,8),\ c_1 c_7 c_8 + w(1,7) + w(7,8)\,] \\
&= \min[\,604, 642, 760, 736, 620, 334\,] \\
&= 334, \qquad \pi^*(1,8) = 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w(2,9) &= \min_{2<k<9}[\, c_2 c_k c_9 + w(2,k) + w(k,9)\,] \\
&= \min[\, c_2 c_3 c_9 + w(2,3) + w(3,9),\ c_2 c_4 c_9 + w(2,4) + w(4,9), \\
&\qquad c_2 c_5 c_9 + w(2,5) + w(5,9),\ c_2 c_6 c_9 + w(2,6) + w(6,9), \\
&\qquad c_2 c_7 c_9 + w(2,7) + w(7,9),\ c_2 c_8 c_9 + w(2,8) + w(8,9)\,] \\
&= \min[\,952, 1134, 1314, 1238, 1076, 802\,] \\
&= 802, \qquad \pi^*(2,9) = 8
\end{aligned}
$$

$\boxed{\Delta = 8}$

$$
\begin{aligned}
w(1,9) &= \min_{1<k<9}[\, c_1 c_k c_9 + w(1,k) + w(k,9)\,] \\
&= \min[\, c_1 c_2 c_9 + w(1,2) + w(2,9),\ c_1 c_3 c_9 + w(1,3) + w(3,9), \\
&\qquad c_1 c_4 c_9 + w(1,4) + w(4,9),\ c_1 c_5 c_9 + w(1,5) + w(5,9), \\
&\qquad c_1 c_6 c_9 + w(1,6) + w(6,9),\ c_1 c_7 c_9 + w(1,7) + w(7,9), \\
&\qquad c_1 c_8 c_9 + w(1,8) + w(8,9)\,] \\
&= \min[\,1\cdot 2\cdot 9 + 2 + 802,\ 1\cdot 3\cdot 9 + 14 + 892,\ 1\cdot 4\cdot 9 + 38 + 1020, \\
&\qquad 1\cdot 5\cdot 9 + 78 + 1122,\ 1\cdot 6\cdot 9 + 138 + 938,\ 1\cdot 7\cdot 9 + 222 + 632, \\
&\qquad 1\cdot 8\cdot 9 + 334 + 72\,] \\
&= \min[\,822, 933, 1094, 1245, 1130, 917, 478\,] \\
&= 478, \qquad \pi^*(1,9) = 8.
\end{aligned}
$$

以上より，最小分割コスト $w(1,9)=478$，および最適政策 π^*：

$$\pi^*[i,j]=j-1$$

を得る．

5.4 行列積の計算順序最適化

分割問題の具体的応用として，複数の行列の行列積に関する計算順序最適化を考える．A_i $(i=1,2,3,4)$ を m_i 行 m_{i+1} 列の行列とし，その積

$$A_1A_2A_3A_4$$

を考える．簡単のため，計算量の尺度として，必要となる積演算の回数を考える．左から順に計算した場合

$$m_1\times m_2\times m_3+m_1\times m_3\times m_4+m_1\times m_4\times m_5$$

であり，右から順に計算した場合は

$$m_3\times m_4\times m_5+m_2\times m_3\times m_5+m_1\times m_2\times m_5 \tag{7}$$

である．一般に，計算順序によって必要な積演算の回数は異なり，計算効率を上げるためには積演算回数の最小化問題を解く必要がある．この問題が分割問題として定式化されることを示す．

まず，初期状態を

$$S_0=\{1,2,3,4,5\}$$

とする．各 $i\in S_0$ に対するコスト関数を

$$c_i=m_i$$

とおき，終端コストは $c_T(\{i,i+1\})=0$ とおく．また，決定は行列積の分割場所のことであり，$k\in\mathcal{A}=\{2,3,4\}$ は A_k の前で分割することをあらわす．すなわち，$A_1\times\cdots\times A_{k-1}$ と $A_k\times\cdots\times A_4$ を分けて計算した後，両者の積を取ることを意味する．このとき，問題 $\mathbb{P}(S_0)$ は積演算回数最小化問題となっており，定理 4.1 の再帰式を用いて解を求めることができる．

例 2 政策

$$\pi[1,5]=2,\ \pi[2,5]=3,\ \pi[3,5]=4$$

は，右から順に積を計算することをあらわす．実際，この政策から定まる可能部分履歴集合は

$$\begin{aligned}
H_0(\mathcal{N}) &= \{[1,5]\}\\
H_1(\mathcal{N}) &= \{[1,5]2[2,5]\}\\
H_1(\mathcal{T}) &= \{[1,5]2[1,2]\}\\
H_2(\mathcal{N}) &= \{[1,5]2[2,5]3[3,5]\}\\
H_2(\mathcal{T}) &= \{[1,5]2[1,2]3[2,3]\}\\
H_3(\mathcal{T}) &= \{[1,5]2[1,2]3[3,5]4[3,4],\ [1,5]2[1,2]3[3,5]4[4,5]\}
\end{aligned}$$

で与えられ，総コストを次のように定める．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{h_0\in H_0(\mathcal{N})} c_S(S_0,\pi(S_0)) + \sum_{h_1\in H_1(\mathcal{N})} c_S(S_1,\pi(S_1)) + \sum_{h_2\in H_2(\mathcal{N})} c_S(S_2,\pi(S_2)) \\
&\qquad + \sum_{h_1\in H_1(\mathcal{T})} c_T(S_1) + \sum_{h_2\in H_2(\mathcal{T})} c_T(S_2) + \sum_{h_3\in H_3(\mathcal{T})} c_T(S_3) \\
= \;& c_S([1,5],2) + c_S([2,5],3) + c_S([3,5],4) \\
&\qquad + c_T(\{1,2\}) + c_T(\{2,3\}) + (c_T(\{3,4\}) + c_T(\{4,5\})) \\
= \;& m_1m_2m_5 + m_2m_3m_5 + m_3m_4m_5 + 0 + 0 + (0+0) \\
= \;& m_1m_2m_5 + m_2m_3m_5 + m_3m_4m_5
\end{aligned}
$$

これは (7) に一致する． □

6 おわりに

ここで扱った分割問題は，行列積の計算順序最適化問題等への応用が可能なものではあるが，極めて基本的のものである．ただし，ここでの目的は分割問題に対して動的計画法の枠組みを与える先鞭をつけることであり，実際，非決定性動的計画という枠組みの中で問題を定義し，解法を導くことができた．

今後，実問題への応用範囲を広げていくためには，あるいは分割問題の本質を掘り下げていくためには，より一般的な問題を扱えるよう拡張する必要がある．例えば，部分履歴 $h_n = (S_0, k_0, S_1, k_1, \ldots, S_n)$ に対し，次の重み関数を導入する．

$$W_n(h_n) = \beta(S_0,k_0,S_1)\beta(S_1,k_1,S_2)\cdots\beta(S_{n-1},k_{n-1},S_n)$$

ここで，$\beta(S,k,T)$ は，非終端状態 S を $k\in\mathcal{A}(S)$ で分割した際，状態 T へ分割される際の重みとする．このとき，重みつきの総コスト：

$$J(\pi;S_0) := \sum_{n=0}^{u-1} \sum_{h_n\in H_n(\mathcal{N})} W_n(h_n)r(S_n,k_n) + \sum_{n=l}^{u} \sum_{h_n\in H_n(\mathcal{T})} W_n(h_n)c(S_n)$$

をもつ問題などは，考えるに値する問題であろう．また，履歴の停止規則やコスト関数についても考える必要があると思われる．

参考文献

[1] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] R.E. Bellman and L.A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, Management Sci. **17**(1970), B141-B164.

[3] T. Fujita, Re-examination of Markov Policies for Additive Decision Process, Bull. Informatics and Cybernetics, **29**(1997), 51-65.

[4] T. Fujita and S. Iwamoto, Fractional Markov decision processes, Ed. H.F. Wang and U.P. Wen, Proceedings of The Eighth BELLMAN CONTINUUM, National Tsing Hua University, Hsinchu, ROC, Dec., 2000, 7-11.

[5] T. Fujita and K. Tsurusaki, Stochastic Optimization of Multiplicative Functions with Negative ValueJ. Operations Res. Soc. Japan **41**(1998), 351-373.

[6] R. A. Howard, *Dynamic Programming and Markov Processes*, MITPress, Cambridge, Mass., 1960.

[7] S. Iwamoto, *Theory of Dynamic Program: Japanese*, Kyushu Univ. Press, Fukuoka, 1987.

[8] S. Iwamoto, Associative dynamic programs, J. Math. Anal. Appl., **201**(1996), 195-211.

[9] S. Iwamoto, Maximizing threshold probability through invariant imbedding, Ed. H.F. Wang and U.P. Wen, Proceedings of The Eighth BELLMAN CONTINUUM, National Tsing Hua University, Hsinchu, ROC, Dec., 2000, 17-22.

[10] S. Iwamoto, K. Tsurusaki and T. Fujita, On Markov policies for minimax decision processes. J. Math. Anal. Appl. 253 (2001), no. 1, 58–78.

[11] A. Lew, A Petri net model for discrete dynamic programming, Proceedings of the 9-th Bellman Continuum : International Workshop on Uncertain Systems and Soft Computing, July, 2002, Beijing, China, pp.16–21.

[12] M. L. Puterman, *Markov Decision Processes : discrete stochastic dynamic programming*, Wiley & Sons, New York, 1994.

[13] M. Sniedovich, A class of nonseparable dynamic programming problems, J. Opt. Theo. Anal. **52**(1987), 111-121.

[14] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. NY, 1992.

[15] N.L. Stokey and R.E. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1989