ファジィゲーム

西﨑一郎　　坂和正敏

広島大学大学院工学研究科複雑システム工学専攻

〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1
TEL: 0824-24-7695　FAX: 0824-22-7195
E-mail: nisizaki@msl.sys.hiroshima-u.ac.jp
sakawa@msl.sys.hiroshima-u.ac.jp

概要：協力ゲームは提携の形成を前提として考察され，提携のメンバーがその提携に属さないプレイヤーの助力なしに獲得できる利得は提携値と呼ばれている．この提携値とプレイヤーの集合によってゲームが定義される．本稿では，提携値を正確に見積もることが困難であるとの観点から，ファジィ数で表された提携値をもつファジィ協力ゲームを考察する．ファジィ協力ゲームの基礎を概観した後，最適化問題と関連する応用例として割当てゲームと生産計画ゲームを示す．

1. はじめに

通常の最適化モデルにおいては，意思決定者は1人あるいは同じ関心をもつ意思決定者が複数存在する場合について考察されてきている．しかし，経営あるいは公共の意思決定問題においては，一般に意思決定者が複数でそれぞれの関心はお互いに異なるものとして考えられる．このとき個々の意思決定者にとって，自己の意思決定のみならず他の意思決定者の決定にも結果が影響を受けることになり，そこでは意思決定者が自己の目的を最適化するために，他の意思決定者と競争したり，あるいは協調しながら合理的な結果を導き出そうとする．このような複数の意思決定者の相互依存関係を数学モデルとして定式化し，それぞれの意思決定者にとって合理的な結果を分析する理論がゲーム理論と呼ばれている．特に，複数の意思決定者（プレイヤー）が提携を形成することを前提に問題を分析する場合，協力ゲームの理論と呼ばれ，本稿ではあいまい性が考慮された協力ゲームに焦点を当てる．協力ゲームでは，すべてのプレイヤーの集合の部分集合として表現される提携の概念が基礎となり，各提携がそのメンバーだけで獲得できる利得，すなわち提携値を見積もった上で，各プレイヤーへの合理的な利得の分配が考察されており，最適化問題と関連し，解の概念としてコア [3] を用いた応用例も示されている [10, 6, 1, 5].

一方，現実の意思決定問題を数学モデルとして定式化する場合，各種のパラメータはある一定の数値に設定され，必要となればパラメータの一部の変動を考慮した感度解析が行われる．しかし，パラメータ自身のあいまい性や不確実性が明確に認識されるような場合には，ファジィパラメータや確率変数を含む不確実性下の数学モデルが定式化される [9, 7, 2, 8]．本稿で取り扱う協力ゲームにおいて，パラメータのあいまい性を考慮すれば，提携のメンバーがその提携に属さないプレイヤーの助力なしに獲得できる利得である提

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

携値を正確に見積もることが困難であるとの観点から，提携値をファジィ数で表わす協力ゲームの表現が必要となる．本稿では，ファジィ提携値をもつ協力ゲームの基礎を概観した後，最適化問題と関連する応用例として，ファジィ環境下での割当てゲームと生産計画ゲームを取り上げる [5, 4].

2. ファジィ提携値をもつ協力ゲーム

プレイヤー全体の集合を N として，N の部分集合として表現される任意の提携 $S \subseteq N$ に対して実数直線 R 上のファジィ数 $\tilde{v}(S)$ を考える．ここでは，提携 S 以外のメンバーがいかなる行動をとったとしても，S のメンバーのみで獲得できる利得の総計を $\tilde{v}(S)$ とし，その値は実数直線上のファジィ数であると考える．このようなファジィ数の集まりを $\tilde{V} = \{\tilde{v}(S) \mid S \subseteq N\}$ と表すと，ファジィ協力ゲームはプレイヤーの集合 N とファジィ数の集合 $\tilde{V}$ のペア $(N, \tilde{V})$ で表現される．

R において提携 S のファジィ提携値 $\tilde{v}(S)$ は正規かつ凸ファジィ集合で，そのメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{v}(S)}(v)$ が連続で，メンバシップ値が 0 および 1 となる有限な v の値をもつファジィ数で表されるとする．このとき，$\alpha \in [0, 1]$ に対してメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{v}(S)}(v)$ が α 以上となる R 上の非ファジィ集合を $\tilde{v}(S)$ の α-レベル集合といい，

$$\tilde{v}_\alpha(S) = \{v \in R \mid \mu_{\tilde{v}(S)}(v) \geqq \alpha\} \tag{1}$$

で表す．$\tilde{v}(S)$ はファジィ数なので， α-レベル集合 $\tilde{v}_\alpha(S)$ は区間 $[v^L_\alpha(S), v^R_\alpha(S)]$ で表現される．

すべてのプレイヤーがファジィ数を規定するメンバシップ関数の帰属度がすべてある値 α （許容レベル）以上であればよいと判断したと仮定すると，提携値は α-レベル集合を表す区間 $[v^L_\alpha(S), v^R_\alpha(S)]$ の任意の値をとると解釈できる．許容レベル α が与えられたとき，ファジィ協力ゲーム $(N, \tilde{V})$ において，通常の協力ゲーム (N, v) における基礎概念の定義や解概念としてのコアの定義が次のように拡張される．

定義 1 (α-優加法的ゲーム) 与えられた $\alpha \in [0, 1]$ と $S \cap T = \emptyset$ となる任意の提携 S, T に対して

$$v^R_\alpha(S \cup T) \geqq v^R_\alpha(S) + v^R_\alpha(T) \tag{2}$$

$$v^L_\alpha(S \cup T) \geqq v^L_\alpha(S) + v^L_\alpha(T) \tag{3}$$

が成立するファジィ協力ゲームを α-優加法的であるという．

定義 2 (α-配分) 与えられた $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$v^L_\alpha(N) \leqq \sum_{i \in N} x_i \leqq v^R_\alpha(N) \tag{4}$$

$$x_i \geqq v^L_\alpha(\{i\}), \ \forall i \in N \tag{5}$$

を満足する利得ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ を α-配分という．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

定義 3 (α-支配関係) 与えられた $\alpha \in [0,1]$ に対して $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を α-配分とする．このとき

$$x_i > y_i, \ \forall i \in S \tag{6}$$
$$\sum_{i \in S} x_i \leqq v_\alpha^L(S) \tag{7}$$

が成立すれば，$\boldsymbol{x}$ は S を通じて $\boldsymbol{y}$ を α-支配するといい，$\boldsymbol{x}$ α-dom_S $\boldsymbol{y}$ と表す．

定義 4 (α-コア) 与えられた $\alpha \in [0,1]$ に対してファジィ協力ゲーム $(N, \tilde{V})$ における，すべての α-支配されない配分を α-コアといい，α-$C(N, \tilde{V})$ と表す．

定理 1 与えられた $\alpha \in [0,1]$ に対して優加法的で，$v_\alpha^R(N) - v_\alpha^L(N) \geqq v_\alpha^R(S) - v_\alpha^L(S)$, $\forall S \subset N$ をみたすファジィ協力ゲーム $(N, \tilde{V})$ における α-コア α-$C(N, \tilde{V})$ は次の条件を満たす n 次元ベクトル $\boldsymbol{x} \in R^n$ の集合である．

$$\sum_{i \in S} x_i \geqq v_\alpha^L(S), \ \forall S \subset N \tag{8}$$
$$v_\alpha^L(N) \leqq \sum_{i \in N} x_i \leqq v_\alpha^R(N) \tag{9}$$

次に，α-優加法的で，定理 1 の条件を満たすファジィ協力ゲームの α-コアが空でない条件を考察する．任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して，条件 (8) を制約とした線形計画問題

$$\left.\begin{array}{rl} \text{minimize} & z_\alpha = x_1 + \cdots + x_p \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \geqq v_\alpha^L(S), \ \forall S \subset N \\ & x_1, \ldots, x_n \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{10}$$

の最小値 z_α^* に対して $z_\alpha^* \leqq v_\alpha^R(N)$ が成立すれば，ファジィ協力ゲーム $(N, \tilde{V})$ の α-コアは存在する．また，問題 (10) の双対問題は

$$\left.\begin{array}{rl} \text{maximize} & q_\alpha = \displaystyle\sum_{S \subset N} y_S v_\alpha^L(S) \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{S \subset N_i} y_S = 1, \ \forall i \in N \\ & y_S \geqq 0, \ \forall S \subset N \end{array}\right\} \tag{11}$$

となるため，次の定理が得られる．ここで $N_i = \{S \subset N \mid i \in S\}$ である．

定理 2 与えられた $\alpha \in [0,1]$ に対して，優加法的なファジィ協力ゲーム $(N, \tilde{V})$ が非空の α-コアをもつ条件は問題 (11) の制約条件を満たす y_S, $S \subset N$ が

$$\sum_{S \subset N} v_\alpha^L(S) y_S \leqq v_\alpha^R(N) \tag{12}$$

を満たすことである．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

3. ファジィ提携値をもつ協力ゲームの応用

最適化問題と協力ゲームの関連を考察した研究として，割当てゲーム [10] や生産計画ゲーム [6] があるが，割当て問題や生産計画問題に含まれる数多くのパラメータに対して，問題の定式化に携わった専門家の人間としての判断をより適切に表現するためには，従来のように何らかの経験的あるいは主観的な方法である値に設定するよりはむしろ，含まれるパラメータそのものを「だいたい m ぐらいの数」であるというようなファジィ数としてとらえた方が，現実の意思決定状況をより適切に表すことが可能になるものと期待できる．このような観点から，割当て問題や生産計画問題の目的関数と制約式に含まれるパラメータのあいまい性がファジィ数として特性づけられると仮定すると [9, 7]，ファジィパラメータを含む割当て問題や生産計画問題は次のように定式化される．

まず定式化される問題に含まれるパラメータの比較的少ない割当て問題について考える．m 人からなる売り手の集団 $M = \{1, \ldots, m\}$ と同じく m 人からなる買い手の集団 $M' = \{m+1, \ldots, 2m\}$ がある．売り手と買い手の集団全体を $N = M \cup M'$ とする．売買の対象を家とすると，売り手 $i \in M$ は a_i 円と評価できる家を 1 件所有している．買い手 $m+j \in M'$ は家を 1 件だけ購入したいと考え，売り手 i の家には b_{ij} の価値を評価している．そこで，売り手と買い手の全員を集めて最も互いに都合の良いペアを見つけ，そのことで得られる利益全体を売り手と買い手の全員で分配して受け取る状況が協力ゲームの考えで記述できる．

このとき，売り手 i や買い手 $m+j$ の家に関する評価があいまいであるならば，売り手 i が所有する家の評価はだいたい a_i 円で，買い手 $m+j$ の売り手 i の所有する家の評価はだいたい b_{ij} 円であるというように評価されるであろう．これらの評価値をファジィ数 $\tilde{a}_i, \tilde{b}_{ij}$ で表現すると，売り手 i と買い手 $m+j$ の共同の利益もファジィ数

$$\tilde{v}(\{i, m+j\}) = \tilde{c}_{ij} = \tilde{b}_{ij} - \tilde{a}_i \tag{13}$$

と考えることができる．ここで，$\tilde{c}_{ij}$ のメンバシップ関数の定義域が負になる部分の帰属度は 0 とする．このとき，提携 S のファジィパラメータを含む割当て問題は次のように表現される．

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i\in S\cap M}\ \sum_{m+j\in S\cap M'} \tilde{c}_{ij} p_{ij} \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i\in S\cap M} p_{ij} \leqq 1,\ m+j \in S\cap M' \\
 & \displaystyle\sum_{m+j\in S\cap M'} p_{ij} \leqq 1,\ i \in S\cap M \\
 & p_{ij} \in \{0,1\},\ i\in S\cap M,\ m+j\in S\cap M'
\end{array}\right\} \tag{14}$$

また，全体提携 N についても同様にファジィパラメータを含む割当て問題は次のように

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

表現される．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{c}_{ij}p_{ij} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}p_{ij}=1,\ j=1,\ldots,m \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1,\ i=1,\ldots,m \\ & p_{ij}\in\{0,1\},\ i,j=1,\ldots,m\end{array}\right\} \tag{15}$$

問題(14)に対してファジィ数で表現される目的関数の最大値が評価されると，提携 S 自身で獲得できる共同の利益の最大値を提携値 $\tilde{v}(S)$ とすることによってファジィ協力ゲーム $(N,\tilde{V})$ を生成できる．

ここでは，共同の利益の最大値を求めるために α-レベル集合を用いる．表記を簡単にするために，全体提携 N に関する問題を考える．すなわち，与えられた $\alpha\in[0,1]$ に対して，ファジィ数 $\tilde{\boldsymbol{c}}=(\tilde{c}_{ij}), i,j=1,\ldots,m$ のすべてのメンバシップ関数の値が α 以上であるような α-レベル集合

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_{\alpha}=\{\boldsymbol{c}\mid\mu_{\tilde{c}_{ij}}(c_{ij})\geqq\alpha,\ i,j=1,\ldots,m\} \tag{16}$$

を導入する．すべての意思決定者が割当て問題(15)の目的関数に含まれるファジィ数を規定するメンバシップ関数の帰属度が，すべてある値 α 以上であればよいと判断したと仮定しよう．このとき，割当て問題は係数 $\boldsymbol{c}\in\tilde{\boldsymbol{c}}_{\alpha}$ に依存する通常の割当て問題として，次のように定式化できる．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}p_{ij} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}p_{ij}=1,\ j=1,\ldots,m \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1,\ i=1,\ldots,m \\ & p_{ij}\in\{0,1\},\ i,j=1,\ldots,m\end{array}\right\} \tag{17}$$

このような割当て問題は，係数 $\boldsymbol{c}\in\tilde{\boldsymbol{c}}_{\alpha}$ に依存して無限個存在することになるが，係数 $\boldsymbol{c}$ の値は α-レベル集合 $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\alpha}$ に属する任意の値である．すなわち，ファジィ数のベクトルのすべてのメンバシップ関数の帰属度が α 以上であるという意味においては任意である．

このとき，ファジィパラメータを含む問題に対して，係数 $\boldsymbol{c}\in\tilde{\boldsymbol{c}}_{\alpha}$ を任意に選ぶことが可能であれば，目的関数に対して楽観的な最大値の評価と悲観的な最大値の評価が考えら

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

れ，与えられた $\alpha \in [0,1]$ に対して，次の2種類の計画問題を定式化できる．

$$\left.\begin{array}{ll}\underset{\boldsymbol{c}}{\text{maximize}} & \max\limits_{\boldsymbol{p}} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij}p_{ij} \\ \text{subject to} & \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij} = 1,\ j = 1,\ldots,m \\ & \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,m \\ & p_{ij} \in \{0,1\},\ i,j = 1,\ldots,m \\ & \boldsymbol{c} \in \tilde{\boldsymbol{c}}_\alpha \end{array}\right\} \quad (18)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\underset{\boldsymbol{c}}{\text{minimize}} & \max\limits_{\boldsymbol{p}} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij}p_{ij} \\ \text{subject to} & \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij} = 1,\ j = 1,\ldots,m \\ & \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ i = 1,\ldots,m \\ & p_{ij} \in \{0,1\},\ i,j = 1,\ldots,m \\ & \boldsymbol{c} \in \tilde{\boldsymbol{c}}_\alpha \end{array}\right\} \quad (19)$$

ここで，$\boldsymbol{p} = (p_{ij}),\ i,j = 1,\ldots,m$ である．問題 (18), (19) においては，係数 $\boldsymbol{c}$ は，もはや単に係数としてではなく，変数として取り扱われていることに注意しよう．

[0,1] の区間でいくつかの α を取り上げて問題 (19) と問題 (18) を解くことによって図1に示されるようなファジィ提携値 $\tilde{v}(N)$ を構成することを考える．

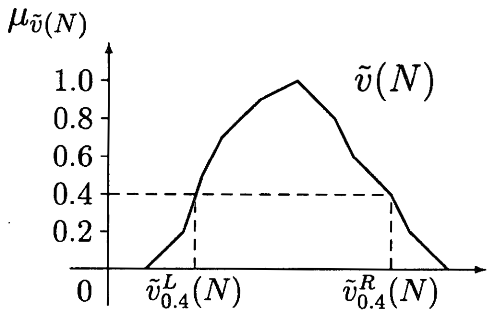

図 1: 提携 N のファジィ提携値

問題 (18) に対しては，幸運にもファジィ数 $\tilde{\boldsymbol{c}}$ に対する α-レベル集合の性質より，$\tilde{\boldsymbol{c}}$ の実行可能領域は，それぞれ対応する α-レベル集合の左右の端点を用いて，閉区間 $[\boldsymbol{c}^L, \boldsymbol{c}^R]$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

のように表されるので，問題 (18) の最適解は次の問題を解くことにより得られる．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{R} p_{ij} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1,\ j = 1,\dots,m \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ i = 1,\dots,m \\ & p_{ij} \in \{0,1\},\ i,j = 1,\dots,m \end{array}\right\} \tag{20}$$

この問題の制約式の係数は 0 と 1 のみで，右辺定数も整数であるため，問題 (20) の最適解はその実数緩和問題の最適解である．

一方，問題 (19) については，その実数緩和問題を考えても

$$\left.\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{c}}{\text{minimize}} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} p_{ij} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{c} \in \tilde{\mathbf{c}}_{\alpha} \\ & \begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{p}}{\text{maximize}} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} p_{ij} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1,\ j = 1,\dots,m \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ i = 1,\dots,m \\ & p_{ij} \geqq 0,\ i,j = 1,\dots,m \end{array} \end{array}\right\} \tag{21}$$

となる．制約式の中にある $\boldsymbol{c}$ をパラメータとした問題は線形計画問題となり，その最適性の条件は Kuhn-Tucker の条件で与えられるので，問題 (21) は線形制約式と相補条件式で構成された制約条件のもとで，2 次形式となる目的関数を最小化する通常の 1 レベルの計画問題に還元できる．

しかし，問題 (21) と等価な非線形計画問題をさまざまな α に対して解くことは，計算の観点から困難であるため，問題 (19) とは完全に等価ではないが，問題 (15) の最適値を悲観的に見積もる問題として，線形計画問題

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{L} p_{ij} \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1,\ j = 1,\dots,m \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,\ i = 1,\dots,m \\ & p_{ij} \in \{0,1\},\ i,j = 1,\dots,m \end{array}\right\} \tag{22}$$

を採用する．この問題の最適値は問題 (20) に比べて明らかに小さい最適値を与える．

問題 (20) と問題 (22) の最適解をそれぞれ $\boldsymbol{p}^{*NR}, \boldsymbol{p}^{*NL}$ とする．このとき，

$$v_{\alpha}^{L}(N) \equiv \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{L} p_{ij}^{*\,NL} \tag{23}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$v_\alpha^R(N) \equiv \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}^R p_{ij}^{*\ NR} \tag{24}$$

とおき，α の値を $[0,1]$ の間でさまざまに変化させていくことによって，図 1 のようなファジィ数で表される提携値 $\tilde{v}(N)$ を構成することができる．同様に $\tilde{v}(S)$ を構成することができるので問題 (14) や問題 (15) からファジィ協力ゲーム $(N,\tilde{V})$ が生成されることが示された．

次に，ファジィパラメータを含む生産計画問題について考察する [5]．意思決定者の集合を $N=\{1,\ldots,n\}$ とし，各意思決定者はそれぞれが所有する資源を共同で使用することにより，p 種類の製品を製造すると考える．意思決定者 $i \in N$ の初期所有資源を $\tilde{\boldsymbol{b}}^i=(\tilde{b}_1^i,\ldots,\tilde{b}_m^i)$ とする．ここで，$\tilde{b}_k^i$ は意思決定者 i が所有する k 番目の資源の量で，ファジィ数で表されるものとする．

任意の提携 $S \subseteq N$ の所有する資源 k の総量は

$$\tilde{b}_k(S)=\sum_{i\in S}\tilde{b}_k^i \tag{25}$$

である．製品 j を 1 単位製造するには資源 $k \in \{1,\ldots,m\}$ をそれぞれ $\tilde{a}_{kj}$ 単位必要とする．また，製品 j を 1 単位販売すると $\tilde{c}_j$ の収入があるとする．パラメータ $\tilde{a}_{kj}, \tilde{c}_j$ もファジィ数とする．

需要には制限がないものとして，この生産計画問題を資源制約のもとで p 種類の製品の販売による収入の最大化を目的としたファジィパラメータを含む最適化問題として定式化する．この生産計画モデルが線形であるとすると，一般に提携 S の下でのファジィパラメータを含む生産計画問題は次のように表現される．

$$\left.\begin{array}{rl}\text{maximize} & \tilde{c}_1u_1+\cdots+\tilde{c}_pu_p\\ \text{subject to} & \tilde{a}_{11}u_1+\cdots+\tilde{a}_{1p}u_p \leqq \tilde{b}_1(S)\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \tilde{a}_{m1}u_1+\cdots+\tilde{a}_{mp}u_p \leqq \tilde{b}_m(S)\\ & u_1,\ldots,u_p \geqq 0\end{array}\right\} \tag{26}$$

この問題に対してファジィ数で表現される目的関数の最大値が評価されると，提携 S 自身で獲得できる収入の最大値を提携値 $\tilde{v}(S)$ とすることによってファジィ協力ゲーム $(N,\tilde{V})$ を生成できる．

収入の最大値を求めるために，割当て問題と同様に α-レベル集合を用いる．すなわち，与えられた $\alpha\in[0,1]$ に対して，ファジィ数 $\tilde{\boldsymbol{c}}=(\tilde{c}_j)$, $\tilde{\boldsymbol{b}}=(\tilde{b}_k)$, $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{kj})$, $k=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,p$ のすべてのメンバシップ関数の値が α 以上であるような α-レベル集合

$$\begin{aligned}(\tilde{\boldsymbol{c}},\tilde{\boldsymbol{b}},\tilde{\boldsymbol{A}})_\alpha=\{\,(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{A})\mid\ & \\ & \mu_{\tilde{c}_j}(c_j)\geqq\alpha,\ j=1,\ldots,p,\\ & \mu_{\tilde{b}_k}(b_k)\geqq\alpha,\ k=1,\ldots,m,\\ & \mu_{\tilde{a}_{kj}}(a_{kj})\geqq\alpha,\ k=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,p\}\end{aligned} \tag{27}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

を導入する．割当て問題の時と同様に，与えられた α に対して問題 (26) を楽観的及び悲観的に評価する問題は，α-レベル集合の左右の端点を用いて，閉区間 $[\boldsymbol{c}^L, \boldsymbol{c}^R]$, $[\boldsymbol{b}^L, \boldsymbol{b}^R]$, $[A^L, A^R]$ のように表されるので，それぞれ次のように定式化できる．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & c_1^R u_1 + \cdots + c_p^R u_p \\ \text{subject to} & a_{11}^L u_1 + \cdots + a_{1p}^L u_p \leqq b_1^R(S) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{m1}^L u_1 + \cdots + a_{mp}^L u_p \leqq b_m^R(S) \\ & u_1, \ldots, u_p \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & c_1^L u_1 + \cdots + c_p^L u_p \\ \text{subject to} & a_{11}^R u_1 + \cdots + a_{1p}^R u_p \leqq b_1^L(S) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{m1}^R u_1 + \cdots + a_{mp}^R u_p \leqq b_m^L(S) \\ & u_1, \ldots, u_p \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{29}$$

ただし，問題 (29) は割当て問題の場合と同様に，パラメータ $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}$, A と決定変数 $\boldsymbol{u}$ に関するミニマックス問題とは等価にならないが，線形計画問題で表現されるため，比較的容易に計算できる悲観的な最大値を与える問題であると考えられる．

問題 (29) と問題 (28) の最適解をそれぞれ $\boldsymbol{u}^{*SL} = (u_1^{*SL}, \ldots, u_p^{*SL})$, $\boldsymbol{u}^{*SR} = (u_1^{*SR}, \ldots, u_p^{*SR})$ とする．このとき，

$$v_\alpha^L(S) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j^L u_j^{*SL} \tag{30}$$

$$v_\alpha^R(S) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j^R u_j^{*SR} \tag{31}$$

とおき，α の値を $[0,1]$ の間でさまざまに変化させていくことによって，ファジィ数で表される提携値 $\tilde{v}(S)$ を構成することができる．上述のように，問題 (26) からファジィ協力ゲーム $(N, \tilde{V})$ が生成されることが示された．問題 (26) から生成されたファジィ協力ゲーム $(N, \tilde{V})$ をファジィ生産計画ゲームと呼ぶことにする．

次に，ファジィ生産計画ゲームについて，α-コアの存在や α-コアに含まれるの点の計算方法を考える．

補助定理 1 ファジィ生産計画ゲーム $(N, \tilde{V})$ は α-優加法的であり，$v_\alpha^R(N) - v_\alpha^L(N) \geqq v_\alpha^R(S) - v_\alpha^L(S)$, $\forall S \subseteq N$ をみたす．

定理 3 ファジィ生産計画ゲーム $(N, \tilde{V})$ は非空の α-コアをもつ．

実際にコアに属する利得ベクトルを見つけるために，感度解析や双対性の考えを利用して利得ベクトルを計算する．問題 (26) の双対問題を考えるために，ある $\hat{k} \in \{1, \ldots, m\}$ に対応する右辺定数 $\tilde{b}_{\hat{k}}(S)$ に 1 を加えた次の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & \tilde{c}_1 u_1 + \cdots + \tilde{c}_p u_p \\ \text{subject to} & \tilde{a}_{\hat{k}1} u_1 + \cdots + \tilde{a}_{\hat{k}p} u_p \leqq \tilde{b}_{\hat{k}}(S) + 1 \\ & \tilde{a}_{k1} u_1 + \cdots + \tilde{a}_{kp} u_p \leqq \tilde{b}_k(S), \ k \neq \hat{k}, \ k = 1, \ldots, m \\ & u_1, \ldots, u_p \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{32}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

この問題から問題 (26) と同様に，与えられた $\alpha \in [0,1]$ に対応する次の 2 つの問題を誘導できる．

$$\left.\begin{array}{rl} \text{maximize} & c_1^L u_1 + \cdots + c_p^L u_p \\ \text{subject to} & a_{\hat{k}1}^R u_1 + \cdots + a_{\hat{k}p}^R u_p \leqq b_{\hat{k}}^L(S) + 1 \\ & a_{k1}^R u_1 + \cdots + a_{kp}^R u_p \leqq b_k^L(S),\ k \neq \hat{k},\ k = 1, \ldots, m \\ & u_1, \ldots, u_p \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{maximize} & c_1^R u_1 + \cdots + c_p^R u_p \\ \text{subject to} & a_{\hat{k}1}^L u_1 + \cdots + a_{\hat{k}p}^L u_p \leqq b_{\hat{k}}^R(S) + 1 \\ & a_{k1}^L u_1 + \cdots + a_{kp}^L u_p \leqq b_k^R(S),\ k \neq \hat{k},\ k = 1, \ldots, m \\ & u_1, \ldots, u_p \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{34}$$

問題 (33) と問題 (34) の最適値をそれぞれ $z_\alpha^{L\hat{k}}, z_\alpha^{R\hat{k}}$ とし，もとの問題 (29)，(28) の最適値をそれぞれ z_α^L, z_α^R とする．さらに，

$$y_\alpha^{L\hat{k}} \equiv z_\alpha^{L\hat{k}} - z_\alpha^L \tag{35}$$

$$y_\alpha^{R\hat{k}} \equiv z_\alpha^{R\hat{k}} - z_\alpha^R \tag{36}$$

とおく．

定理 4 与えられた $\alpha \in [0,1]$ と $i = 1, \ldots, n$ に対して，次の区間に属する利得ベクトルは α-コアに属する．

$$[u_\alpha^{iL}, u_\alpha^{iR}] \equiv \sum_{k=1}^{m} [b_k^{iL}, b_k^{iR}][y_\alpha^{Lk}, y_\alpha^{Rk}] \tag{37}$$

ここで，$[a,b][c,d] \equiv [ac, bd]$ とする．

定理 4 で与えられた各意思決定者に対する利得の区間は次のように解釈される．生産計画問題に含まれる数多くのパラメータを，問題の定式化に携わった専門家の人間としての判断のあいまい性を表現するためにファジィ数として表し，さらに意思決定者が生産計画問題の目的関数と制約式に含まれるファジィ数を規定するメンバシップ関数の帰属度が，すべてある値 α 以上であればよいと判断したとき，各意思決定者への収入の公正な配分の予測を各資源の限界的な価値の最小値と最大値で表される区間と，各意思決定者の資源の初期保有量の最小値と最大値で表される区間の積で評価している．さらに，各意思決定者に対してこの範囲の利得の組み合わせが提示されれば，その利得ベクトルを支配する異なる利得ベクトルを提示できない，すなわちどのような提携を形成しても，定理 4 で与えられた利得ベクトルよりもよい利得をその提携のメンバーに保証する利得ベクトルを提示できないことを示している．

4. おわりに

本稿では，提携に属さないプレイヤーの助力なしに獲得できる利得を正確に見積もることが困難であるとの観点から，ファジィ数で表された提携値をもつファジィ協力ゲームと関連する概念を定義し，適用例としてファジィパラメータをもつ割当て問題と生産計画問題からファジィ協力ゲームを生成し，その解について考察した．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

参考文献

[1] I. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[2] 石井博昭, "確率論的最適化," 数理計画法の応用（理論編）, 伊理, 今野（編）, pp. 1–40, 産業図書, 東京, 1982.

[3] Y. Kannai, "The core and balancedness," in: R.J Aumann and S. Hart Eds., *Handbook of Game Theory*, vol. 1, ch. 12, pp. 355–395, Elsevier Science Publishers, 1992.

[4] 西﨑一郎, 坂和正敏, "ファジィゲーム," ファジィOR, 石井, 坂和, 岩本（編）, pp. 158–187, 朝倉書店, 東京, 2001.

[5] 西﨑一郎, 坂和正敏, 藤野靖, "ファジィ線形生産計画ゲームの α-コア," 日本ファジィ学会誌, vol. 10, pp. 743–750, 1998.

[6] G. Owen, "On the core of linear production games," *Mathematical Programming,* vol. 9, pp. 358–370, 1975.

[7] M. Sakawa, *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization,* Plenum Press, New York, 1993.

[8] 坂和正敏, 加藤浩介, 西﨑一郎, 吉岡正人, "確率変数係数を含む多目的線形計画問題に対する対話型ファジー満足化手法," 電子情報通信学会論文誌 A, vol. J83-A, pp. 161–167, 2000.

[9] M. Sakawa and H. Yano, "An interactive fuzzy satisficing method for generalized multiobjective linear programming problems with fuzzy parameters," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 35, pp. 125-142, 1990.

[10] L.S. Shapley and M. Shubik, "The assignment game I: the core," *International Journal of Game Theory,* vol. 1, pp. 111–130, 1972.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.