可能性計画法： 考え方と発展

乾口 雅弘

大阪大学大学院工学研究科電子情報エネルギー工学専攻

〒565-0871 吹田市山田丘 2–1
TEL: 06-6879-7787　FAX: 06-7879-7939
E-mail: inuiguti@eie.eng.osaka-u.ac.jp

概要：数理計画問題におけるパラメータの曖昧さを取り扱う手法として，可能性計画法が提案されている．本稿では，線形の場合を取り上げ，可能性理論に基づく種々のアプローチについて述べる．また，最近の話題について触れ，今後の発展について概観する．

1. はじめに

数理計画問題におけるパラメータの曖昧さを取り扱う一手法として，パラメータの取りうる範囲をファジィ数で表現して取り扱う可能性計画法 [1] が提案されている．可能性計画法には，係数の曖昧さを厳密に可能性理論 [2][3] に基づいて取り扱うものと可能性理論以外の理論や直観に基づいた指標などを導入して取り扱うもの [4][5][6] とに分類できる．本稿では，前者の立場からの著者の研究に基づき，可能性計画法を解説する．

可能性理論は，定義の恣意性などの欠点の指摘に対し，ファジィ理論の精緻化を目指して発展してきている．可能性理論は，確率論を廃して可能性理論を擁立しようとするものではなく，確率論でうまく扱えない不確実性を扱うための補完的な理論として位置づけられる．確率論と可能性理論との関係は，Dempster-Shafer 理論 [7] を通してより明らかになる [8]．すなわち，確率論が情報の不一致，対立を取り扱っているのに対し，可能性理論は情報の不特定さを取り扱っている．以前に提案されていたファジィ理論に基づく種々の方法論が，可能性理論を用いて取り扱われると同時に，新たな手法が確立されている [3]．また，近年，Dempster-Shafer 理論との関係から，質的可能性理論と量的可能性理論 [9] の二つが指摘されるなど，可能性理論の新たな展開を迎えている．

可能性計画法には，現在までに質的可能性理論のみが応用されている．したがって，種々の事象の可能性の度合い，必然性の度合いを測る可能性測度，必然性測度は順序尺度となっていて，その差や比に物理的意味はない．このような，条件の緩い設定にもかかわらず，多くのモデルが提案されている．確率計画法が，機会制約条件計画問題，分布問題およびリコース問題の三つがある [10] ように，可能性計画法も，様相制約条件計画問題，様相的最適性，リコース問題 [11][12] の三つに分類できる．このうち，様相制約条件計画問題が最も発展していて，満足水準最適化モデル，様相性最適化モデル，制約化モデルなどの各モデルが考えられ，帰着問題が与えられている．次いで，様相的最適性が研究され，可能的最適解，必然的最適解および必然的ファジィ最適解などが定義され，可能的最適解

の列挙法，必然的最適性テスト，最良必然的ファジィ最適解の計算法などが研究されている．最後のリコース問題は未だ十分に研究されておらず，今後の発展が期待される．これらの研究と平行して，可能性計画法と確率計画法との関係も調べられている [13][14][15].

本稿では，可能性計画法の基礎である可能性理論を述べた後，可能性計画法の種々のアプローチを様相制約条件計画問題と様相的最適性問題に分けて説明する．その後，可能性計画法の最近の話題について述べ，今後の発展について概観する．なお，可能性計画法と確率計画法との関係については割愛する．

2. 可能性理論

2.1. 可能性と必然性

以下では，本稿の可能性計画法の紹介に必要となる基礎理論について手短に述べる．まず，本節では，可能性測度と必然性測度について紹介しよう．

ある変数 a の取りうる範囲が集合 $A \subseteq \Omega$ と与えられたとき，変数 a が領域(集合) $B \subseteq \Omega$ にあるかどうかを議論しよう (Ω は全体集合). $A \cap B$ ($\neq \emptyset$) であれば，a は $A \cap B \subseteq A$ 内の値を取りうるので，a が B 内にありうる．すなわち，$a \in B$ は可能である．さらに，$A \subseteq B$ であれば，a が A 内のどのような値を取ろうとも B 内にあるので，a が B 内にあることは間違いないといえる．すなわち，$a \in B$ は必然である．a が A 内にあるという情報の下で，任意の集合 $B \subseteq \Omega$ について，$a \in B$ が可能であるときに 1，可能でないときに 0 を出力する集合関数 Π_A および，$x \in B$ が必然であるときに 1，必然でないときに 0 を出力する集合関数 N_A は次のように定義できる．

$$\Pi_A(B) = \begin{cases} 1; & A \cap B \neq \emptyset \text{ のとき} \\ 0; & \text{その他} \end{cases} \qquad N_A(B) = \begin{cases} 1; & A \subseteq B \text{ のとき} \\ 0; & \text{その他} \end{cases} \tag{1}$$

A, B が通常の集合の場合について，式 (1) のように定義された可能性測度と必然性測度を，A, B がファジィ集合である場合に拡張すると，

$$\Pi_A(B) = \sup_r \min\left(\mu_A(r), \mu_B(r)\right), \quad N_A(B) = \inf_r \max\left(1 - \mu_A(r), \mu_B(r)\right) \tag{2}$$

となる (図 1 参照)．これが式 (1) の拡張であることは，μ_A, μ_B が通常の集合 A, B の特性関数である場合を考えることにより理解できる．

式 (2) の Π_A，N_A をそれぞれ，$a \in A$ という情報の下での可能性測度 (possibility measure)，必然性測度 (necessity measure) という．また，基にしているファジィ集合 A のメンバシップ関数 μ_A は可能性分布と呼ばれ，取りうる範囲が可能性分布で規定される変数 a は可能性変数と呼ばれる．ただし，μ_A を可能性分布とみなすためには，$\mu_A(r) = 1$ なる要素 $r \in \Omega$ が存在しなければならない．

可能性測度，必然性測度について，次の関係が成立する．

$$\Pi_A(\emptyset) = N_A(\emptyset) = 0, \quad \Pi_A(\Omega) = N_A(\Omega) = 1 \tag{3}$$

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \Pi_A(B_1) \leqq \Pi_A(B_2),\ N_A(B_1) \leqq N_A(B_2) \tag{4}$$

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \Pi_{A_1}(B) \leqq \Pi_{A_2}(B),\ N_{A_1}(B) \geqq N_{A_2}(B) \tag{5}$$

$$\Pi_A(B) > h \Leftrightarrow (A)_h \cap (B)_h \neq \emptyset, \quad N_A(B) \geqq h \Leftrightarrow (A)_{1-h} \subseteq [B]_h \tag{6}$$

$$N_A(B) \leqq \Pi_A(B), \quad N_A(B) = 1 - \Pi_A(B^{\mathrm{c}}), \quad \Pi_A(B) = 1 - N_A(B^{\mathrm{c}}) \tag{7}$$

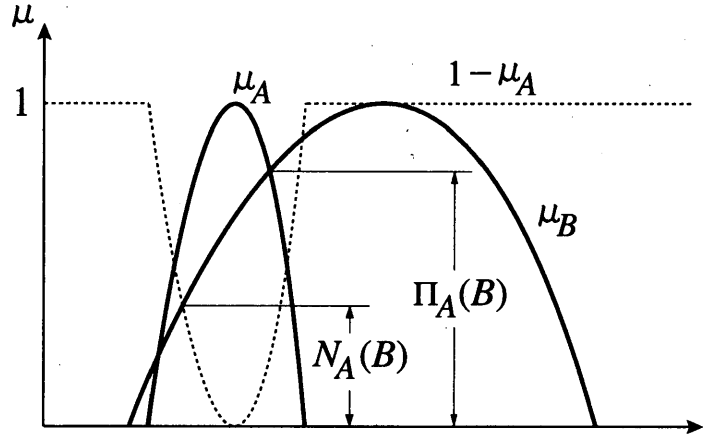


図 1: 可能性測度と必然性測度

ただし，$(A)_h$，$[A]_h$ は，それぞれ，ファジィ集合 A の強 h-レベル集合，(弱)h-レベル集合で次のように定められる．

$$(A)_h = \{r \in U \mid \mu_A(u) > h\}, \quad [A]_h = \{r \in U \mid \mu_A(u) \geqq h\} \tag{8}$$

また，$B^{\rm c}$ は B の補集合で，$\mu_{B^{\rm c}}(r) = 1 - \mu_B(r), \forall r \in U$ なるメンバシップ関数で定められる．

式 (6) に関連して，U が距離空間であるとき，B が上半連続なメンバシップ関数をもてば，

$$N_A(B) \geqq h \Leftrightarrow {\rm cl}(A)_{1-h} \subseteq [B]_h \tag{9}$$

が成立する [18]．ただし，D を通常の集合とするとき，cl$D$ は D の閉包 (D を含む最小の閉集合) である．さらに，A または B が上半連続なメンバシップ関数をもつ有界ファジィ集合であるとき次式が成立する [18]．

$$\Pi_A(B) \geqq h \Leftrightarrow [A]_h \cap [B]_h \neq \emptyset \tag{10}$$

ただし，ファジィ集合 A が有界であるとは，任意の $h \in (0,1]$ に対して $[A]_h$ が有界となることをいう．

2.2. ファジィ数と可能性線形関数

本稿では，可能性変数の取りうる範囲を示すファジィ集合として，専ら実数空間上でのファジィ集合を取り扱う．特に，一次元実数空間上の次の二つの性質を満たすファジィ集合 A をファジィ数という．

i) h-レベル集合 $[A]_h, \forall h \in (0,1]$ が閉区間 $[a^{\rm L}(h), b^{\rm R}(h)]$ となる．
ii) 1-レベル集合 $[A]_1$ が空でない．

ただし，A の h-レベル集合 $[A]_h$ は，メンバシップ値が h 以上の要素の集合で，次式で定められる．

$$[A]_h = \{r \mid \mu_A(r) \geqq h\} \tag{11}$$

可能性計画問題における目的関数や制約条件の左辺の関数の係数は明確にわからず，可能性変数として取り扱われている．このように係数が可能性変数である関数は可能性関数と呼ばれる．係数が明確にわかっていない可能性変数であるので，可能性関数の値も可能性変数となる．このとき，可能性変数の値の取りうる範囲を規定する可能性分布をどのように定めるかが疑問になる．この疑問に答えるのが拡張原理であり，係数の可能性分布から一意に定められる．

可能性変数ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ をパラメータ (係数ベクトル) とする関数を $f(\cdot : \boldsymbol{a})$ と表すと，$\boldsymbol{x}$ の $f(\cdot : \boldsymbol{a})$ による像 $f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a})$ は次の可能性分布 $\mu_{f(\boldsymbol{x}:\boldsymbol{A})}$ をもつ可能性変数になる．

$$\mu_{f(\boldsymbol{x}:\boldsymbol{A})}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\boldsymbol{r}:f(\boldsymbol{r})=y} \min(\mu_{A_1}(r_1), \ldots, \mu_{A_n}(r_n)); & \{r \mid f(r) = y\} \neq \emptyset \text{ のとき} \\ 0; & \text{その他} \end{cases} \tag{12}$$

ただし，$\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_n)$，$\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ である．

本稿では，特に，可能性線形関数，すなわち，

$$f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \tag{13}$$

を扱う．この場合，$\boldsymbol{A}$ の各成分 A_j がファジィ数であるとき，$f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a})$ の取りうる範囲を表すファジィ集合 $f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A})$ の h-レベル集合 $[f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A})]_h$ $(\forall h \in (0,1])$ について次式が成立する．

$$[f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A})]_h = \left[f^{\mathrm{L}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x} : h), f^{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x} : h)\right] \tag{14}$$

$$f^{\mathrm{L}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x} : h) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_j \geq 0}}^{n} a^{\mathrm{L}}_j(h) x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ x_j < 0}}^{n} a^{\mathrm{R}}_j(h) x_j \tag{15}$$

$$f^{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x} : h) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_j \geq 0}}^{n} a^{\mathrm{R}}_j(h) x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ x_j < 0}}^{n} a^{\mathrm{L}}_j(h) x_j \tag{16}$$

ただし，$a^{\mathrm{L}}_j(h), a^{\mathrm{R}}_j(h)$ は A_j の h-レベル集合 $[A_j]_h$ の下限，上限で，$[A_j]_h = [a^{\mathrm{L}}_j(h), a^{\mathrm{R}}_j(h)]$ が成立する．式 (14)–(16) は，ファジィ集合 $f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A})$ の h-レベル集合 $[f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A})]_h$ が閉区間となり，その上下限値が A_j の h-レベル集合 $[A_j]_h$ の上下限値から求められることを示している．

さらに，$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ である場合には，

$$f^{\mathrm{L}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x} : h) = \sum_{j=1}^{n} a^{\mathrm{L}}_j(h) x_j, \quad f^{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x} : h) = \sum_{j=1}^{n} a^{\mathrm{R}}_j(h) x_j \tag{17}$$

が成立し，ファジィ集合 $f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A})$ の h-レベル集合 $[f(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A})]_h$ の上下限値を表す関数 $f^{\mathrm{L}}_{\boldsymbol{A}}, f^{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{A}}$ が $\boldsymbol{x}$ に関する線形関数になる．

以下では，最も理解しやすいため，三角型ファジィ数を用いるが，どのような形のファジィ数であっても，すべてのファジィ数の形状が異なっていても類似した帰着問題が得ら

れる [17]．三角型ファジィ数 A は次のメンバシップ関数で定められ，中心の値 a^{C}，左の広がり $w^{\mathrm{L}} > 0$，右の広がり $w^{\mathrm{R}} > 0$ の三つのパラメータを用いて，$A = (a^{\mathrm{C}}, w^{\mathrm{L}}, w^{\mathrm{R}})$ と表現される．

$$\mu_A(r) = \max\left(0, \min\left(1 - \frac{a^{\mathrm{C}} - r}{w^{\mathrm{L}}}, 1 - \frac{r - a^{\mathrm{C}}}{w^{\mathrm{R}}}\right)\right) \tag{18}$$

3. 様相制約条件計画法 ～ 満足化によるアプローチ

3.1. はじめに

可能性計画法は，不明確な係数をもつ目的関数の扱い方により，満足化規準に基づくものと最適化規準に基づくものとに大別できる．本節では，より歴史が深い満足化規準に基づくものを述べる．

係数の取りうる範囲がファジィ集合として与えられた目的関数を扱うには，不明確さの度合と目的関数値の二つの値を取り扱う必要がある．満足化規準に基づくものと最適化規準に基づくものでは，不明確さの取り扱いに大差はないが，目的関数の取り扱いが異なっている．ここで述べる前者の手法では，目的関数を希求水準 (目標値: 絶対的な基準) を用いて取り扱う．これに対し，次節で述べる後者の手法では，目的関数を最適性あるいは相対的な基準により取り扱う．

3.2. 生産計画問題

例として，次の生産計画問題を考えよう．

例題 ある町工場では，次期に新しい製品 A を生産しようと計画している．生産工程は，最近生産を始めた製品 B と同じで，工程 I, II, III からなる．製品 A を 1 単位生産するのに要する時間は，工程 I でだいたい 2 時間，工程 II でだいたい 4 時間，工程 III で 1 時間と予想される．一方，製品 B を 1 単位生産するのに要する時間は，工程 I で約 3 時間，工程 II で約 2 時間，工程 III で約 3 時間とわかっている．次期の作業可能時間は，工程 I ではだいたい 240 時間まで，工程 II では 400 時間まで，工程 III ではだいたい 210 時間までとしたい．予測できる粗利益は，製品 A が 1 単位当たりだいたい 5 万円，製品 B が 1 単位当たりだいたい 7 万円である．このとき，次期の粗利益を最大にするには，製品 A, B をそれぞれ何単位生産すればよいか？

製品 A の工程 I, II, III での単位当たりの所要時間を α_{i1}, $i = 1, 2, 3$ とし，製品 B の工程 I, II, III での単位当たりの所要時間を α_{i2}, $i = 1, 2, 3$ とする．また，製品 A, B の単位当たりの粗利益をそれぞれ，γ_1, γ_2 とする．決定したい製品 A, B の生産量を x_1, x_2 とすると，例題は次のように定式化される．

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \\ \text{sub. to} & \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 \lesssim_1 240 \\ & \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \leqq 400 \\ & \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 \lesssim_3 210 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array} \tag{19}$$

ただし，$\lesssim_i$, $i = 1, 3$ は「だいたい小さい」を表す．

表 1: 三角型ファジィ数 A_{ij} と C_j

A_{ij}	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$(2,0.6,0.7)$	$(3,0.5,0.4)$
$i=2$	$(4,1.5,1.5)$	$(2,0.3,0.2)$
$i=3$	$(1,0.5,0.6)$	$(3,0.3,0.3)$
C_j	$(5,1,0.8)$	$(7,0.7,0.7)$

例題における α_{ij} や γ_j の不明確さや $\lesssim_i$ の柔軟性を無視して，通常の実数や不等号関係として扱うと，式 (19) は次の線形計画問題となる．

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 5x_1+7x_2 \\ \text{sub. to} \quad & 2x_1+3x_2 \leqq 240 \\ & 4x_1+2x_2 \leqq 400 \\ & x_1+3x_2 \leqq 210 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{20}$$

これを解けば，最適解は $(x_1,x_2)=(90,20)$ となる．この解では，1 番目 (工程 I) と 2 番目 (工程 II) の制約条件が等号で成立する．工程 II の制約条件は，工程 I, III の制約条件と異なり，厳格に 400 時間以内でなければならない．工程 II の制約条件が等号で成立しているので，α_{21}, α_{22} が設定値 4, 2 より少しでも大きければ，制約条件を満たさないことになり，式 (20) の最適解は制約違反の面で危険な解となる．

このように，係数の不明確さを無視した取り扱いは，係数のわずかな変動により制約違反が生じる解を導くことが多い [15]．また，制約の柔軟性を無視することにより，実行可能解が存在しないという事態に陥ることもある [16]．したがって，係数の不明確さや制約の柔軟性を考慮し，多様な決定を支援する問題解決方法が必要となる．

3.3. 可能性計画法によるアプローチ

α_{ij}, γ_j の取りうる範囲を三角型ファジィ数として取り扱おう．三角型ファジィ数 A_{ij} の中心 a_{ij}^{C}, 左の広がり w_{ij}^{L}, 右の広がり w_{ij}^{R} を用いて，$A_{ij}=(a_{ij}^{\mathrm{C}},w_{ij}^{\mathrm{L}},w_{ij}^{\mathrm{R}})$ と表現する．α_{ij}, γ_j に対する三角型ファジィ数 A_{ij}, C_j が表 1 のように与えられたとしよう．表 1 から，新製品 A に関する三角型ファジィ数の方が製品 B のものより不明確さが大きいことがわかる．一方，式 (19) の柔軟性のある不等号 $\lesssim_i$, $i=1,3$ を表すため,「だいたい 240 以下」および「だいたい 210 以下」というファジィ集合 B_1, B_3 が次のメンバシップ関数で与えられたとする．

$$\mu_{B_1}(r)=\max\left(0,\min\left(1,\frac{290-r}{50}\right)\right) \tag{21}$$

$$\mu_{B_3}(r)=\max\left(0,\min\left(1,\frac{240-r}{30}\right)\right) \tag{22}$$

なお，便宜上，$B_2=(-\infty,400]$ とする．

取りうる範囲がファジィ集合で与えられた問題は，可能性計画法により取り扱われる．可能性計画法では，目的関数と制約条件を同等に扱う対称モデルと別個に扱う非対称モデルが提案されている．

3.4. 対称モデル

対称モデルでは,「だいたい $\sim$ 以上」であれば満足であるというファジィ目標を設定して,目的関数を制約条件と同等に扱うモデルである.このことから,制約化モデルとも呼ばれる [19].

上の例題の場合,粗利益の目標値として「だいたい 560 万円以上」を表すファジィ集合 B_0 を次のメンバシップ関数で定めたとしよう.

$$\mu_{B_0}(r) = \max\left(0, \min\left(1, \frac{r-500}{60}\right)\right) \tag{23}$$

このとき,式 (19) の問題は,ファジィ連立不等式,

$$\begin{aligned} &\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \gtrsim_0 560 \\ &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \lesssim_1 240 \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \leqq 400 \\ &\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \lesssim_3 210 \\ &x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{24}$$

となる.ただし,$\gtrsim_0$ は「だいたい大きい」を表す.

式 (24) における γ_j, α_{ij} は不明確な数であるため,左辺値は不明確な数となる.また,「だいたい 560 以上」や「だいたい 240 以下」などは柔軟な制約でメンバシップ関数により満足度が具体的に計算できても,どの程度満足できる解を求めようとしているのかがはっきりしない.そこで,式 (24) の解を明確化する必要がある.このように,はっきりと記述されていない問題を明確化することを解釈と呼ぶ.従来,さまざまな解釈が提案されているが [17][19],可能性計画法では,可能性理論に基づいた解釈を導入する.

可能性計画法では,次のように解釈する.たとえば,式 (24) の最初の「粗利益がだいたい 560 万円以上」という条件が,できればそうなって欲しいと願う希望的なものか,必ずそうなって欲しいと願う要請的なものかを判断し,前者の場合は可能性測度 $\Pi_{C_1x_1+C_2x_2}(B_0)$ を,後者の場合は必然性測度 $N_{C_1x_1+C_2x_2}(B_0)$ を用いて第 1 番目の条件に対する充足度とする.他の条件についても同様に可能性測度を用いるか必然性測度を用いるかを決定する.

ここでは,最初の条件は希望的なものであることから可能性測度を,他の条件は要請的なものであることから必然性測度を用いることに決定したとしよう.このとき,式 (24) は,

$$\underset{x_1,\ x_2 \geq 0}{\text{maximize}} \quad \psi\left(\Pi_{A_{01}x_1+A_{02}x_2}(B_0), N_{A_{11}x_1+A_{12}x_2}(B_1), N_{A_{21}x_1+A_{22}x_2}(B_2), N_{A_{31}x_1+A_{32}x_2}(B_3)\right) \tag{25}$$

と定式化される.ただし,ψ は単調非減少な関数である.また,簡便のため,$A_{0j} = C_j$ としている.いずれの条件も同等に重要という立場から,ψ として min が用いられることが多い.ψ の単調非減少性より,式 (25) は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \psi(h_0, h_1, h_2, h_3) \\ \text{sub. to} \quad & \Pi_{A_{01}x_1+A_{02}x_2}(B_0) \geqq h_0 \\ & N_{A_{i1}x_1+A_{i2}x_2}(B_i) \geqq h_i,\ i = 1, 2, 3 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{26}$$

A_{ij} が三角型ファジイ数 $(a_{ij}^{\mathrm{C}}, w_{ij}^{\mathrm{L}}, w_{ij}^{\mathrm{R}})$ であることより，

$$[A_{ij}]_h = \mathrm{cl}(A_{ij})_h = [a_{ij}^{\mathrm{L}}(h), a_{ij}^{\mathrm{R}}(h)]$$
$$a_{ij}^{\mathrm{L}}(h) = a_{ij}^{\mathrm{C}} - (1-h)w_{ij}^{\mathrm{L}}$$
$$a_{ij}^{\mathrm{R}}(h) = a_{ij}^{\mathrm{C}} + (1-h)w_{ij}^{\mathrm{R}}$$

が成立するとともに，ファジィ数を用いる場合は，式 (9), (10) が成立するので，たとえば，式 (26) の最初の制約条件は，式 (15), (16) および $[B_0]_{h_0} = [60h_0 + 500, +\infty)$ より，

$$\begin{aligned}\Pi_{A_{01}x_1+A_{02}x_2}(B_0) \geqq h_0 &\Leftrightarrow \left[\boldsymbol{a}_0^{\mathrm{L}}(h_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_0^{\mathrm{R}}(h_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right] \cap [60h_0 + 500, +\infty) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (5.8 - 0.8h_0)x_1 + (7.7 - 0.7h_0)x_2 \geqq 60h_0 + 500\end{aligned}$$

と変形できる．ただし，$\boldsymbol{a}_i^{\xi}(h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = a_{i1}^{\xi}(h)x_1 + a_{i2}^{\xi}(h)x_2$ とする．同様に，第 2 の制約条件は，$[B_1]_{h_1} = (-\infty, 290 - 50h_1]$ より，次のようになる．

$$\begin{aligned}N_{A_{11}x_1+A_{12}x_2}(B_1) \geqq h_1 &\Leftrightarrow \left[\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{L}}(1-h_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{R}}(1-h_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right] \subseteq [60h_0 + 500, +\infty) \\ &\Leftrightarrow (2 + 0.7h_1)x_1 + (3 + 0.4h_1)x_2 \leqq 290 - 50h_1\end{aligned}$$

ここで，ファジィ数 A_{ij} がすべて三角型ファジィ数でなく，それぞれの形状が異なった一般のファジィ数である場合にも，$\Pi_{A_{01}x_1+A_{02}x_2}(B_0) \geqq h_0$，$N_{A_{11}x_1+A_{12}x_2}(B_1) \geqq h_1$ などの等価条件が全く同様にできることに注意しよう．ただし，三角型ファジィ数 A のメンバシップ関数が強意準凹関数であるので，$\mathrm{cl}(A)_{1-h} = [A]_{1-h}$ が成立している．したがって，強意準凹関数でないメンバシップ関数をもつファジィ数に対しては，$\mathrm{cl}(A)_{1-h}$ を用いる必要があるが，それほど難しい問題ではない．

以上のような等価変換により，式 (26) は非線形計画問題となることがわかる．特に，ψ として min を用いる場合には，式 (26) は次の問題に帰着され，h に関する二分法と線形計画法を用いて解くことができる [16].

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & h \\ \text{sub. to} & (5.8 - 0.8h)x_1 + (7.7 - 0.7h)x_2 \geqq 60h + 500 \\ & (2 + 0.7h)x_1 + (3 + 0.4h)x_2 \leqq 290 - 50h \\ & (4 + 1.5h)x_1 + (2 + 0.2h)x_2 \leqq 400 \\ & (1 + 0.6h)x_1 + (3 + 0.3h)x_2 \leqq 240 - 30h \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0\end{array} \tag{27}$$

これを解くと，最適解 $(x_1, x_2, h) = (29.1, 54.6, 0.736)$ が得られる．$h = 0.736$ は，4 条件の充足度の最小値を示している．必ず満足したい三つの制約条件を満たすため，不明確さを無視した問題，式 (20) に比べ，不明確さの大きい新製品 A の生産量 x_1 を少なくしていることがわかる．

3.5. 非対称モデル

3.5.1. 制約条件の取り扱い

対称モデルでは，ファジィ目標を設定することにより，目的関数を制約条件と同等に取り扱った．非対称モデルでは，制約条件と目的関数を別個に取り扱う．

制約条件は次のように取り扱われる．各制約条件の充足度として，可能性測度 $\Pi_{A_{i1}x_1+A_{i2}x_2}(B_i)$ を用いるか必然性測度 $N_{A_{i1}x_1+A_{i2}x_2}(B_i)$ を用いるかを定め，各制約条件の充足度を $[0,1]$ 内の値で定める．たとえば，充足度を必然性測度により定め，各制約条件に対して要求する充足度を h^i とすると，式 (24) の制約条件は，

$$\begin{aligned} &N_{A_{i1}x_1+A_{i2}x_2}(B_i) \geqq h^i,\ i=1,2,3 \\ &x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{28}$$

と取り扱われる．これを等価変形すると，

$$\begin{aligned} &(2+0.7h^1)x_1+(3+0.4h^1)x_2 \leqq 290-50h^1 \\ &(4+1.5h^2)x_1+(2+0.2h^2)x_2 \leqq 400 \\ &(1+0.6h^3)x_1+(3+0.3h^3)x_2 \leqq 240-30h^3 \\ &x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

となり，h^i は定数であるので，式 (29) は線形不等式制約条件になる．

たとえば，$h^1=h^2=h^3=0.8$ と定めると，例題では，次の線形不等式制約条件が得られる．

$$\begin{aligned} &2.56x_1+3.32x_2 \leqq 250 \\ &5.2x_1+2.16x_2 \leqq 400 \\ &1.48x_1+3.24x_2 \leqq 216 \\ &x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{30}$$

3.5.2. 様相性最適化モデル

目的関数の扱い方として，様相性最適化モデルとそれに双対な満足水準最適化モデルを紹介しよう[1]．

様相性最適化モデルでは，目的関数に目標値 t_0 あるいはファジィ目標 G_0 を与え，可能性測度あるいは必然性測度を最大化する．具体的に，式 (19) の場合は，可能性測度最大化モデルでは，

$$\text{maximize}\quad \Pi_{C_1x_1+C_2x_2}(G_0) \tag{31}$$

と扱い，必然性測度最大化モデルでは，

$$\text{maximize}\quad N_{C_1x_1+C_2x_2}(G_0) \tag{32}$$

と扱う．ただし，目標値 t_0 が与えられた場合は，$G_0=\{r \mid r \geqq t_0\}$ と定める．

式 (23) の B_0 を用いて $G_0=B_0$ と定めると，式 (31) は，

$$\begin{aligned} \text{maximize}\quad & h, \\ \text{sub. to}\quad & (5.8-0.8h)x_1+(7.7-0.7h)x_2 \geqq 60h+500 \end{aligned} \tag{33}$$

[1]論理学では，命題の確実性の度合を様相といい，現実性，可能性，必然性に分類されることが多い．ここでは，特に，可能性と必然性とを取り扱う．

となり，さらに変形すると，次の線形分数の目的関数に帰着できる．

$$\text{maximize} \quad \frac{5.8x_1 + 7.7x_2 - 500}{0.8x_1 + 0.7x_2 + 60} \tag{34}$$

式 (30) の制約条件を加えると，線形分数計画問題 [20] となり，制約条件を満たす (x_1, x_2) について分母が常に正の値を取るので，線形計画問題,

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & 5.8y_1 + 7.7y_2 - 500t \\ \text{sub. to} & 0.8y_1 + 0.7y_2 + 60t = 1 \\ & 2.56y_1 + 3.32y_2 - 250t \leqq 0 \\ & 5.2y_1 + 2.16y_2 - 400t \leqq 0 \\ & 1.48y_1 + 3.24y_2 - 216t \leqq 0 \\ & y_1,\ y_2,\ t \geqq 0 \end{array} \tag{35}$$

を解くことにより，$x_i = y_i/t$, $i = 1, 2$ と変換して最適解が得られる．実際，式 (35) を解くと，$(y_1, y_2, t) = (0.229, 0.452, 0.00834)$ が得られ，最適解は $(x_1, x_2) = (27.5, 54.1)$ となる．必ず満足したい三つの制約条件をより確実に満たすため (この解の制約条件の充足度 (0.8) > 式 (29) の解の制約条件の充足度 (0.736))，式 (27) の解よりさらに新製品 A の生産量 x_1 を減らしていることがわかる．

必然性測度を用いた場合も，同様な問題に帰着できる．可能性測度の最大化は不確実性がより大きい解を選ぶ傾向にあり，必然性測度の最大化は不確実性がより小さい解を選ぶ傾向にある [18].

なお，三角型ファジィ数を用いているため，問題 (33) から式 (34) の線形分数の目的関数に変換できたが，C_1 と C_2 が同じ形状のファジィ数でなければ[2]，線形分数の目的関数に変換できない．しかし，問題 (33) に制約条件 (30) を加えた問題は，対称モデルの場合と同様，二分法と線形計画法を用いて解くことができる．

3.5.3. 満足水準最適化モデル

様相性最大化問題とは逆に，満足水準最適化モデルでは，目的関数値が目標値 t 以上である可能性測度あるいは必然性測度が予め与えられた値 h^0 以上となるもとで，目標値 t を最大化するモデルである．

式 (19) の場合，可能性測度を用いると，

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & t \\ \text{sub. to} & \Pi_{C_1x_1 + C_2x_2}([t, +\infty)) \geqq h^0 \end{array} \tag{36}$$

と定式化される．必然性測度の場合は，式 (36) の Π が N に置き換わったものになる．

$h^0 = 0.9$ とすると，式 (36) は線形目的関数,

$$\text{maximize} \quad 5.08x_1 + 7.07x_2 \tag{37}$$

となる．式 (30) の制約条件のもとで，式 (37) の目的関数を最適化する線形計画問題を解けば，最適解 $(x_1, x_2) = (27.5, 54.1)$ が得られ，最適な目的関数値は 522 となる．

このモデルでは，三角型ファジィ数でなく一般のファジィ数である場合にも，与えられた問題を線形計画問題に帰着することができる．

[2] より厳密には，可能性測度を用いる場合は右側の形状，必然性測度を用いる場合は左側の形状が同じでなければならない

表 2: 各モデルと解法の関係

モデル	解法
制約化 ($\psi = \min$)	二分法と線形計画法
様相性最適化	線形分数計画法 (ファジィ数の形状が同じ場合) 二分法と線形計画法 (ファジィ数の形状が異なる場合)
満足水準最適化	線形計画法
一般化	二分法と線形計画法

3.6. 一般化モデル

現実問題において，意思決定者が，一つの目的関数あるいは制約条件に対して，希望的な目標と同時に要請的な目標をもつ場合がある．したがって，希望的な目標と要請的な目標とを同時に取り扱えるモデルを考察することは有意義である．このような観点から，目的関数や制約条件に希望的なファジィ目標 B_i^{Π} と要請的なファジィ目標 B_i^N とを導入したモデル，

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \min\left(\min_{i=0,1,2,3} \varphi_i^{\Pi}(h_i^{\Pi}), \min_{i=0,1,2,3} \varphi_i^N(h_i^N)\right) \\ \text{sub. to} & \Pi_{A_{i1}x_1+A_{i2}x_2}(B_i^{\Pi}) \geqq h_i^{\Pi},\ i=0,1,2,3 \\ & N_{A_{i1}x_1+A_{i2}x_2}(B_i^N) \geqq h_i^N,\ i=0,1,2,3 \\ & x_1,\ x_2 \geqq 0 \end{array} \tag{38}$$

が提案されている [21]．ただし，$\varphi_i^{\Pi}, \varphi_i^N$ は非減少関数である．式 (38) は目的関数と制約条件とを同等に扱っているので，一種の対称モデルであるが，目的関数の特殊性から式 (26) を一般化したものではない．また，$i = 1, 2, 3$ について，$h_i^{\Pi 0}, h_i^{N0} \in [0, 1]$ を定数とし，

$$\varphi_i^{\chi}(r) = \begin{cases} 1, & r \geqq h_i^{\chi 0} \text{のとき}, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases} \qquad \chi = \Pi, N$$

と定めると，式 (38) は様相性最適化モデルの一般形になっている．式 (38) は，式 (27) と同様に，二分法と線形計画法を用いて解くことができる [21]．

対称モデル，非対称モデルおよび一般化モデルについて解法との関係をまとめると，表 2 のようになる．ψ が min の場合の対称モデルと一般化モデルでは，非線形計画問題に帰着されるが，二分法と線形計画法により任意の精度で近似最適解が求められる．ψ が一般の非減少関数である対称モデルについては，計算が複雑になる．一方，非対称モデルでは，様相性最適化モデルも満足水準最適化モデルも線形計画問題を解くことにより解が得られる．

3.7. メンバシップ関数の設定法

可能性計画法で用いている可能性測度，必然性測度は序数的なもので，必ずしも基数性は必要がない．この点を利用して，可能性線形計画問題における一般化モデル (38) に対するメンバシップ関数および $\varphi_i^{\Pi}, \varphi_i^N$ の一つの定め方が提案されている [21]．

3.7.1. ファジィ数とファジィ目標の定め方

不明確な係数 γ_j, α_{ij} に対して,「取りうることが明らかな値の集合」や「場合によっては取るかもしれない値の集合」などのように，真の値がその中にある確信度が異なるいく

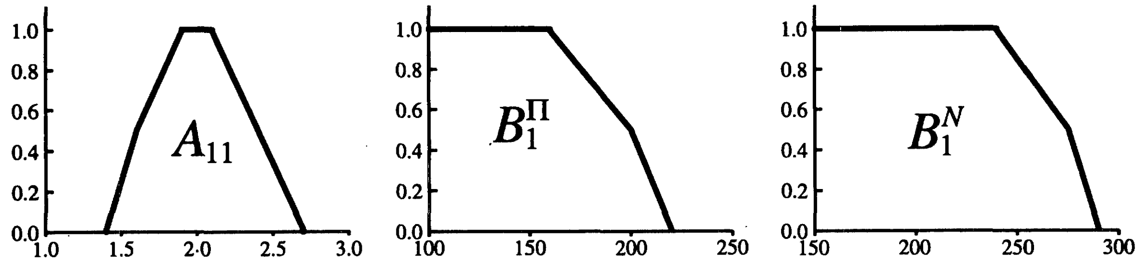


図 2: 得られた A_{11}, B_1^{Π} および B_1^N

つかの集合を，過去の経験知識から与えることができる場合が少なくない．このことから，各ファジィ数 A_{ij} を定めるため，十分狭く見積もった範囲 A_{ij}^{N}，普通に見積もった範囲 A_{ij}^{U}，十分広く見積もった範囲 A_{ij}^{W} などを，専門家に設定してもらうことが考えられる．ここでは，3 段階の範囲の場合について述べるが，より細かくするには，3 段階を 5 段階，7 段階とすればよい．各ファジィ数 A_{ij} に対してレベルの異なる三つの範囲が得られた後は，より広い範囲が低い値を取るように，適当にメンバシップ値を設定すればよい．

しかし，ファジィ目標を設定して，可能性測度や必然性測度を用いるには，ファジィ目標のメンバシップ値とファジィ数のメンバシップ値の対応付けが必要になる．これを行うために，希望的な目標と要請的な目標とに分けて，各レベルの範囲に対する目標値を設定する．

希望的な目標は，つぎのように設定される．まず，最低限の要求として，範囲を十分広く見積もった場合に，目的関数値や各制約条件の左辺値がどの程度の値より良くなる可能性があることを必要とするかを問う．この値を $g_i^{\Pi 1}$ とし，この目標を $G\Pi_i^1$ と記す．つぎの望みとして，範囲を普通に見積もった場合に，目的関数値や各制約条件の左辺値がどの程度の値より良くなる可能性があることが好ましいかを問う．この値を $g_i^{\Pi 2}$ とし，この目標を $G\Pi_i^2$ と記す．最後に，より高い望みとして，範囲を十分狭く見積もった場合に，目的関数値や各制約条件の左辺値がどの程度の値より良くなる可能性があって欲しいかを問う．この値を $g_i^{\Pi 3}$ とし，この目標を $G\Pi_i^3$ と記す．ここで，後になるほどより高次の目標となるので，式 (19) の目的関数に対しては，$g_0^{\Pi 1} \leqq g_0^{\Pi 2} \leqq g_0^{\Pi 3}$ が成立し，式 (19) の制約条件の左辺値に対しては，$g_i^{\Pi 1} \geqq g_i^{\Pi 2} \geqq g_i^{\Pi 3}$ が成立すると仮定されている．

同様に，要請的な目標は，つぎのように設定される．まず，最低限の要求として，範囲を十分狭く見積もった場合に，目的関数値や各制約条件の左辺値が確実にどの程度の値より良くなる必要があるかを問う．この値を g_i^{N3} とし，この目標を GN_i^1 と記す．つぎの望みとして，範囲を普通に見積もった場合に，目的関数値や各制約条件の左辺値が確実にどの程度の値より良くなることが好ましいかを問う．この値を g_i^{N2} とし，この目標を GN_i^2 と記す．最後に，より高い望みとして，範囲を十分広く見積もった場合に，目的関数値や各制約条件の左辺値が確実にどの程度の値より良くなって欲しいかを問う．この値を g_i^{N1} とし，この目標を GN_i^3 と記す．ここで，後になるほどより高次の目標となるので，式 (19) の目的関数に対しては，$g_0^{N1} \geqq g_0^{N2} \geqq g_0^{N3}$ が成立し，式 (19) の制約条件の左辺値に対しては，$g_i^{N1} \leqq g_i^{N2} \leqq g_i^{N3}$ が成立すると仮定されている．

十分広く見積もった範囲 A_{ij}^{W}，普通に見積もった範囲 A_{ij}^{U}，十分狭く見積もった範囲 A_{ij}^{N} が，それぞれ，h_1-レベル集合，h_2-レベル集合，h_3-レベル集合に対応すると考え，$0 <$

表 3: A_{ij} の設定

i	A_{i1}^{W}	A_{i1}^{U}	A_{i1}^{N}	A_{i2}^{W}	A_{i2}^{U}	A_{i2}^{N}
0	[4,5.8]	[4.4,5.3]	[5,5.1]	[6.3,7.7]	[6.8,7.3]	[7,7]
1	[1.4,2.7]	[1.6,2.4]	[1.9,2.1]	[2.5,3.4]	[2.8,3.3]	[3,3.1]
2	[2.5,5.5]	[2.7,4.8]	[3.9,4]	[1.7,2.2]	[1.9,2.1]	[1.9,2]
3	[0.5,1.6]	[0.8,1.2]	[1,1]	[2.7,3.3]	[2.8,3.1]	[3,3]

表 4: $g_i^{\Pi k}$, g_i^{Nk} の設定

i	$g_i^{\Pi 1}$	$g_i^{\Pi 2}$	$g_i^{\Pi 3}$	g_i^{N1}	g_i^{N2}	g_i^{N3}
0	500	530	560	460	440	400
1	220	200	160	240	275	290
2	250	220	200	400	400	400
3	150	180	190	210	220	240

$h_1 < h_2 < h_3 < 1$ となるように，適当に h_k, $k = 1,2,3$ を定め，線形補間してファジィ数が定められる．ただし，$0 < h < h_1$ なる h-レベル集合はすべて A_{ij}^{W} となり，$h_3 < h < 1$ なる h-レベル集合はすべて A_{ij}^{N} となると考える．一方，$\mathrm{cl}(A_{ij})_{h_k} = [A_{ij}]_{h_k}$, $k = 1,2,3$ が成立するので，第 1 回の式 (13), (14) より，$[B_0^{\Pi}]_{h_k} = [g_0^{\Pi k}, +\infty)$, $[B_i^{\Pi}]_{h_k} = (-\infty, g_i^{\Pi k}]$, $i = 1,2,3$, および $[B_0^N]_{1-h_k} = [g_i^{Nk}, +\infty)$, $[B_i^N]_{1-h_k} = (-\infty, g_i^{Nk}]$, $i = 1,2,3$ となるように，B_i^{Π}, B_i^N, $i = 0,1,2,3$ と定め，他のレベル集合は線形補間により設定すれば良い．ただし，$0 < h < h_1$ なる任意の h について $[B_0^{\Pi}]_h = [g_0^{\Pi 1}, +\infty)$, $[B_i^{\Pi}]_h = (-\infty, g_i^{\Pi 1}]$, $i = 1,2,3$, $[B_0^N]_{1-h} = [g_i^{N3}, +\infty)$, $[B_i^N]_{1-h} = (-\infty, g_i^{N3}]$, $i = 1,2,3$ と定め，$h_3 < h < 1$ なる任意の h について $[B_0^{\Pi}]_h = [g_0^{\Pi 3}, +\infty)$, $[B_i^{\Pi}]_h = (-\infty, g_i^{\Pi 3}]$, $i = 1,2,3$, $[B_0^N]_{1-h} = [g_i^{N1}, +\infty)$, $[B_i^N]_{1-h} = (-\infty, g_i^{N1}]$, $i = 1,2,3$ と定める．

例題の場合の 十分狭く見積もった範囲 A_{ij}^{N}，普通に見積もった範囲 A_{ij}^{U}，十分広く見積もった範囲 A_{ij}^{W} および，目標値 $g_i^{\Pi k}$, g_i^{Nk}, $k = 1,2,3$ を表 3, 4 に示す．$h_1 = 0.01$, $h_2 = 0.5$, $h_3 = 0.99$ と定めると，A_{11}, B_1^{Π}, B_1^N は図 2 のようになる．

3.7.2. φ_i^X の定め方

目的関数や各制約条件に対する希望的な目標と要請的な目標を階層的に引き出すことにより，ファジィ数とファジィ目標が定められた．目標 $G\Pi_i^k$, GN_i^k は目的関数や制約条件ごとの部分的な目標を示しているので，目的関数とすべての制約条件を同時に考慮した全体的な目標を構成する必要がある．そのため，たとえば，$G\Pi_0^1$, GN_0^1, $G\Pi_1^1$, GN_1^1, $G\Pi_2^1$, GN_2^1, $G\Pi_3^1$, GN_3^1 を同時に満足することを第 1 目標とし，$G\Pi_0^1$, GN_0^1, $G\Pi_1^1$, GN_1^2, $G\Pi_2^1$, GN_2^2, $G\Pi_3^1$, GN_3^2 を同時に満足することを第 2 目標というように，$G\Pi_i^k$, GN_i^k の組合せを達成すべき順に並べていくことが考えられる．

たとえば，例題に対して表 5 のように，階層的に全体的な目標が得られたとしよう．表 5 で "–" は，その順位ではその目標を全く考慮しないことを示している．すなわち，表 5 の順位 1 では，目的関数や制約条件の希望的な目標を考慮しないことを表している．

階層的な目標が得られた後，順位の数が大きくなるほど値が大きくなるように，順位 l に実数値 $\varphi(l)$ を適当に割り当てる．各 $G\Pi_i^k$ (GN_i^k) について，$G\Pi_i^k$ (GN_i^k) が記されて

表 5: 部分目標の達成すべき順位を示す表と式 (38) の解

順位	目的関数	制約条件 1	制約条件 2	制約条件 3	φ
1	− GN_0^1	− GN_1^1	− GN_2^1	− GN_3^1	1/100
2	− GN_0^1	$G\Pi_1^1$ GN_1^1	$G\Pi_2^1$ GN_2^1	$G\Pi_3^1$ GN_3^1	1/6
3	$G\Pi_0^1$ GN_0^1	$G\Pi_1^1$ GN_1^2	$G\Pi_2^1$ GN_2^2	$G\Pi_3^1$ GN_3^2	1/3
4	$G\Pi_0^1$ GN_0^1	$G\Pi_1^1$ GN_1^3	$G\Pi_2^1$ GN_2^3	$G\Pi_3^1$ GN_3^3	1/2
5	$G\Pi_0^2$ GN_0^1	$G\Pi_1^2$ GN_1^3	$G\Pi_2^2$ GN_2^3	$G\Pi_3^2$ GN_3^3	2/3
6	$G\Pi_0^3$ GN_0^2	$G\Pi_1^3$ GN_1^3	$G\Pi_2^3$ GN_2^3	$G\Pi_3^3$ GN_3^3	5/6
7	$G\Pi_0^3$ GN_0^3	$G\Pi_1^3$ GN_1^3	$G\Pi_2^3$ GN_2^3	$G\Pi_3^3$ GN_3^3	1
式 (38) の解: $(x_1, x_2) = (22.5, 52.7)$, 順位 4 の目標まで達成					
順位 4 をつぎの目標に交換					
4	$G\Pi_0^1$ GN_0^1	$G\Pi_1^2$ GN_1^2	$G\Pi_2^2$ GN_2^2	$G\Pi_3^2$ GN_3^2	1/2
式 (38) の解: $(x_1, x_2) = (25.0, 53.0)$, 順位 4 の目標まで達成					

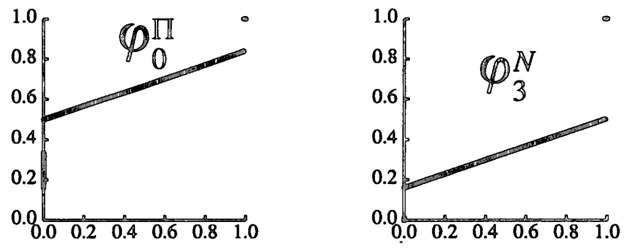


図 3: 得られた φ_0^{Π} と φ_3^{N}

いる順位の中で最小の順位の数 $l^{\Pi_i k}$ $(l^{N_i k})$ と最大の順位の数 $u^{\Pi_i k}$ $(u^{N_i k})$ とを求める．φ_i^{Π} は，h-φ 座標系の 3 点 $(h_k, \varphi(l^{\Pi_i k}))$, $k = 1, 2, 3$, 3 点 $(h_k, \varphi(u^{\Pi_i k}))$, $k = 1, 2, 3$ および 2 点 $(0, \varphi(l^{\Pi_i 1}))$ と $(1, 1)$ を h の小さい順に線でつなぐことにより得られる (上半連続となるように定める)．φ_i^{N} も同様に得られる．表 5 の φ の欄のように実数値を割り当てた場合の φ_0^{Π} と φ_3^{N} を図 3 に示す．

表 5 の階層的な目標に対する解は，表 5 に示す通りである．表 5 の順位 4 の目標をより希望的な目標を優先させるように変えた場合の解は，表 5 の最下段に示す通りである．希望的な目標をより満たそうとするため，不確実性がより高い製品 A の生産量 (x_1) を大きくしていることがわかる．

4. 様相的最適性 ～ 最適化によるアプローチ

4.1. はじめに

本節では，通常の数理計画問題における最適解の概念を可能性理論に基づき拡張した可能的最適解と必然的最適解，およびこれらから派生する解概念について述べる．なお，ここで取り扱う数理計画問題は，目的関数の係数のみが不明確な線形計画問題である．また，前半では，係数の取りうる範囲が通常の集合として与えられる場合を述べ，後半では，ファジィ集合として与えられる場合を取り扱う．

4.2. 不明確なパラメータをもつ線形計画問題と最適性

4.2.1. 必然的最適解と可能的最適解

真の目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ が明確にわからず，その存在領域が通常の集合 Γ により与えられる次の線形計画問題を考える．

$$\max_{\boldsymbol{x}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{c}\in\Gamma \tag{39}$$

ただし， $F=\{\,\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}\,\}$ で，A は $m\times n$ $(m\leqq n)$ の行列，$\boldsymbol{c}$ は n 次のベクトル，$\boldsymbol{b}$ は m 次のベクトルである．

$\boldsymbol{c}$ に応じて定まる線形計画問題の最適解集合を $S(\boldsymbol{c})$，すなわち，

$$S(\boldsymbol{c})=\left\{\boldsymbol{x}\in F\mid \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\max_{\boldsymbol{y}\in F}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right\} \tag{40}$$

とすると，問題 (39) に対して次の二つの解集合が定義できる．

$$NS=\bigcap_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}S(\boldsymbol{c}),\quad \Pi S=\bigcup_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}S(\boldsymbol{c}) \tag{41}$$

$\boldsymbol{x}\in NS$ であれば，すべての $\boldsymbol{c}\in\Gamma$ に対して，$\boldsymbol{x}$ は最適解となる．このような解を必然的最適解 [22][23] と呼ぶ．一方，$\boldsymbol{x}\in\Pi S$ であれば，少なくとも一つの $\boldsymbol{c}\in\Gamma$ に対して，$\boldsymbol{x}$ は最適解となり，可能的最適解と呼ばれている．

$\boldsymbol{x}\in F$ を最適とする目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ の範囲を示す集合を $P(\boldsymbol{x})$，すなわち，

$$P(\boldsymbol{x})=\left\{\boldsymbol{c}\mid \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\max_{\boldsymbol{y}\in F}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\right\} \tag{42}$$

を用いれば，$\boldsymbol{x}\in F$ の必然的最適性，可能的最適性は次のように特徴づけられる．

$$\boldsymbol{x}\in F \text{ が必然的最適解} \Leftrightarrow \Gamma\in P(\boldsymbol{x}) \tag{43}$$

$$\boldsymbol{x}\in F \text{ が可能的最適解} \Leftrightarrow \Gamma\cap P(\boldsymbol{x})\neq\emptyset \tag{44}$$

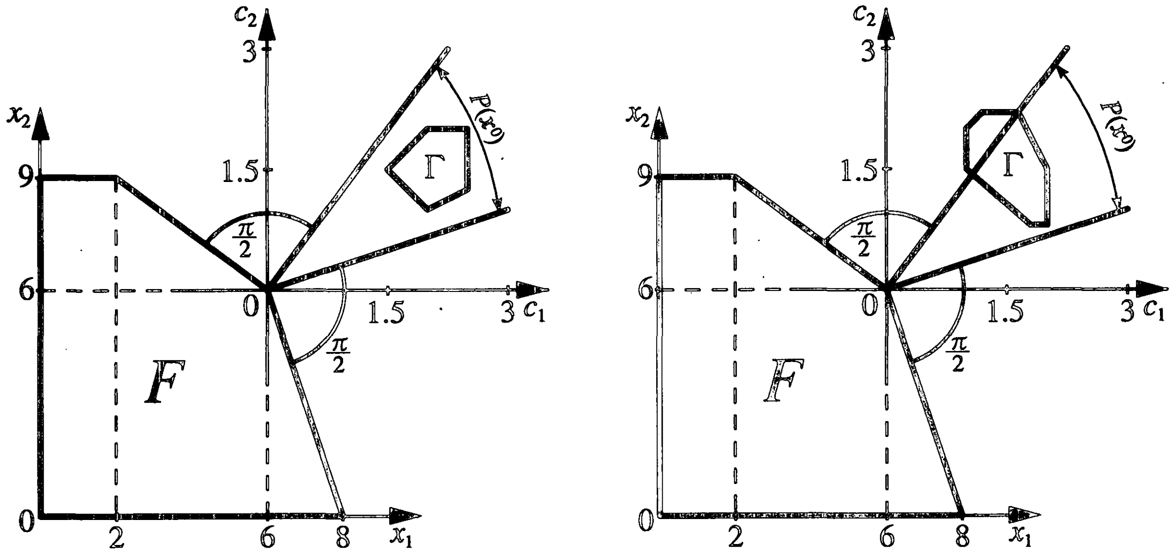
必然的最適解と可能的最適解の例を示そう．

例 1. 次の目的関数の係数ベクトルが不明確な線形計画問題を考えよう．

$$\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{5} c_j x_j \\
\text{subject to} & 3x_1+4x_2+x_3=42 \\
 & 3x_1+x_2+x_4=24 \\
 & x_2+x_5=9 \\
 & x_j\geqq 0,\ j=1,2,\ldots,5
\end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_5)^{\mathrm{T}}$ は次の集合 Γ に制限される．

$$\Gamma=\{\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,0,0,0)^{\mathrm{T}}\mid c_1+c_2\geqq 3,\ c_1\geqq c_2,\ c_1\leqq 2c_2,\ c_1\leqq 2.5,\ c_2\leqq 2\}$$



(a) 必然的最適解の例　　　(b) 可能的最適解の例

図 4: 必然的最適解と可能的最適解

実行可能解 $x^0 = (6, 6, 0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$ を考えよう.

$$P(x^0) = \{c = (c_1, c_2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} \mid c_1 - 3c_2 \leqq 0,\ 4c_1 - 3c_2 \geqq 0\}$$

x_3, x_4, x_5 がスラック変数になっていることに注意して, x_1–x_2 平面, c_1–c_2 平面上に F, Γ, $P(x^0)$ を図示すると, 図 4(a) のようになり, $\Gamma \subseteq P(x^0)$ が成立していることがわかる. したがって, x^0 は必然的最適解となる.

また, Γ が

$$\Gamma = \{c = (c_1, c_2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} \mid 3.5 \leqq 2c_1 + c_2 \leqq 5.5,\ 3.4 \leqq c_1 + 2c_2 \leqq 6,\\ -1 \leqq c_1 - c_2 \leqq 1.3,\ 1 \leqq c_1 \leqq 2,\ 0.8 \leqq c_2 \leqq 2.2\}$$

と定められる場合には, 図 4(b) に示す通り, $\Gamma \not\subseteq P(x^0)$ となり, x^0 は必然的最適解ではない. しかし, $\Gamma \cap P(x^0) \neq \emptyset$ となるので, x^0 は可能的最適解となる.

必然的最適解は, 目的関数の係数ベクトル c が Γ 内でいかなる値をとっても最適となるロバストな解であり, 実システム設計上, 可能的最適解よりも重要な解とみなすことができる. その反面, 必然的最適解は常に存在するとは限らない. 必然的最適解が存在しない場合には, 数多く存在する可能的最適解が, 決定者が最終的に選ぶ解の候補となる.

4.2.2. 必然的最適性および可能的最適性の判定

基底行列を B, A から B を除いた行列を N とする実行可能基底解が与えられたとき, それが必然的に最適であるか否かの判定は, すべての $c \in \Gamma$ について, 最適性条件

$$c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}} \geqq 0 \tag{45}$$

を満たすか否かを調べればよい. ただし, $A = (B, N)$ に対応して, $c = (c_B^{\mathrm{T}}, c_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ と基底変数の係数と非基底変数の係数に c を分解している. この問題は, 次の双線形の目的

関数をもつ数理計画問題の最適値が 0 になることを調べる問題に帰着できる.

$$\min_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}\min_{\boldsymbol{0}\leq\boldsymbol{q}\leq\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{q} \tag{46}$$

特に, Γ が凸多面体の場合は, 問題 (46) は双線形計画問題となり, 切除平面法や外部近似法など, 種々の手法 [24] により解くことができる.

一方, 実行可能基底解の可能的最適性は, 式 (45) を満たす $\boldsymbol{c}\in\Gamma$ が存在することを調べればよいので, 次式を満たす解 $\boldsymbol{c}$ の存在を調べればよいことになる.

$$\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\geqq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{c}\in\Gamma \tag{47}$$

特に, Γ が凸多面体である場合には, 式 (47) の解の存否は線形計画法により確認できる.

4.2.3. 可能的最適基底解の列挙

任意の可能的最適解は可能的最適基底解の凸結合で表されるため, 可能的最適基底解をすべて列挙することは, 解の存在範囲を知る上で重要となる. 基本的には, 問題 (39) の実行可能基底解をすべて列挙し, その都度, 式 (47) により可能的最適性を判定すればよいことになる. 特に, Γ が凸集合である場合には, すべての可能的最適基底解集合が連結しており, ある可能的最適基底解から隣接する実行可能基底解の可能的最適性が判定できるので, より効率的にすべての可能的最適基底解を列挙できる [25]. すなわち, 容易に求められるある可能的最適基底解から初め, 隣接する実行可能基底解の可能的最適性の判定により, 可能的最適基底解のみを列挙できるので, 可能的最適でない基底解に関する行列 $B^{-1}N$ の計算の必要がなくなり, 計算時間が削減されることになる.

ある可能的最適基底解から, k 番目の非基底変数を基底にいれることにより得られる実行可能基底解の可能的最適性は, 次式を満たす解 $\boldsymbol{c}$ の存在により確認できる.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N-\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\geqq\boldsymbol{0}\\&\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N_{\cdot k}-c_{kN}\leqq 0\\&\boldsymbol{c}\in\Gamma\end{aligned} \tag{48}$$

ただし, $N_{\cdot k}$ は N の第 k 列を表し, c_{kN} は $\boldsymbol{c}_N$ の第 k 成分である. 特に, Γ が凸多面体である場合には, 式 (48) を満たす $\boldsymbol{c}$ の存否は線形計画法により判定できる [25].

4.2.4. 満足化アプローチと最適性

満足化基準から導かれる悲観, 楽観の両極端の立場を合わせれば, 2 目的計画問題,

$$\max_{\boldsymbol{x}\in F}\,(\min_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\ \max_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) \tag{49}$$

が得られ, この問題のパレート最適解集合の中から解を選ぶべきであると考えられる. 特に, 二つの評価関数 $\min_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, $\max_{\boldsymbol{c}\in\Gamma}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ を同時に最適にする完全最適解が存在すれば, その解は理想的な解とみなされる.

次の例は, 問題 (49) の完全最適解が必ずしも理想的な解とは限らないことを示している.

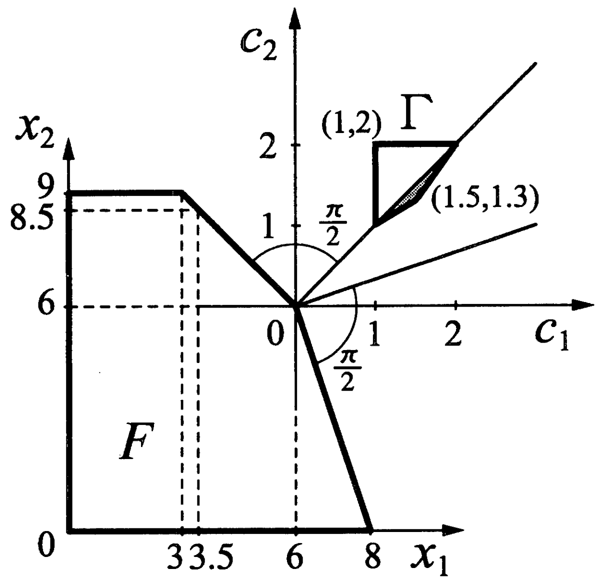


図 5: 例 2 の場合

例 2. 次の問題を考えよう．

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{sub. to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\
& 3x_1 + x_2 + x_4 = 24 \\
& x_2 + x_5 = 9 \\
& x_j \geqq 0, \; j = 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_5)^{\mathrm{T}}$ は次の Γ 内の値をとる．

$$\Gamma = \{(c_1, c_2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} \mid 7c_1 - 5c_2 \leqq 4, \; c_2 \leqq 2, \; -3c_1 + 5c_2 \geqq 2, \; c_1 \geqq 1\}$$

この問題では，$(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \Gamma$, $(3,3,0,0,0)^{\mathrm{T}} \in \Gamma$ を考えると，任意の $\boldsymbol{c} \in \Gamma$ について，$(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}} \leqq \boldsymbol{c} \leqq (1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ が成立するので，問題 (49) の目的関数は，

$$\text{maximize}(x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2)$$

となる．図 5 に示すように，この場合，問題 (49) に完全最適解が存在し，$\boldsymbol{x}^0 = (6,6,0,0,3)^{\mathrm{T}}$ となる．ところが，$\boldsymbol{x}^0$ を最適にする Γ の領域は図 5 の影の部分で，Γ に比べて小さい．また，この問題の可能的最適解集合は，点 $(6,6,0,0,3)^{\mathrm{T}}$ と点 $(3,9,0,6,0)^{\mathrm{T}}$ を結ぶ線分 (図 5 の (6,6) と (3,9) を結ぶ線分) となることから，$\boldsymbol{x}^0$ は可能的最適解集合の端の点であることもわかる．このような観点から，$\boldsymbol{x}^0$ が必ずしも最も合理的な解とは言い切れない．

4.2.5. 最大リグレット最小解

先に述べた通り必然的最適解は常に存在するとは限らない (例 1 参照)．このような場合，可能的最適解集合から何らかの評価基準に基づいた合理的な解を選択する必要があ

る．たとえば，区間の上限値を最大化する問題や下限値を最大化する問題の最適解を選んでも良い．しかし，これらは，実行可能集合あるいは可能的最適解集合の分布を十分に考慮していないため，例 2 のように，可能的最適解集合内の偏った位置に存在する解を導くことがある．

そこで，実行可能集合あるいは可能的最適解集合の分布を考慮した解として，最大リグレット最小解が提案されている [26][27]．この解は minimax regret 基準に基づくもので，次の問題の最適解である．

$$\min_{\boldsymbol{x}\in F} \max_{\boldsymbol{c}\in\Gamma,\boldsymbol{y}\in F} (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) \tag{50}$$

問題 (50) の最適値を r^* とすると，最大リグレット最小解 $\boldsymbol{x}^*$ について次式が成立する．

$$\boldsymbol{x}\in F \text{ かつ } \boldsymbol{c}\in\Gamma \ \Rightarrow\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \leqq r^* \tag{51}$$

すなわち，最大リグレット最小解は，どのような $\boldsymbol{x}\in F$ と $\boldsymbol{c}\in\Gamma$ の組合せに対しても (すべての考えられる状態に対して)，目的関数値の差が r^* で抑えられるという性質をもっている．特に，r^* が 0 となるとき，かつ，そのときに限り，最大リグレット最小解は必然的最適解に一致する．すなわち，$\boldsymbol{x}$ の最大リグレット $\max_{\boldsymbol{c}\in\Gamma,\boldsymbol{y}\in F}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$ は必然的最適性からの乖離度を示しており，最大リグレット最小解はその乖離度を最小にした解である．

例 2 の問題の最大リグレット最小解を求めると，$\boldsymbol{x}^1 = (3.5, 8.5, 0, 5, 0.5)^{\mathrm{T}}$ が得られる．図 5 に示すように，この解は，可能的最適解集合である点 $(6,6,0,0,3)^{\mathrm{T}}$ と点 $(3,9,0,6,0)^{\mathrm{T}}$ を結ぶ線分上の端点でない点にあり，やや端点 $(3,9,0,6,0)^{\mathrm{T}}$ に近い位置に存在している．Γ をみれば，$(6,6,0,0,3)^{\mathrm{T}}$ を最適にする Γ 内の領域 (図 5 の影の部分) が小さいことを鑑みれば，端点 $(3,9,0,6,0)^{\mathrm{T}}$ に近いこともそれほどおかしいことではない．

一般に，問題 (50) を解くことは容易ではない．現在，Γ が凸多面体である場合に対して，双線形計画問題を部分問題とする緩和法によるアルゴリズムが提案されている [27]．また，最大リグレット最小解と類似した性質をもつ解概念として，最悪達成率最適解も提案されている [28][29]．可能的最適解集合からの解の選択基準の議論も実用上，重要になると考えられる．

4.3. Γ がファジィ集合の場合

4.3.1. 可能的最適解と必然的最適解

以上では，Γ が通常の集合の場合について述べたが，Γ がファジィ集合で定められる場合にも，同様な議論ができる．Γ がメンバシップ関数 μ_Γ で定められるとき，$\mu_\Gamma(\boldsymbol{c})$ は目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ が生起する可能性の度合を示していると解釈し，$\boldsymbol{c}$ を可能性変数ベクトルとして取り扱う．

Γ がファジィ集合である場合には，可能的最適解集合および必然的最適解集合もファジィ集合となり，$\boldsymbol{x}\in F$ のメンバシップ値は次のように定義される [23]．

$$\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x}) = \inf\,\{1 - \mu_\Gamma(\boldsymbol{c}) \mid \boldsymbol{c}\notin P(\boldsymbol{x})\} \tag{52}$$

$$\mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x}) = \sup\,\{\mu_\Gamma(\boldsymbol{c}) \mid \boldsymbol{c}\in P(\boldsymbol{x})\} \tag{53}$$

また，$\boldsymbol{x}\notin F$ に対しては，当然のことながら，$\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x}) = \mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x}) = 0$ と定められる．$\mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x})$, $\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x})$ は実行可能解 $\boldsymbol{x}$ が必然的または可能的に最適である度合いを示している．

$\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x})$ と $\mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x})$ に関して，次式が成立する．

$$\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x}) > 0 \Rightarrow \mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{54}$$

また，$\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x}), \mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x})$ は次のように h-レベル集合を用いて書き直すことができる．

$$\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x}) = \sup_h \{h \mid [\Gamma]_{1-h} \subseteq P(\boldsymbol{x})\} \tag{55}$$

$$\mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x}) = \sup_h \{h \mid [\Gamma]_h \cap P(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset\} \tag{56}$$

式 (43), (44) より，通常の集合 $[\Gamma]_{1-h}$ に関する $\boldsymbol{x}$ の必然的最適性判定，通常の集合 $[\Gamma]_h$ に関する $\boldsymbol{x}$ の可能的最適性判定を各 $h \in [0,1]$ に関して繰り返し利用することで近似的に，$\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x}), \mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x})$ を求めることができる．

Γ を制限し，各目的関数の係数 c_i が，L-L ファジィ数によって規定される場合についての $\mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x}), \mu_{Nopt}(\boldsymbol{x})$ の計算方法は，文献 [23] で議論されている．また，Γ が正値対称行列 H，中心ベクトル $\boldsymbol{c}^0$ をもつ正規可能性分布，

$$\mu_\Gamma(\boldsymbol{c}) = \exp\left(-(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}^0)^{\mathrm{T}} H (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}^0)\right) \tag{57}$$

により与えられる場合の実行可能基底解 $\boldsymbol{x}$ の $\mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x}), \mu_{Nopt}(\boldsymbol{x})$ を計算する方法が文献 [30] で提案されている．この方法では，各 h-レベル集合ごとでの最適性の判定を行うことによって度合いを計算するのではなく，変数変換を行うことにより直接，度合いの計算を行っている．文献 [31] では，Inexact 計画や Tolerance アプローチとの関連性から，可能的，必然的最適性の度合を求めようとする研究もなされている．さらに，4.2.4 と同様な考え方に基づき，すべての可能的最適基底解を $\mu_{\Pi opt}(\boldsymbol{x})$ と同時に求める方法が，文献 [32] で提案されている．

4.3.2. 最適性の緩和と必然的ファジィ最適解

式 (52) では，厳密な意味での最適性を取り扱っている．そのため，$\mu_{Nopt}(\boldsymbol{x})$ が極めて小さい解しか存在しない場合がある．現実問題では，完全な最適解でなくともそれに近い準最適解であればよい場合が多い．このような観点から，乾口ら [33][34] は，最適性を緩和したソフトな最適解として，目的関数の係数ベクトルを $\boldsymbol{c}$ とする線形計画問題のファジィ最適解集合 $\widetilde{opt}$ を次のメンバシップ関数により定義している．

$$\mu_{\widetilde{opt}(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mu_{Dif}\left(\max_{\boldsymbol{y}\in F} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right), & \boldsymbol{x} \in F \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{58}$$

このファジィ最適解の概念を，Γ をファジィ集合とする問題 (39) へ適用すると，必然的ファジィ最適解 $N\widetilde{opt}$ を次のメンバシップ関数で定義することができる．

$$\mu_{N\widetilde{opt}}(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{c}} \max\left(1-\mu_\Gamma(\boldsymbol{c}), \mu_{\widetilde{opt}(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x})\right) \tag{59}$$

この必然的ファジィ最適性に基づくと，最も合理的な解は次のように定義できる．

$$\max_{\boldsymbol{x}\in F} \quad \mu_{N\widetilde{opt}(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x}) \tag{60}$$

この解は最良必然的ファジィ最適解とよばれ，その計算方法が議論されている [33][34].

5.　最近の話題と今後の展望

5.1.　一般の様相制約条件計画法

3 節で述べた様相制約条件計画問題では，不明確な係数をもつ制約条件の左辺が与えられたあいまいな目標を満足するように定式化されていた．制約条件の右辺値も不明確な場合も考えられ，左辺値と右辺値との乖離がある目標値以下というように，一般には，左辺値の不明確さ，右辺値の不明確さ，および左辺値と右辺値の関係のあいまいさの三つの不確実性を取り扱う必要がある．この三つの不確実性を同時に取り扱えるモデルとして，任意のファジィ関係を拡張する方法 (様相制約条件計画法 [19]) と目標計画法の考え方に基づく方法 (様相性目標計画法 [35][36]) の二つが提案されている．

一般に，可能性測度と必然性測度は，

$$\Pi_A(B) = \sup_{r \in U} T(\mu_A(r), \mu_B(r)), \quad N_A(B) = \inf_{r \in U} I(\mu_A(r), \mu_B(r)) \tag{61}$$

と定められる [37][38]．ただし，$T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$，$I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ は連言関数，含意関数であり，それぞれ，次の境界条件を満たす．

T1)　$T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0$，$T(1,1) = 1$

I1)　$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1$，$I(1,0) = 0$

式 (2) の可能性測度では，$T(a,b) = \min(a,b)$ なる min 演算，I として $I(a,b) = \max(1-a, b)$ なる Dienes 含意が用いられている．これら以外にも，種々の連言関数や含意関数が提案されている．

ファジィ数の大小関係を取り扱うため，max 演算を拡張したファジィマックスを用いる方法が提案されており，これをファジィ線形計画問題に応用する方法も提案されている [39][40] が，この方法は，$T(a,b) = \min(a,b)$ なる min 演算と $I(a,b) = 1$ ($a \leqq b$ のとき)，$I(a,b) = b$ ($a > b$ のとき) なる Gödel 含意を用いた様相制約条件計画問題の特別な場合になる [41]．min 演算と Gödel 含意とは，連言関数と含意関数の自然な関係を通して互いに得られる関係 (随伴関係) にあり [42]，これらを組み合わせて用いることも十分考えられる．また，min 演算と Gödel 含意とを用いることにより，様相制約条件計画法の枠組みで様相性目標計画問題も解釈できる [41]．

さて，一般の連言関数 T と含意関数 I で可能性測度と必然性測度が定義される場合は，可能性線形計画問題がうまく取り扱えるのか？ という未解決の問題があるが，I が単調性などのいくつかの性質を満たせば，必然性測度を用いる様相制約条件計画問題の多くのモデルが，半無限線形計画問題として近似的に取り扱えることが，文献 [38] より推測できる．その詳細については，近い将来に報告する予定である．

一方，一般の連言関数 T を用いる場合は，拡張原理を同じ連言関数により定義した方がよいという考え方もあるが，拡張原理が min 演算で定められると仮定すれば，可能性線形計画問題における可能性モデルと必然性モデルとの双対性 [43] によりある程度解決できそうである．

以上では述べなかったが，ここまで述べたモデルはすべて，不明確な係数間に相互関係がない場合，一種の独立性が成り立つ場合の結果であった．実際，可能性線形計画問題において，相互関係のある係数を取り扱った研究はあまりない．これに対し，太田ら [44] は，確率計画法のシナリオ分解の考え方を用いて相互関係のある場合を取り扱った．この

モデルはシナリオの生起に対しては確率を用い，シナリオの下での各係数の取りうる範囲はファジィ数で与えられている．片桐ら [45] は，実現値がファジィ数となる確率変数，ファジィランダム変数を用いて，線形計画法における係数の不確実性を扱っているが，これは太田らのモデルとかなり類似している．ただし，確率の取り扱いにおいては，片桐らのモデルの方が自然のように考えられる．

これらのモデルでは，確率とファジィあるいは可能性・必然性が同時に扱われており，その意味で興味深く，発展が期待できる．しかし，不明確さを可能性の概念のみで純粋に扱ったものではない．したがって，厳密な意味で可能性計画法とはいえない．純粋な可能性の概念のみで扱ったモデルも考えられている [46]．このモデルでは，

$$\text{if } \mathbb{s} \in \mathbb{S}^k \text{ then } \mathbb{a} \in \mathbb{A}^k,\ (\mathbb{S}^k,\ \mathbb{A}^k \text{ はファジィ集合})\ k = 1, 2, \ldots, m \tag{62}$$

というファジィルールで表現された知識とファジィ集合 $\mathbb{S}$ で表されたシナリオ変数 $\mathbb{s}$ の取りうる範囲に関する情報から，係数ベクトル $\mathbb{a}$ の取りうる範囲のファジィ集合はファジィ推論により求められる．ファジィルールによる表現は，たとえば,「晴れで暑ければ，よく売れる」,「曇りであれば，あまり売れない」,「雨ならば，まったく売れない」などのような人間の知識に合致している．また，このようなファジィルールで表される知識の下では，通常，天候の情報から売れ行きを予測するので，現実問題へのこのモデルを応用することは自然である．文献 [46] では，内挿的なファジィ推論を仮定し，ファジィルールにより表現された係数ベクトルをもつ可能性線形計画問題が，必然性測度を用いれば，線形計画問題に帰着できることが示されている．他のファジィ推論モデルを用いる場合や，可能性測度を用いる場合などの考察が今後の課題となる．

一方，相関行列と類似した行列で，係数間の相互関係を取り扱うモデルも考察されている [47]．このモデルでは，必然性測度に基づく問題の帰着問題が双対角形構造をした線形計画問題になり，Benders の分解原理を用いて容易に解けることが示されている．さらに，このモデルの拡張として，任意の h-レベル集合が凸多面体となるファジィ集合を用いて係数ベクトルの取りうる範囲が表現された可能性線形計画問題が，やはり必然性測度を用いれば，半無限計画問題に帰着できることが示され，Benders の分解原理を用いた解法が提案されている [48]．

5.2. 様相的最適性に関する話題

可能的最適解に関しては，数多く存在するので，解の列挙が問題となる．4 節で述べた通り，すべての可能的最適基底解を列挙する方法は既に提案されているが，すべての可能的最適フェイスの列挙については，未だ提案されていない．区間線形計画問題における可能的最適解は多目的線形計画問題の弱有効解 (弱パレート最適解) に対応する [49] ので，多目的線形計画問題の弱有効フェイスの列挙法が参考となる．

必然的最適解は存在しない場合が多いので，あまり興味の対象となっていないが，必然的最適解が存在するための必要十分条件の考察など，数学的な問題は残っている．必然的最適解が存在するとき，最大リグレット最小解は必然的最適解の一つになるので，最大リグレット最小解が計算できれば，必然的最適解も求めることができる．最大リグレット最小解の計算に関しては，部分問題の双線形計画問題の解法に応じて種々のものが考えられる．勿論，部分問題を高速に解くことが計算時間の向上につながるが，そればかりでな

く，メインルーチンとなる緩和法と相性のよい部分問題の解法を見付けることも計算効率性の改善に影響する．

制約条件が 1 本の可能性ポートフォリオ選択問題に最大リグレット最小化を適用すれば，帰着問題は線形計画問題になる．可能性ポートフォリオ選択問題に様相制約条件計画問題を適用すれば，多くの場合，一つの証券あるいは，少数の証券に集中投資する危険な解が得られるのに対し，最大リグレット最小化を用いれば，分散投資解が得られることが示されている [50]．また，多少繁雑になるが，係数間の相互関係を考慮することもできる [51]．今後，実際のポートフォリオ選択問題においてこのモデルがどの程度有効であるか，実用できるのかという課題もある．

最大リグレット最小化問題では，目的関数の差によりリグレットを定義していたが，目的関数の比に着目することもできる．目的関数値が正の値をとり，これを最大化する場合には，最適値に対する達成率を求めることにより，解を評価することもできる．係数が不明確であるから，最悪の達成率を最大にするよう定式化すればよいが，このような解も最大リグレット最小解と同様な性質をもつことが知られている [28]．また，類似した解法で解けることがわかっている [28][29][52]．

本稿では，単一の目的関数をもつ可能性線形計画問題を扱ったが，多目的可能性線形計画問題に対しても，可能的最適解，必然的最適解の概念が導入され，可能的有効解，必然的有効解が提案されている [53][54]．多目的の場合は，必然的有効解の存在可能性はずっと高まり，不確実性を考慮すれば，必然的有効解の中から選好する解を選択することが望ましい．実行可能基底解が与えられた場合の可能的有効性，必然的有効性のテストは，近年，井田 [55][56] により勢力的に研究されている．特に，非ピボッティング列挙に基づいた方法 [55] などは興味深い．

5.3. リコース問題

1 節で述べた通り，可能性計画問題に対するリコース問題は未だ十分に研究されていない．現在のところ，著者が知る限り，伊藤と石井の研究 [11] と著者らのもの [12] がある[3]．伊藤と石井 [11] は，右辺値のみが不明確な場合の可能性計画問題に対するリコース問題を可能性測度を用いて定式化し，一解法を与えている．著者ら [12] は，可能性計画問題の全係数の取りうる範囲が凸多面体として与えられるリコース問題を必然性測度に基づき取り扱い，この問題が微分不可能関数の最適化問題になることを示した．また，別法として，最大リグレット最小化問題と同様な緩和法を用いた解法も与えられている．前者はファジィ係数の場合を扱っているが，後者は非ファジィの場合である．

リコース問題は，解法，定式化とも十分に研究されておらず，多くの課題が残っている．特に，微分不可能関数の種々の最適化手法のいずれが最も適切であるか，様相制約条件計画問題とどのような関係にあるかなどは興味深い．リコース行列として，様々な特殊形もあるので，その特殊性と解法の容易さとの関係など，リコース問題における課題は多い．

6. おわりに

可能性線形計画問題における様相制約条件計画問題と様相的最適性とについて解説した．前者は，確率計画法と比べ，かなり容易に解けるという特徴をもつので，この特徴を保存した一般化を行うことが重要となろう．一方，後者は，合理的な解を追究している反

[3] 口頭発表原稿の中に，リコース問題を誤って解釈した研究はある．

面，帰着問題が非凸計画問題になることが多く，解きにくい．種々の大域的最適化手法の導入を検討し，より効率的な解法を見出す必要があろう．リコース問題は，未だ十分に研究されていないので，今後の発展が大いに期待される．

ここでは，線形計画問題の場合を中心に述べたが，不確実性の取り扱い方，すなわち，種々のモデルは各種問題に適用できる．可能性線形計画法以外にも，可能性非線形計画法，可能性組合せ計画法，可能性スケジューリングなど，多くの研究テーマがありうる．いずれの場合も，どのように不明確さを処理すれば，どのようにうまく解けるのかを探究することが研究課題である．

参考文献

[1] 乾口，井田：多様な決定を支援する可能性計画法，日本ファジィ学会誌，Vol.12, No.1, 10–18 (第 1 回), No.2, 210-217 (第 2 回), No.3, 377–381 (第 3 回), No.4, 507-514 (第 4 回) (2000)

[2] Zadeh, L. A.: Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems, Vol.1, 3-28 (1978)

[3] Dubois, D. and Prade, H.: Possibility Theory: An Approach ro Computerized Processing of Uncertainty, Plenum Press (1988)

[4] Lodwick, W., Jamison, D. and Russell, S.: A Comparison of Fuzzy, Stochastic and Deterministic Methods in Linear Programming, Proceedings of NAFIPS'00, 321–325 (2000)

[5] Jamison, D. and Lodwick, W.: Fuzzy Linear Programming Using Penalty Method, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 119, 97–110 (2001)

[6] Fortemps, P. and Teghem, J.: Multi-Objective Fuzzy Linear Programming: The MOFAC Method, Fodor, J., De Baets, B. and Perny, P. (eds.), Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge, Physica-Verlag, 11–32 (2000)

[7] Shafer, G.: A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press (1976)

[8] Dubois, D. and Prade, H.: Properties of Measures of Infromation in Evidence and Possibility Theories, Fuzzy Sets and Systems, Vol.24, 162–182 (1987)

[9] Dubois, D. and Prade, H.: Possibility Theory: Qualitative and Quantitative Aspects, Smets, P.(ed.), Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems, Vol.1: Quantified Representation of Uncertainty and Imprecision, Kluwer Academis Press, 169–226 (1998)

[10] 石井：確率論的最適化，伊理，今野編，数理計画法の応用<理論編>，産業図書 1–40 (1982)

[11] Itoh, T. and Ishii, H.: Fuzzy Two-Stage Problem by Possibility Measure, Mathematica Japonica, Vol.46, 279-288 (1997)

[12] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: Two-Stage Linear Recourse Problems under Non-Probabilistic Uncertainty, Yoshida, Y.(ed), Dynamical Aspects in Fuzzy Decision Making, Physica-Verlag, 117–140 (2001)

[13] Inuiguchi, M. and Sakawa, M.: A Possibilistic Linear Program Is Equivalent to a Stochastic Linear Program in a Special Case, Fuzzy Sets and Systems, Vol.76, 309–

318 (1995)
[14] 乾口：確率計画問題とファジィ数理計画問題，日本ファジィ学会誌，Vol.4, No.1, 21-30 (1992)
[15] Inuiguchi, M. and Ramík, J.: Possibilistic Linear Programming: A Brief Review of Fuzzy Mathematical Programming and a Comparison with Stochastic Programming in Portfolio Selection Problem, Fuzzy Sets and Systems, Vol.111, 3–28 (2000)
[16] 乾口：ファジィ数理計画法，浅居，田中編，ファジィ OR，日刊工業新聞社，41-90 (1993)
[17] Inuiguchi, M., Ichihashi, H. and Tanaka, H.: Fuzzy Programming: A Survey of Recent Developments, Słowinski, R. and Teghem, J. (eds), Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 45-68 (1990)
[18] Inuiguchi, M. and Ichihashi, H.: Relative Modalities and Their Use in Possibilistic Linear Programming, Fuzzy Sets and Systems, Vol.35, 303-323 (1990)
[19] Inuiguchi, M., Ichihashi, H. and Kume, Y.: Modality Constrained Programming Problems: A Unified Approach to Fuzzy Mathematical Programming Problems in the Setting of Possibility Theory, Information Sciences, Vol.67, 93-126 (1993)
[20] 今野：線形計画法，日科技連 (1987)
[21] Inuiguchi, M., Tanino, T. and Sakawa, M.: Membership Function Elicitation in Possibilistic Programming Problems, Fuzzy Sets and Systems, Vol.111, 29-45 (2000)
[22] 乾口：ファジィ数理計画法; ファジィOR（講座ファジィ6），日本ファジィ学会編，日刊工業新聞社，41-90 (1993)
[23] Inuiguchi, M. and Sakawa, M.: Possible and Necessary Optimality Tests in Possibilistic Linear Programming Problems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.67, 29-64 (1994)
[24] Horst, R. and Tuy, H.: *Global Optimization: Deterministic Approacheshird, Revised and Enlarged Edition*, Springer-Verlag (1995)
[25] 乾口，東谷，谷野：目的関数の係数ベクトルが凸多面体で表された線形計画問題における可能的最適端点の列挙法，日本ファジィ学会誌，Vol.12, No.1, 169-175 (2000)
[26] Inuiguchi, M. and Sakawa, M.: Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function, *European J. of Oper. Res.*, Vol.86, 526-536 (1995)
[27] Inuiguchi, M., Higashitani, H. and Tanino, T.: On Computation Methods of the Minimax Regret Solution for Linear Programming Problems with Uncertain Objective Function Coefficients, *Proc. of 1999 IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol.III, 979-984 (1999)
[28] Inuiguchi, M. and Sakawa, M.: An Achivement Rate Approach to Linear Programming Problems with an Interval Objecrtive Function, *J. of the Oper. Res. Society*, Vol.48, 25-33 (1997)
[29] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: An Achievement Rate Approach to Linear Programming Problem with Convex Polyhedral Objective Coefficients, *Proc. of the Third Asian Fuzzy Systems Symposium*, 501-505 (1998)

[30] 井田：正規可能性分布をもつ可能性線形計画問題における最適性，日本ファジィ学会誌，Vol.7, No.3, 594-601 (1995)
[31] Ida, M.: Optimal Basis of Possibilistic Linear Programming Problem, *Proc. of the Forth Asian Fuzzy Systems Symposium*, Vol.1, 95-99 (2000)
[32] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: Enumeration of All Possibly Optimal Vertices with Possible Optimality Degrees in Possibilistic Linear Programming Problems, *Proc. of the Forth Asian Fuzzy Systems Symposium*, Vol.1, 386-391 (2000)
[33] 乾口，坂和：ファジィ線形計画問題におけるロバストでソフトな最適化，日本ファジィ学会誌，Vol.8, No.6, 1125-1133 (1996)
[34] Inuiguchi, M. and Sakawa, M.: Robust Optimization under Softness in a Fuzzy Linear Programming Problem, *Int. J. of Approximate Reasoning*, Vol.18, No.1-2, 21-34 (1998)
[35] 乾口，久米：様相性目標計画問題，様相性目標計画問題日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌，Vol.32, No.3, 326–351 (1989)
[36] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: Modality Goal Programming Models with Interactive Fuzzy Numbers, Proceedings of the Eighth International Fuzzy Systems Association World Congress, Vol.1, pp.519–523 (1999)
[37] Dubois, D. and Prade, H.: Fuzzy Sets in Approximate Reasoning, Part 1: Inference with Possibility Distributions, Fuzzy Sets and Systems, Vol.40, 143-202 (1991)
[38] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: Necessity Measures and Parametric Inclusion Relations of Fuzzy Sets, Fundamenta Informaticae, Vol.42, No.3,4, 279–302 (2000)
[39] Tanaka, H., Ishihashi, H. and Asai, K.: A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problem Based on Comparison of Fuzzy Numbers, Control and Cybernetics, Vol.13, 185–194 (1984)
[40] 古川：ファジィ最適化の数理，森北出版 (1999)
[41] 乾口，久米：Gödel 含意を導入した様相制約条件計画問題と種々のファジィ数理計画問題，システム制御情報学会論文誌，Vol.4, No.9, 382–392 (1991)
[42] Dubois, D. and Prade, H.: A Theorem on Implication Functions Defined from Triangular Norms, Stochastica, Vol.8 276–279 (1984)
[43] Inuiguchi, M., Ramík, J., Tanino, T. and Vlach, M.: Optimality and Duality in Interval and Fuzzy Linear Programming, Fuzzy Sets and Systems (to appear)
[44] 太田，山口，高野：係数間の関係を考慮したファジィ多目標計画法，日本ファジィ学会誌，Vol.6, No.1, 166-177 (1990)
[45] Katagiri, H., Ishii, H. and Itoh, T.: Fuzzy Random Linear Programming Problem, *Proc. EFDAN'97*, 107-115 (1997)
[46] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: Possibilistic Linear Programming with Fuzzy If-Then Rule Coefficients, Fuzzy Optimization and Decision Making (to appear)
[47] Inuiguchi, M., Ramík, J. and Tanino, T.: Oblique Fuzzy Vectors and Their Use in Possibilistic Linear Programming, Fuzzy Sets and Systems (to appear)
[48] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: Possibilistic Linear Programming with Globally Interactive Fuzzy Numbers, Proceedings of FUZZ-IEEE'01 (to appear)

[49] Inuiguchi, M. and Kume, Y.: Minimax Regret in Linear Programming Problems with an Interval Objective Function, Tzeng, G. H., Wang, H. F., Wen, U. P. and Yu, P. L.: Multiple Criteria Decision Making, Springer–Verlag, 65–74 (1994)

[50] Inuiguchi, M. and Tanino, T.: Portfolio Selection under Independent Possibilistic Information, Fuzzy Sets and Systems, Vol.115, 83–92 (2000)

[51] 乾口，谷野：可能性情報のもとでのポートフォリオ選択，数理解析研究所講究録 1043, 決定理論とその関連分野，1–9 (1998)

[52] Inuiguchi, M., Tanino, T. and Tanaka, H.: Optimization Approaches to Possibilistic Linear Programming Problems, Proceedings of IFSA-NAFIPS'01 (to appear)

[53] Bitran, G. R.: Linear Multiple Objective Problems with Interval Coefficients, *Management Science*, Vol.26, 694-706 (1980)

[54] Inuiguchi, M. and Sakawa, M.: Possible and Necessary Efficiency in Possibilistic Multiobjective Linear Programming Problems and Possible Efficiency Test, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.78, 231-241 (1996)

[55] 井田：多目的計画問題における有効性判定と区間問題への拡張，日本ファジィ学会誌，Vol.11, No.1, 121-131 (1999)

[56] 井田：可能性多目的計画問題に対する可能的有効解と感度分析，日本ファジィ学会誌，Vol.11, No.2, 289-297 (1999)