

# Quantile Hedge による Dynamic Asset Allocation

一橋大学院国際企業戦略研究科

中村 信弘\*

2000.9.26

## 概要

本稿では、quantile hedging strategy の dynamic asset allocation(DAA) への応用を研究する。maximum option を具体例として、その実証研究を通じ、quantile hedge の特性と可能性を明らかにする。quantile hedge の幾つかの variety(downside risk, upside chance の確率、またはそれらの金額についての最適化問題) について、定式化し、hedging strategy の構成法を示す。最後に、quantile hedge の実現に必要な underlying asset の drift の推定法について言及する。

**Keywords:** quantile hedge, dynamic asset allocation, maximum option, low-discrepancy-sequence, Malliavin calculus, Markov Chain Monte Carlo

## 1 Introduction

最近、Föllmer-Leukert(1999) [5] によって提案された quantile hedging strategy は、幾つかの理論的、実務的観点から興味深い特性を持ち、Nakamura(1999)[9] では corporate finance への応用 (defaultable firm の quantile hedging strategy) が研究された。本稿では、特に、その strategy の dynamic asset allocation(DAA) への応用を研究する。以下は本研究の幾つかのポイントである。

- 多資産の asset allocation 対応。→ low-discrepancy-sequence(LDS) を用いて対応。
- target option の満期が長かったり、価値のある option の場合、高 cost の DAA となる。→ quantile(partial) hedging strategy の応用
- Markowitz を嚆矢とする static downside risk model の拡張。→ 連続時間の dynamic model(downside risk, upside chance)
- DAA では価値評価以上に hedging strategy の計算が重要。→ Malliavin calculus により explicit に計算可能。
- quantile hedge では drift の推定が必要。→ Bayes 統計に基づく Markov chain Monte Carlo(MCMC) の適用。

本稿の構成は以下の通り。次節で maximum option の perfect hedge, quantile hedge に必要な各々の評価式を導出、各 strategy で共通の market data を用いて実証、比較研究を行う。第3節では quantile hedge の幾つかの variation の提案とその構成法を示す。第4節では、MCMC を用いた underlying asset の drift の推定法について触れる。最後に本稿のまとめと幾つかの研究課題を述べる。

## 2 Dynamic Asset Allocation

### 2.1 Max-option under stochastic interest rate with a strike price

multi-asset の max option の quantile hedge を行うために、その解析的表現が必要になる。それから LDS(Low-Discrepancy-Sequence) を用いて時価や hedge 比率が積分計算により求められる。quantile hedge では特に、strike price をもつ option の表現が必要となるため、本節では、その表現を与える。後の分析のため、ここでは、Johnson(1987)[7]

\*Presentation document:平成 12 年度 OR 学会第 44 回シンポジウム -「OR と金融工学」- 著者連絡先は以下の通り。  
Email:mnakamura@ics.hit-u.ac.jp, tel:03-4212-3106 (dial-in), fax:03-4212-3069

で与えられている Black-Scholes(BS) 経済下での表式でなく、金利も確率的に変動する (HJM type) より一般的な形で与えておく。<sup>1</sup> なお、BS の結果は、金利に関する volatility を 0 にすることで、以下で与える式から再現できる。

以下では、適当な time horizon  $T_h$  をもつ frictionless complete financial market を仮定する。underlying asset, default-free discount bond, money market account の各 price process は、filtered probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T_h]})$  上で、以下の stochastic differential equation(SDE) にそれぞれ従うと仮定する。

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= \mu_i S_i(t) dt + \sum_k \sigma_{Sik} S_i(t) dB_k(t), \\ dP(t, T) &= \mu_P(t, T) P(t, T) dt - \sum_k \sigma_{Pk} P(t, T) dB_k(t), \\ \frac{d\beta(t)}{\beta(t)} &= r(t) dt. \end{aligned} \quad (1)$$

金利の term structure の変動のモデル化に要する factor 数と underlying asset の数に応じた次元を持つ独立な Brownian motion(BM)  $(B_t)_t \in [0, T]$  を用意する。SDE(1) の各係数は、 $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T_h]}$  に関して progressively measurable で、 $(t, \omega) \in [0, T_h] \times \Omega$  で uniformly bounded とする。

DAA の target として、ここでは、 $n$  asset の terminal payoff function

$$\text{Payoff} = \max[\max\{S_1(T), \dots, S_n(T)\} - K, 0], \quad (2)$$

をもつ maximum call option を取り上げる。 $S_i(T)$  は満期  $T$  の  $i$ -th asset price,  $K$  は strike price.  $n+1$ -th asset price を、default-free discount bond price  $P(t, T)$  (maturity  $T$ , current time  $T$ ) を用いて、便宜上、 $S_{n+1}(t) := KP(t, T)$  と表すことにしよう。これは deterministic interest rate の場合の  $Ke^{-r(T-t)}$  の対応物である。そのとき、premium は closed-form で以下のように計算される。

$$\begin{aligned} C_{\max}(S_1, \dots, S_n; K) &= \sum_{i=1}^n S_i(t) N_n(d_{ij(j=1, \dots, n+1, j \neq i)}; R^{(i)}) - P(t, T) K [1 - N_n(d_{n+1i(i=1, \dots, n)}; R^{(n+1)})] \\ &= \sum_{i=1}^n S_i(t) N_n(d_{ij(j=1, \dots, n+1, j \neq i)}; R^{(i)}) - S_{n+1} [1 - N_n(d_{n+1i(i=1, \dots, n)}; R^{(n+1)})]. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで  $n$  変数の正規分布関数  $N_n$  の argument は

$$d_{ij} = \frac{\ln\left(\frac{S_i(t)}{S_j(t)}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2}{\sigma_{ij}} \quad (i = 1, \dots, n+1; j = 1, \dots, n+1, j \neq i), \quad (4)$$

と定義される。記号  $\sigma_{ij}$  etc. は次の stochastic integral

$$Y_i \equiv \sum_k \int_0^T \sigma_{Sik}(u) dB_k^{Q(T)}(u) + \sum_k \int_0^T \sigma_{Pk}(u, T) dB_k^{Q(T)}(u),$$

の quadratic covariation である。ここで、covariation は  $P(t, T)$  を numeraire とする、いわゆる、forward-measure  $Q(T)$  でとられるものとする。その Radon-Nykodym density は  $\phi_P(t) := -\sigma_P^{-1} \mu_P(t, T)$  とすると、Doléans-Dade exponential を用いて

$$\frac{dQ(T)}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} := \mathcal{E} \left( - \int_0^t \phi_P(u) dB(u) \right)_t.$$

また、記号  $\sigma_i^2$  を

$$\sigma_i^2 \equiv \int_0^T [\sigma_{Si}^2(u) + \sigma_P^2(u, T) + \rho_{i,P} \sigma_{Si} \sigma_P(u, T)] du.$$

と定義しよう。各 correlation matrix の element は次のようになる。

$$\begin{aligned} R_{jk}^{(i)} &= \frac{\sigma_i^2 + \rho_{jk} \sigma_j \sigma_k - \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j - \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k}{\sigma_{ij} \sigma_{ik}}, \quad (j, k = 1, \dots, n; j \neq i) \\ R_{ji}^{(i)} &= \frac{\sigma_i^2 - \rho_{ji} \sigma_j \sigma_i - \rho_{in+1} \sigma_i \sigma_{n+1} + \rho_{jn+1} \sigma_j \sigma_{n+1}}{\sigma_{ji} \sigma_{in+1}}, \quad (j = 1, \dots, n; j \neq i) \\ R_{jk}^{(n+1)} &= \frac{\sigma_{n+1}^2 + \rho_{jk} \sigma_j \sigma_k - \rho_{jn+1} \sigma_j \sigma_{n+1} - \rho_{kn+1} \sigma_k \sigma_{n+1}}{\sigma_{jn+1} \sigma_{kn+1}}, \\ \sigma_{ij}^2 &:= \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> asset は geometric Brownian process、金利は asset と適当な相関をもつ HJM モデルに従うものとする (いわゆる Amin-Jarrow type)

strike price が 0 の場合、maximum option の本稿の setting での表式をここで与えておく。これは、上記の特別なケース ( $K = 0$ ) にあたる。

$$C_{max}(S_1, \dots, S_n; K = 0) = \sum_{i=1}^n S_i(t) N_{n-1}(d_{ij}(j=1, \dots, n; j \neq i); R_{jk}^{(i)}, j, k = 1, \dots, n; j \neq i). \quad (5)$$

ここで式 (5) の arguments は式 (4) の  $d$  を使った式 (3) と似ているが、分布関数の次数が 1 つ減っていることに注意しよう。

## 2.2 Backtest of the usual dynamical replication strategy

quantile hedge strategy の比較のため、本節では、まず最初に quantile hedge でない従来の perfect hedging strategy の backtest 結果を示す。maximum option などの資産数の多い (4,5 以上) option の replication では、premium は hedge ratio の計算が、前節のように、高次元の積分で表現されたりするため、従来は、不可能であった。しかし、最近では、一般化した LDS を使うことで、多次元の計算については、数百-千資産程度までなら、それ程、問題なく計算可能となっている。

図 1 は、式 (5) の計算で、asset 数を、漸次、増やしていき hedge ratio も含め portfolio 構成に必要なすべての workload の計算時間を計測したものである。<sup>2</sup>

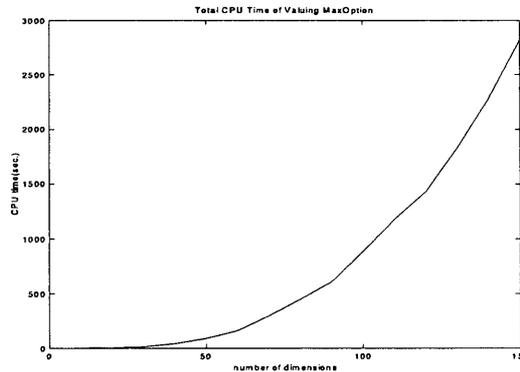


図 1: Total CPU time of valuing max option without strike price, varying the number of assets, where the number of LDS generated is 5000, and Pentium II 300MHz Memory 64MB PC is used. Measuring CPU time we sum up all time of computing the premium and the delta-exposures against each underlying asset.

図 2, 3 は東証の 33 業種 index に対して、本節の DAA を行った結果を示している。それぞれの図は、この DAA での portfolio value (業種 index との対比で) の推移、portfolio の業種 index 構成比の推移 (紙数の都合上、33 業種の最初の 9 業種のみ plot) を表している。この DAA の特徴は、次のようになる。

- \* max-option の満期が長くなるに従い、option premium は高くなる。これは fund の所定金額内で replication に必要な 1 単位の option を購入できなくなることを意味しており、その結果、構成した portfolio が replication target の何分の 1 かのレベルを track することになる。
- \* 構成比の変化が速い。universal portfolio などと比べて顕著。
- \* return の大きな asset、もしくは、volatility の大きな asset に大きな投資 weight をもつ。

<sup>2</sup>ここでは、 $N_n(\cdot)$  を LDS を用いて評価する module を  $n$  回、call して計算した。同じ LDS で  $n$  個の  $N_n(\cdot)$  を並列的に同時に評価することもでき、計算量が (定数)/ $n$  倍に減少すると予想される。

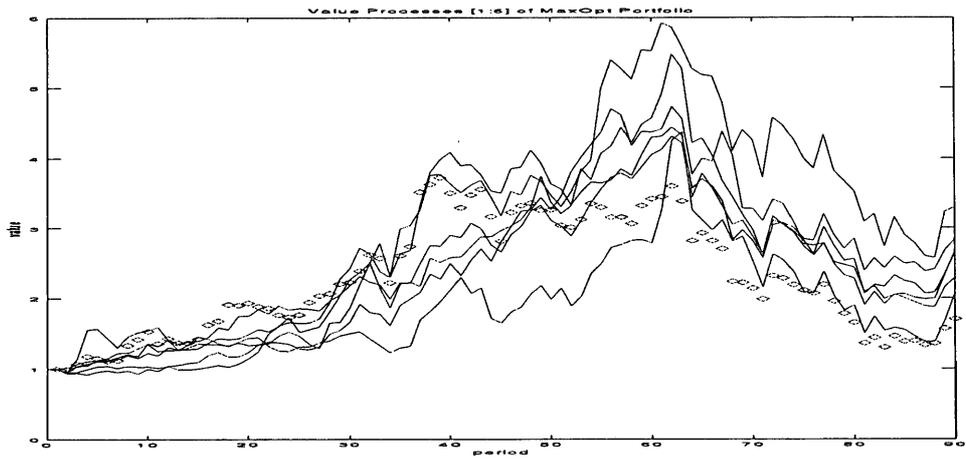


図 2: Value processes of (1-6)-th indices among 33 Japanese industry indices of max-option portfolio, where investment period is 19830510-19930527.

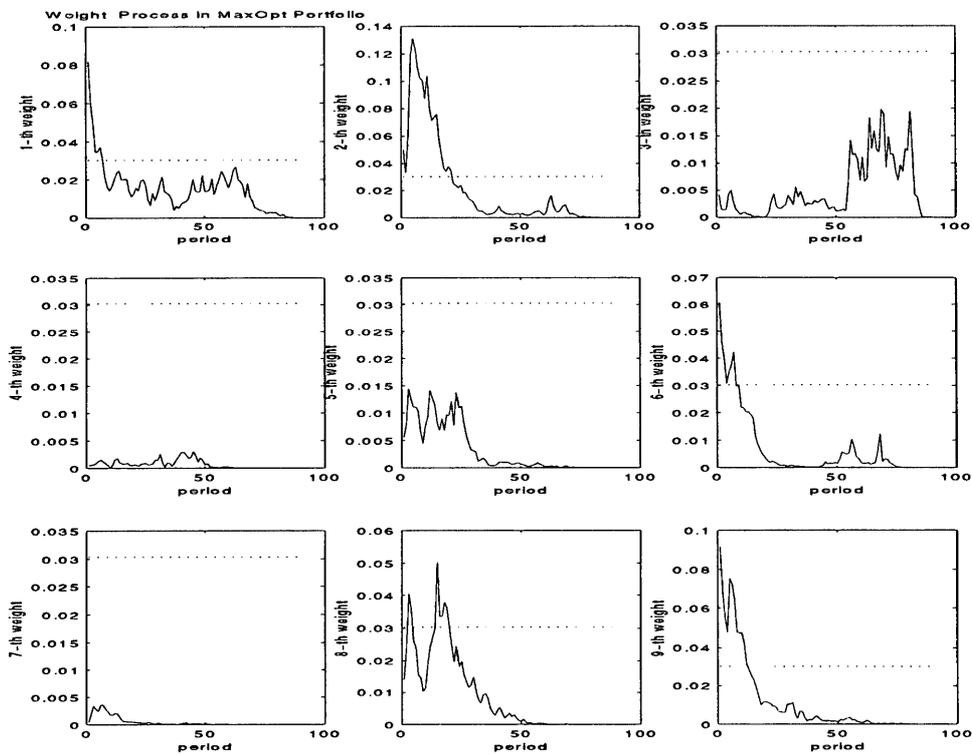


図 3: Weight processes of (1-9)-th indices among 33 Japanese industry indices of max-option portfolio, where investment period is 19830510-19930527.

## 2.3 Quantile hedging strategy of DAA

一般的に、DAA では、資産数が多くなったり、investment horizon が長いとき (option 満期が長くなる)、target option の価値が高くなり、fund を組成する際の initial cost が高くなるという欠点があった。それを克服するために、option 満期を1年あるいは更に短くした target option の roll-over strategy を採用する方法が実務的には採られてきた。

本稿では、quantile-hedging strategy (Föllmer-Leukert(1999)[5]) を資産数の多い maximum option の DAA に応用して、上記の問題点の解決を試みる。ここで、次のような連続時間モデルの最適化問題を考える。Notation の詳細は [5] 参照のこと。

$$\min_{\phi \in \mathcal{R}} E[l((1-\phi)H_T)] \quad (6)$$

s.t.

$$\sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[\phi H_T] \leq \tilde{V}.$$

ここで、 $H_T$  は target option の満期の価値、 $\phi$  は randomized critical test function、 $\mathcal{R}$  はすべての critical test function の集合、 $l(\cdot)$  は penalty function、 $l(x) = \frac{x^p}{p}$  ( $p > 1$ )、 $\tilde{V}$  は許容される initial cost、 $\mathcal{P}$  はすべての equivalent martingale measure の集合、(通常の filter 付き確率空間を仮定)、資産の価格過程は式 (1) に従うものとする。なお、本節では金利は deterministic としている。Equivalent martingale measure  $P^*$  は numeraire に money market account  $\beta(t) = e^{rt}$  をとる通常の risk-neutral measure で

$$\frac{dP^*}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E} \left( - \int_0^t \phi dB \right)_t =: \rho^*,$$

$$\phi_k := \sum_i \sigma_{ki}^{-1} (\mu_i - r)$$

で定義される。 $P^*$  のもとで

$$B^* = B + \phi dt$$

は Girsanov's theorem から  $\mathcal{F}_t$ -Brownian motion になる。

最適化問題 (6) は、与えられた initial cost のもとで、満期での hedging portfolio の価値が target option の価値を下回る (risk-neutral でなく original measure で測った) リスクに適当な penalty をつけた量を最小にする (penalized shortfall risk を最小にする) strategy を見つける問題になっている。Föllmer らは Neyman-Pearson lemma を使い、上記の optimal strategy は optimal critical test function <sup>3</sup>

$$\tilde{\phi} = 1 - \frac{I(c\rho_T^*)}{H_T} \wedge 1 \quad \text{on } H_T > 0 \quad (7)$$

を  $H_T$  に掛けて条件付き期待値をとった process の martingale 表現から得られることを示している。ここで、 $I(y) := y^{1/(p-1)}$  は penalty function の逆関数で、

$$I(c\rho_T^*) = c \prod_{i=1}^n (S_i(T))^{-\beta_i},$$

$\beta_i = \alpha_i / (p-1)$ ,  $\alpha_i = \sum_j (\sigma\sigma')_{ij}^{-1} (\mu_j - r)$ . ここで、

$$H_T = (S_1 \vee \dots \vee S_n) \quad (8)$$

ととって、その quantile hedging strategy の計算を行う。

$$\begin{aligned} E^*[\phi H_T^0] &= E^*[G^0] \hat{E} \left[ \left( (\hat{S}_1 \vee \dots \vee \hat{S}_n) - c\eta_T \right)^+ \right] \\ &= \prod_{i=1}^n (S_i^0)^{-\beta_i} C_{\max}(\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n, \hat{\sigma}; c\eta_T) \\ &= C_{\max}(S_1, \dots, S_n, \hat{\sigma}; c\eta_T), \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $G_t^0$  は  $I(\cdot)$  から

$$I(c\rho_t^*) =: cG_t^0 \eta_t, \\ G_t^0 := \prod_{i=1}^n S_i^{-\beta_i}(t) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_i \beta_i (\sigma\sigma')_{ii} t - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_i (\sigma\sigma')_{ij} \beta_j t \right),$$

<sup>3</sup>Föllmer-Leukert(1999) では success ratio function  $1_{\{x>H\}} + \frac{x}{H} 1_{\{x<H\}}$  を導入している。これは後で述べる  $1_{\{x>H\}}$  に対する Legendre-Fenchel 変換による解法で  $1_{\{x>H\}}$  を dominate する最小の関数が success ratio function になっていることに注意せよ。そのため、dual function が共通となり、同じ最適化の結果をもたらすことが理解できよう。

のように定義された量である。このとき、

$$\begin{aligned}\frac{dS_i^0}{S_i^0} &= \sum_k \sigma_{ik} dB_k^*, \\ \frac{dG^0}{G^0} &= -\sum_i \beta_i \sigma_{ik} dB_k^*,\end{aligned}$$

であり、numeraire を  $G_i^0$  に代えた relative asset price  $\hat{S}_i := S_i^0/G_i^0$ , は次の SDE

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{S}_i}{\hat{S}_i} &= \sum_k (\sigma_{ik} + \sum_j \beta_j \sigma_{jk} 1_i) dB_k^* =: \sum_k \bar{\sigma}_{ik} dB_k^*, \\ \hat{\sigma}_{ij} dt &:= \left\langle \frac{d\hat{S}_i}{\hat{S}_i}, \frac{d\hat{S}_j}{\hat{S}_j} \right\rangle = \sum_k (\bar{\sigma} \bar{\sigma}')_{ij} dt,\end{aligned}$$

に従って時間発展する。1 は constant  $n$ -vector(of ones). Girsanov formula から

$$\hat{B}_k(t) := B_k^*(t) + \sum_j \beta_j \sigma_{jk} t$$

で定義された new process は Brownian motion になる。そして new probability measure  $\hat{P}$  (on  $\mathcal{F}_t$ ) は

$$\hat{P}(\Lambda) = \mathbb{E}^*[1_\Lambda], \quad \Lambda \in \mathcal{F}_t.$$

で与えられる。

式 (9) を  $\tilde{V} (< C_{max}(S_1, \dots, S_n; K = 0))$  に等しいとする方程式を  $c$  について解くと critical value  $c^*$  を得る。この  $c^*$  を用い martingale representation theorem を  $E^*[\phi H_T^0 | \mathcal{F}_t]$  に適用すると, maximum option(without a strike price) の quantile hedging strategy を作る事ができる。それは, 式 (9) より, strike price  $c^* \eta_T$  と excess returns,  $(\mu - r1)$  によって修正した covariance  $\hat{\sigma}$  をもつ maximum option の dynamical replicating strategy となっている。

式 (6) では, initial cost を fund 価値とするため, たとえ target option 価値が高くとも, option 1 単位を複製する strategy となる。但し, shortfall risk を甘受するが, それをできるだけ小さくするような strategy となっている。

通常, fund 価値に対して, target option 価値が高いほど, shortfall risk は高くなる。以下は, 資産数が多く, 満期の長い設定での実証結果である。risk-neutral measure のもとでの通常の hedging strategy では risk-premium  $\mu - r1$  は必要ないが, quantile hedge の場合は, それが計算に必要であることに注意しよう。

data は前節と同じく, 東証 33 業種の日次データ。図 4 は quantile hedge による DAA の portfolio 価値と各 asset 価格の推移を表している。

この図から, 上昇局面では, 良く最大資産を追従していることが窺える。最大値を実現しているところでは, 銘柄柄に集中投資をしており, いったん, 相場が崩れ始めると, cash を増やし, 分散投資の方向に向かうが, 追いつく speed はそれ程, 速くない。

図 2 と図 4 とを比べると, 容易に分かるように, 通常の replication strategy では, 1 単位でなく何分の 1 かの option 単位数を replicate するため, 最大値のその割合のレベルを track するにとどまるが, quantile hedge では 1 単位の option を replicate しようとしていることが観察できる。

次の図 5,6 は図 4 の value 推移の期間に対応する各資産の weight の推移を表している。図 5 は最初の 9 業種の推移であり, 通常の max option の dynamical hedge の weight 推移図 3 と対比されるべき図である。

図 6 は quantile hedge の 28 番から 33 番めの業種 weight の推移を表している。特に 34 番めの weight は risk-free asset の weight の推移を表している。これは, 通常の max option の dynamical hedge では存在しなかった risk-free asset への allocation である。

以上, LDS の適用によって, 計算可能になった事例を検証したが, 他にも, asset allocation model で多重積分で表現されるものがあれば, 適用可能であろう。

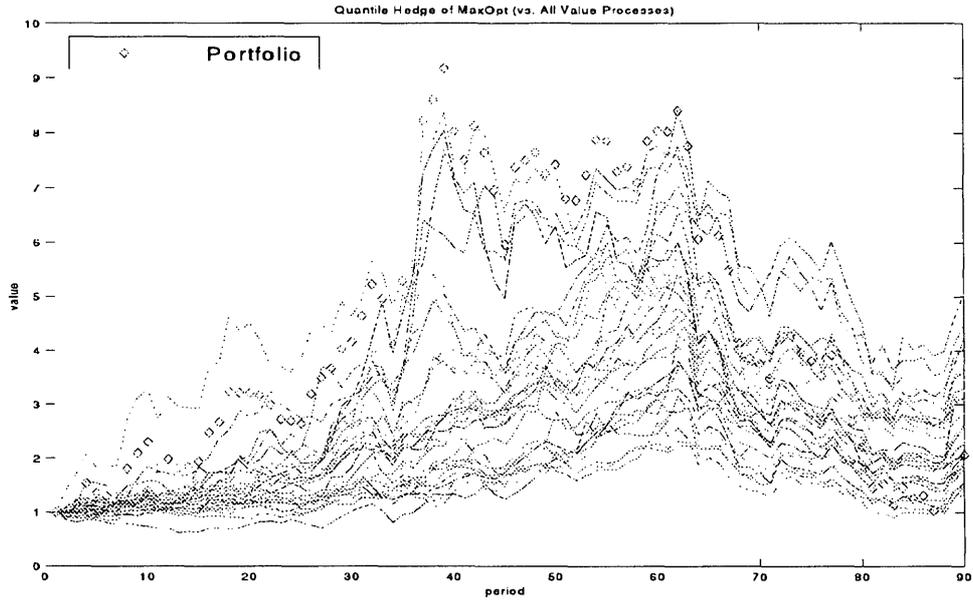


図 4: 東証 33 業種に対する quantile hedging strategy に基づく DAA. 198305-199305 の 90 期間.  $\diamond$  は hedging portfolio の推移を表している。

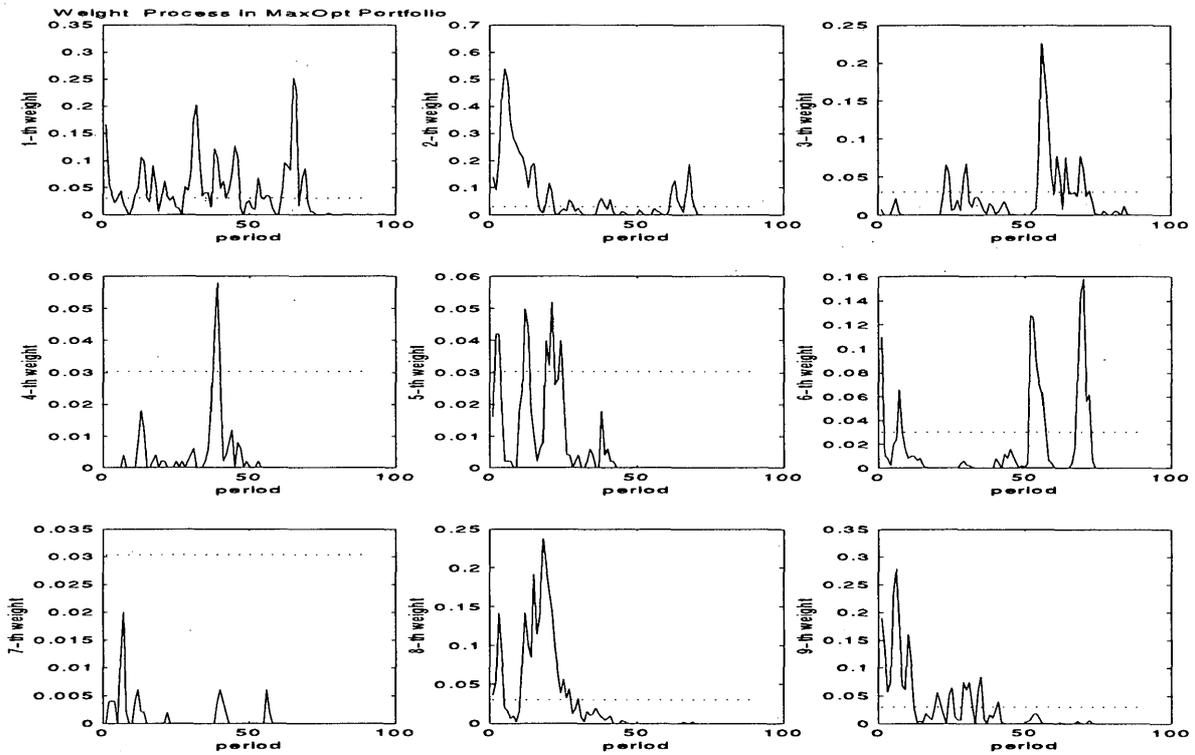


図 5: Weight processes of (1-9)-th indices among 33 Japanese industry indices in the quantile-hedging of max-option portfolio, where investment period is 198305-199305.

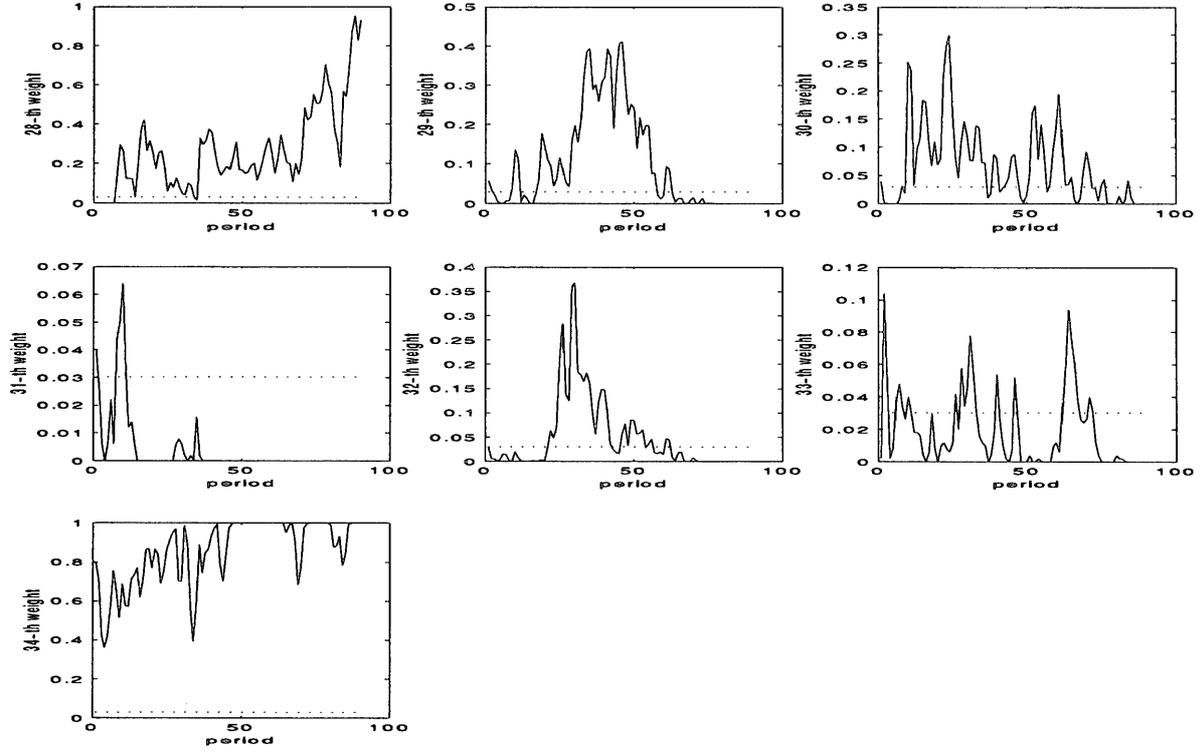


図 6: Weight processes of (28-33)-th indices among 33 Japanese industry indices and weight process of the risk-free asset (34-th one) in the quantile-hedging of max-option portfolio, where investment period is 198305-199305.

### 3 下方, 上方確率の最適化

前節では, 下方の損失額を最小にする最適化問題を考察したが, ここでは, 金額でなく確率を最適化する問題を考察する。

#### 3.1 Maximization of upside-chance probability and minimization of the downside-loss probability

以下は Sekine(1999)[14] で紹介された問題に対して, Karatzas-Cvitanic(1999)[4], Spivak-Cvitanic(1998)[16] で示されたような Legendre-Fenchel 変換を使った別証を与える。その他, 幾つかの発展的ケース, trading strategy の explicit な計算法, 具体的な計算例を付け加える。まず, 最初に, 次のような下方, 上方確率に関する最適化問題を考えよう。

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \left\{ P(X_T \geq H) - \alpha P(X_T < L) \right\}. \quad (10)$$

ここで,  $X_T$  は portfolio の value process ( $X(0) = x$ ) を表し,

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left[ X(t) - \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \right] r(t) dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t) \left[ \mu_i(t) dt + \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(t) dB_k(t) \right] \\ &= r(t)X(t) dt + \pi'(t)(\mu(t) - r(t)\mathbf{1}) + \pi'(t)\sigma(t)dB(t) \\ &= r(t)X(t) dt + \pi'(t)\sigma(t)d\tilde{B}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

$\phi(t) = \sigma^{-1}(\mu(t) - r(t)\mathbf{1})$  とし, Girsanov の定理より,  $\tilde{B}(t) := B(t) + \int_0^t \phi(u) du$  は

$$\rho_t := \frac{d\tilde{P}}{dP} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E} \left( - \int_0^t \phi'(u) dB(u) \right)_t$$

で定義された probability measure  $\tilde{P}$  のもとの  $\mathcal{F}_t$ -Brownian motion である。また,  $\beta(t) := \exp \left( \int_0^t r(u) du \right)$ ,  $\gamma(t) := 1/\beta(t)$  とする。numeraire を  $\beta(t)$  とした discounted form (各確率過程には tilde をつけるものとする) で上の SDE

を書き直すと、

$$d\tilde{X}(t) = \pi'(t)\sigma(t)d\tilde{B}(t) = \pi'(t)\frac{d\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t)}. \quad (12)$$

最適化問題 (10) の  $\mathcal{A}(x)$  は  $x$  からスタートする  $X(t)$  の admissible trading strategy  $\pi$  の全集合とする。最適化問題 (10) で、random variable  $H \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{F}(T), P)$  は target の contingent claim であり、例えば、DAA では、特定の index portfolio や、replicate したい option などを採用すればよいであろう。 $H$  だけなら Karatzas-Cvitanic(1999)[4] で既に解かれているが、ここでは、 $L$  として、例えば、riskfree asset の terminal valueなどを想定し、それより下に value が下落した場合に penalty が課されるような、いわゆる、upside chance と downside risk を併せて考える問題になっている点が特徴的である。 $H$  だけの問題に比べて、 $\{\omega | L(\omega) > X(\omega) > H(\omega)\}$  のときなどに、portfolio value が  $L$  より上に、最適化の結果、引き戻される効果が期待できる。

以下では、Sekine(1999)[14] とは別の duality approach を使った証明を与える。 $P(X_T < L) = 1 - P(X_T \geq L)$  であるから、最適化問題 (10) は、 $\max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \{P(X(T) \geq H) + \alpha P(X(T) \geq L)\}$  と同等であり、更に、 $Z := H - X$  とし、 $Z$  で表すと

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \{P(Z < 0) + \alpha P(Z < H - L)\} \quad (13)$$

となる。 $F(z) := 1_{\{z \leq 0\}} + \alpha 1_{\{z \leq \hat{H}\}}$  に対して、次の  $\mathcal{F}(T)$ -measurable Legendre-Fenchel 変換

$$\tilde{F}(\zeta) := \max_{z < \hat{H}} \{1_{\{z \leq 0\}} + \alpha 1_{\{z \leq \hat{H}\}} + \zeta z\}, \quad 0 < \zeta \leq \infty \quad (14)$$

を考える。ここで  $\hat{H} := H - L$ 。この最大値は、

$$\tilde{F}(\zeta) = (1 + \alpha) \vee \{\zeta \hat{H} + \alpha\} \vee \zeta H$$

であり、各最大値が達成される  $Z$  の値を求め、 $X$  についてまとめると、いずれか 1 点で最大値が達成されるものは

$$\begin{aligned} H - (H 1_{A(\zeta)} + \hat{H} 1_{B(\zeta)} + 0 1_{C(\zeta)}) &= H(1 - 1_{A(\zeta)} - 1_{B(\zeta)}) + L + L 1_{B(\zeta)} \\ &=: H 1_{\hat{A}(\zeta)} + L 1_{B(\zeta)} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} A(\zeta) &:= \{\zeta L > \alpha, \zeta H < 1 + \alpha\}, \\ B(\zeta) &:= \{\zeta L \leq \alpha, \zeta \hat{H} \geq 1\}, \\ C(\zeta) &:= \{\zeta \hat{H} < 1, \zeta H < 1 + \alpha\}, \\ \hat{A}(\zeta) &:= \{\zeta H < 1 + \alpha, \zeta \hat{H} < 1\}. \end{aligned}$$

$X^*(\zeta)$  を構成するものは、その他に 2 点或いは 3 点で最大値を達成するものであり、これらをすべて考慮すると、

$$\begin{aligned} X^*(\zeta) &= H 1_{\hat{A}(\zeta)} + L 1_{B(\zeta)} \\ &\quad + \hat{H} 1_{\{E \cap \{\zeta \hat{H} = 1, \zeta H < 1 + \alpha\}\}} + H 1_{\{F \cap \{\zeta H = 1 + \alpha, \zeta \hat{H} < 1\}\}} \\ &\quad + \{\hat{H} 1_{\{F \cap \{\zeta L = \alpha, \zeta H > 1 + \alpha\}\}} + H 1_{\{F^c \cap \{\zeta L = \alpha, \zeta H > 1 + \alpha\}\}}\} \\ &\quad + \{\hat{H} 1_{\{H_1 \cap \{1 + \alpha = \zeta \hat{H} + \alpha = \zeta H\}\}} + H 1_{\{H_2 \cap \{1 + \alpha = \zeta \hat{H} + \alpha = \zeta H\}\}}\}. \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで、 $E, F, H_1, H_2 \in \mathcal{F}_T$ 。  $\tilde{\rho}_t := \gamma(t)\rho_t$  とし、上式の  $\zeta$  を  $\zeta \tilde{\rho}_T$  とすると、Legendre-Fenchel 変換の式から、

$$F(Z(T)) \leq \tilde{F}(\zeta \tilde{\rho}_T) - \zeta \tilde{\rho}_T Z(T), \quad \text{a.s.}$$

が得られる。両辺の期待値をとると、

$$\begin{aligned} \max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \{P(X(T) \geq H) + \alpha P(X(T) \geq L)\} &\leq \mathbf{E}[\tilde{F}(\zeta \tilde{\rho}_T)] - \zeta \mathbf{E}[\tilde{\rho}_T(H - X(T))] \\ &\leq \mathbf{E}[\tilde{F}(\zeta \tilde{\rho}_T)] - \zeta(H(0) - x) =: G(\zeta) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここで、第 2 の不等式は  $(\tilde{X}(t))_t$  が  $\tilde{P}$ -supermartingale であることによる。式 (16) の右辺を最小にする  $\zeta$  の値を  $\hat{\zeta}$  と書くこととする。式 (16) の等号は、このとき、 $\mathbf{E}[X^*(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)] = x$  で成立し、最適化後の目的関数の値は

$$\begin{aligned} &\max_{\pi} \{P(X \geq H) + \alpha P(X \geq L)\} \\ &= \mathbf{E}[\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T H 1_{A(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)} + (\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T \hat{H} + \alpha) 1_{B(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)} + (1 + \alpha) 1_{C(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)}] - \hat{\zeta} \mathbf{E}[\tilde{\rho}_T(H - X)] \\ &= \mathbf{E}[(1 + \alpha) 1_{C(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)} + \alpha 1_{B(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)}] - \hat{\zeta} \{ \mathbf{E}[\gamma_T(H 1_{\hat{A}(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)} + 1_{B(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)})] - x \} \\ &= \mathbf{E}[1_{C(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)} + \alpha(1_{B(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)} + 1_{C(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)})] \end{aligned} \quad (17)$$

となる。この証明では  $H(\omega) \geq L(\omega)$  (on  $\mathcal{F}_T$ ) は、その候補を適当に選ぶ際に、必ずしも満たされている必要はない。

trading strategy は Malliavin calculus (Clark-Karatzas-Ocone formula, See Karatzas-Shreve(1998) [8]) を援用すると、以下のように portfolio の価値過程の計算を経ずに、直接、求めることができる。

$$\tilde{\mathbb{E}}[\dot{X}^*(T)|\mathcal{F}_t] = x + \int_0^t \tilde{\mathbb{E}}[D_u \dot{X}^*(T)|\mathcal{F}_u] d\tilde{B}_u. \quad (18)$$

ここで、次式

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}[D_u \dot{X}^*(T)|\mathcal{F}_u] &= \tilde{\mathbb{E}}[D_u \dot{H}_T 1_{A(\hat{\zeta}\hat{\rho}_T)} + \alpha D_u \dot{L}_T 1_{B(\hat{\zeta}\hat{\rho}_T)} | \mathcal{F}_u], \\ d\tilde{B}(u) &= \sigma^{-1} \frac{d\tilde{S}(u)}{\tilde{S}(u)} \end{aligned}$$

に注意すると、当該の  $H$  と  $L$  に対して Malliavin derivatives の計算を更に進めて、最後は高次の分布関数か、単純な多重積分の Monte Carlo 計算に帰着させ、trading strategy を explicit に LDS を使って求めることが可能である。 $H = (S(T) - K)^+$  なら  $\mathbb{E}[D_u H_T 1_A | \mathcal{F}_u] = \mathbb{E}[D_u S_T 1_{\{S(T) > K\}} 1_A | \mathcal{F}_u] = \mathbb{E}[\sigma S(u) 1_{\{u \leq T\}} 1_{\{S(T) > K\}} 1_A | \mathcal{F}_u]$ , 第 2 節の maximum option の場合なら、 $H = \vee_i S_i(T)$  に対して  $\mathbb{E}[D_u H_T 1_A | \mathcal{F}_u] = \sum_i \sigma_{ik} \mathbb{E}[V_{j \neq i} S_j(u) 1_{\{u \leq T\}} 1_A | \mathcal{F}_u]$  のように計算できる。

簡単に具体的計算ができる例として、Black-Scholes economy での call option  $H = (S(T) - K)^+$  を取り上げてみよう。

$$\begin{aligned} \rho_T &:= \frac{d\tilde{P}}{dP} |_{\mathcal{F}_T} = e^{-\phi B_T - \frac{1}{2}\phi^2 T}, \\ \phi &:= \sigma^{-1}(\mu - r), \beta_t := e^{rt}, \gamma_t := \frac{1}{\beta_t}, \tilde{\rho}_t := \gamma_t \rho_t \end{aligned}$$

とし、

$$\begin{aligned} A(\hat{\zeta}\hat{\rho}_T) &= \{\hat{\zeta}\hat{\rho}_T H < 1 + \alpha, \hat{\zeta}\hat{\rho}_T \hat{H} < 1\}, \\ B(\hat{\zeta}\hat{\rho}_T) &= \{\hat{\zeta}\hat{\rho}_T L < \alpha, \hat{\zeta}\hat{\rho}_T \hat{H} \geq 1\}, \end{aligned}$$

で、call option payoff  $H = (S(T) - K)^+$ , floor として money market account  $L = \beta_T$  を選ぶ。そのとき、quantile hedge による time  $t$  の call option premium は

$$\begin{aligned} C(t) &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\beta_t}{\beta_T} H 1_{A(\hat{\zeta}\hat{\rho}_T)} | \mathcal{F}_t\right] + \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{\beta_t}{\beta_T} H 1_{B(\hat{\zeta}\hat{\rho}_T)} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= S(t) \{N_1(z_K \vee z^A - \sigma\sqrt{\tau}) - N_1(z_K - \sigma\sqrt{\tau})\} \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \{N_1(z_K \vee z^A) - N_1(z_K)\} \\ &\quad + \{N_1(z_H^B \vee z_H^B) - N_1(z_K)\} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。ここで、 $\tau := T - t$ .

$$\begin{aligned} H(z) &:= S(t) e^{\sigma\sqrt{\tau}z - \frac{1}{2}\sigma^2\tau} - K e^{-r\tau}, \\ \rho^{-1}(z) &:= e^{\phi\sqrt{\tau}z - \frac{1}{2}\phi^2\tau} \end{aligned}$$

とすると、 $z_K$  は  $H(z) = 0$  の解。また、 $z_H^A, z_H^A$  はそれぞれ  $\gamma_T H(z) = \rho_T^{-1}(z)(1 + \alpha)/\hat{\zeta}$ ,  $\gamma_T H(z) - 1 = \rho_T^{-1}(z)/\hat{\zeta}$  を満たす解、 $z_L^B, z_H^B$  はそれぞれ  $1 = \rho_T^{-1}(z)\alpha/\hat{\zeta}$ ,  $\gamma_T H(z) - 1 = \rho_T^{-1}(z)/\hat{\zeta}$  を満たす解である。

本節の最適化問題は、更に、多段階の損失 ( $L_1 > L_2 > \dots > L_n$ ) の確率にペナルティを課した項を付け加えた、次の問題に拡張可能である。

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \{P(X \geq H) - \sum_{i=1}^n \alpha_i P(X < L_i)\}. \quad (20)$$

少し書き直すと

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \{P(X \geq H) + \sum_{i=1}^n \alpha_i P(X \geq L_i)\}.$$

$Z := H - X$ ,  $\hat{H}_{n-i} := H - L_i$  とし、 $F(z) := 1_{\{z \leq 0\}} + \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{\{z \leq \hat{H}_{n-i}\}}$  に対して、次の  $\mathcal{F}(T)$ -measurable Legendre-Fenchel 変換

$$\tilde{F}(\zeta) := \max_{z < H} \{1_{\{z \leq 0\}} + \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{\{z \leq \hat{H}_{n-i}\}} + \zeta z\} \quad (21)$$

を考える。この最大値は

$$\tilde{F}(\zeta) = (1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i) \vee \{\zeta \hat{H}_n + \sum_{i=1}^n \alpha_i\} \vee \cdots \vee \{\zeta \hat{H}_1 + \alpha_1\} \vee \zeta H$$

であり、各最大値が達成される  $Z$  の値を求め、 $X$  についてまとめると、同時に最大値を達成する表現を除いた部分は

$$X^*(\zeta) = H - \sum_{l=0}^n \hat{H}_l 1_{\{\zeta \hat{H}_l + \alpha_l > (1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i) \vee_{j=1, \neq l}^n (\zeta \hat{H}_j + \sum_{i=1}^j \alpha_i)\}} \quad (22)$$

となる。ここで  $\hat{H}_0 = H$  とした。このとき、最適な  $\hat{\zeta}$  は  $\mathbf{E}[X(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)] = x$  から決められ、最適化後の目的関数の値は

$$\max_{\pi} \left\{ P(X \geq H) + \sum_{i=1}^n \alpha_i P(X \geq L_i) \right\} = \mathbf{E}[\tilde{F}(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)] - \hat{\zeta}(H(0) - x) \quad (23)$$

となる。

### 3.2 一般的評価関数による最適利得・損失

前節では上方・下方確率の最適化を取り扱ったが、本節では、確率でなく、利得・損失額の最適化を考察する。次のような最適化問題

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \{U(X \geq H) - \alpha D(X < L)\} \quad (24)$$

で、portfolio の期末のレベル  $H$  を上回る利得を評価関数  $U(\cdot)$  で測った値を最大にし、レベル  $L$  を下回る損失を評価関数  $D(\cdot)$  で測った値をペナルティの形で入れて最小化する問題を考えよう。この問題で、 $L$  が無い場合は、第2節の実証で扱ったものである。 $Z = H - X$  とし、 $F(z) := U(z \leq 0) - \alpha D(z \leq \hat{H})$  に対して、次の  $\mathcal{F}(T)$ -measurable Legendre-Fenchel 変換

$$\tilde{F}(\zeta) := \max_{Z \leq \hat{H}} \{U((- \hat{H} - z)^+) - \alpha D(z^+) + \zeta z\} \quad (25)$$

を考える。ここでは、実際には、Föllmer-Leukert(1998)[6]で取り扱われたような、 $U(x) = x^u (u \leq 1)$ ,  $D(x) = x^d (d \geq 1)$  などの形を念頭に置いている。 $U'(x), D'(x)$  の逆関数をそれぞれ  $I_U(y), I_D(y)$  と表すことにする。 $Z_H^* = -\hat{H} - I_U(\zeta)$ ,  $Z_L^* = I_D(\frac{\zeta}{\alpha})$ , そして

$$\begin{aligned} u_H^*(\zeta) &:= U((- \hat{H} - Z_H^*)^+) + \zeta Z_H^*, \\ u_L^*(\zeta) &:= -\alpha D(Z_L^{*+}) + \zeta Z_L^*, \quad \text{if } Z_L^* \leq L, \\ \bar{u}_L(\zeta) &:= -\alpha D(L) + \zeta L, \quad \text{if } Z_L^* > L, \end{aligned} \quad (26)$$

とすると、目的関数の最大値を達成する確率変数  $X^*$  に関して、同時に最大値を達成する部分を除いた表現は、次のようになる。

$$\begin{aligned} X^*(\zeta) &= -Z_H^* 1_{\{u_H^*(\zeta) > u_L^*(\zeta) 1_{\{Z_L^* \leq L\}} + \bar{u}_L(\zeta) 1_{\{Z_L^* > L\}}\}} \\ &\quad - Z_L^* 1_{\{Z_L^* \leq L, u_H^*(\zeta) < u_L^*(\zeta)\}} + L (1 - 1_{\{Z_L^* > L, u_H^*(\zeta) < \bar{u}_L(\zeta)\}}) \end{aligned} \quad (27)$$

最適化後の目的関数は

$$\mathbf{E}[u_H^*(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T) \vee (u_L^*(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T) 1_{\{Z_L^* \leq L\}} + \bar{u}_L(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T) 1_{\{Z_L^* > L\}})] - \hat{\zeta}(L_0 - x). \quad (28)$$

最適な  $\hat{\zeta}$  は確率変数  $X^*$  の期待値が  $\mathbf{E}[X^*(\hat{\zeta} \tilde{\rho}_T)] = x$  を満たすように決められる。

## 4 Drift の推定

Perfect hedge の場合は必要なかったが、quantile hedge の場合、それを実装する際に、drift の推定が必要である。ここでは、ひとつの可能性として Bayes 統計に基づく方法を紹介する。分散・共分散行列が既知として、不確実

な drift の推定に関して、まず、drift に関する事前情報に基づく prior distribution を用意する<sup>4</sup>。Sekine(2000)[15] では drift について上下限の情報が付与されているような状況が考察されたが、それは以下で述べるように、drift に truncated prior distribution を課す設定に似ている。Bayes 統計に基づく方法では、時間とともに、情報が開示されるにつれて、その feedback が data density(likelihood function) を通じて posterior distribution に反映される構造になっている。これは、Bayes の公式から、posterior distribution は prior distribution に現在までに得られている観測データから作られる data density を掛けて得られるという基本定理による。

DAA では investment horizon に至る途中の適当な時期に、通常、rebalance を行うが、その際の drift の推定を、その時点の drift の posterior distribution から得られた量を用いて行おうというのが、ここでの一つの提案である。近年、MCMC (Markov Chain Monte Carlo) の技術が発展しており、それを適用して、drift の推定、または一期先 (または数期先) の drift の予測などが利用可能である。risk に関する covariance についても、同様に posterior distribution を生成することができるため、更に実証研究の余地はありそうである。

## 4.1 運用者の view の反映

Bayes 統計に基づく portfolio 選択 model には、実務でよく使われている Black-Litterman model[3] や、最近では [2],[11],[12] などがある。Black-Litterman model は投資家の view (prior distribution) が投資の意思決定に反映されるモデルであり、後者の model 群は将来の return を MCMC(Markov-Chain-Monte-Carlo) などにより生成するものである。

個々の return は  $\mathbf{r}_t = \mathbf{S}_t/\mathbf{S}_{t-1} - 1 \sim N_n(\mu\Delta t, (\sigma\sigma')\Delta t)$ 。以下の記述は、 $\Delta t = 1$  とし、

$$\mathbf{r}_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim i.i.d.N(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (29)$$

を仮定する。

Bayes 統計では、parameter  $\Theta = (\mu, \Sigma)$  に不確実性があると見做し、ある一定の分布に従うと仮定する。 $\Theta$  に関する情報量に応じて、通常、以下のような prior を用いる。

- 何も情報がない場合: diffuse prior distribution;  $p(\mu, \Sigma) = p(\mu)p(\Sigma)$ ,  $p(\mu) = \text{constant}$ ,  $p(\Sigma) \propto |\Sigma|^{-(n+1)/2}$
- return に関して何らかの情報に基づく予想値を持ち得る場合:  $p(\mu, \Sigma) = p(\Sigma)p(\mu|\Sigma)$ ,  $p(\mu|\Sigma)$  に期待 return の予想値とそれらの確信度を入れた normal distribution を想定する。上下限が予想できるのであれば truncated normal distribution などでもよい。  $p(\Sigma)$  は diffuse prior か Inverse Wishart distribution など。

その他に、Black-Litterman model では、均衡 return の概念のもとに、risk-return の線形関係を想定したり、asset の構成比率に順序構造を入れたりするなど、幾つかの prior の設定の仕方が提案されている。

## 4.2 MCMC による推定

parameter set  $\Theta = (\mu, \Sigma)$  に  $H$  期先の return  $\{\mathbf{r}_{T+s}\}_{s=1}^H$  を付け加え、これらの同時 posterior distribution を、観測された data set  $\{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T$  に基づき、適当な prior を仮定し、MCMC(Gibbs sampling) により生成する [2],[11],[12]。

まず、parameter set を初期化し、以下の手順を安定な値が抽出されるまで繰り返し ( $s = 1, 2, \dots$ )、所望の posterior distribution に到達する。

- (1)  $\mu^{(s)} \sim p(\mu|\Sigma^{(s-1)}, \{\mathbf{r}_{T+t}^{(s-1)}\}_{t=1}^H; \{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T)$
- (2)  $\Sigma^{(s)} \sim p(\Sigma|\mu^{(s)}, \{\mathbf{r}_{T+t}^{(s-1)}\}_{t=1}^H; \{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T)$
- (3)  $\{\mathbf{r}_{T+t}^{(s)}\}_{t=1}^H \sim p(\{\mathbf{r}_{T+t}\}_{t=1}^H|\mu^{(s)}, \Sigma^{(s)}; \{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T)$

$\Sigma$  の posterior が必要なければ、上記の手順からその phase を外せばよい。また、1 期先の  $\mu$  を rebalance 時に使いたいのであれば、 $H = 1$  とすればよい。

## 5 結び

一般的に、option の DAA 戦略では、investment horizon が長かったり、多資産に依存する payoff を持つとき、そのコストである option premium が高くなり、1 単位の option を買えなくなる。本稿では、その短所の克服と、downside risk に焦点を当てた strategy 構築を目指して、quantile (partial) hedging strategy に基づく DAA の研究を行った。

今後の課題としては

<sup>4</sup>そのような設定は、幾つかの理由から実務的に好まれている。

- \* その他の quantile hedging strategy での実証
  - \* MCMC と組み合わせたモデルでの実証
- など。

## 参考文献

- [1] Aguilar, O. and M. West, "Bayesian Dynamic Factor Models and Portfolio Allocation", To appear in journal of Business and Economic Statistics.
- [2] Barberis, N., "Investing for the Long Run When Returns Are Predictable", *Journal of Finance* **55**(2000) forthcoming.
- [3] Black, F. and R. Litterman, "Global Portfolio Optimization", *Financial Analysts Journal*, (September-October)(1992) 28-43.
- [4] Karatzas, I. and J. Cvitanic, "On Dynamic Measures of Risk", *Finance and Stochastics*, **3** (1999), 451-482.
- [5] Föllmer H. and P. Leukert, "Quantile Hedging", *Finance and Stochastics*, **3** (1999), 251-273.
- [6] Föllmer H. and P. Leukert, "Efficient Hedging: Cost Versus Shortfall Risk", Humboldt-Universität zu Berlin, Working Paper(1998).
- [7] Johnson, H., "Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **22** (1987), 277-283.
- [8] Karatzas, I. and S. E. Shreve, "Methods of Mathematical Finance", Springer-Verlag (1998).
- [9] Nakamura, N., "Quantile Hedging Strategies for a Defaultable Firm", working paper 1999.
- [10] Niederreiter, H., "Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods", SIAM, 1992.
- [11] Pastor, L., "Portfolio selection and asset pricing models", *Journal of Finance* **55**(2000) 179-223.
- [12] Polson N. and B. Tew, "Bayesian Portfolio Selection: An Empirical Analysis of the S&P500 index 1970-1996", University of Chicago, Working paper, 1997.
- [13] Sekine, J., "On a Robustness of Quantile Hedging: Complete Market's Case", to appear in *JAFEE journal*.
- [14] Sekine, J., "Dynamic Optimal Strategy", TQI seminar document, 1999.
- [15] Sekine, J., "A Note on The Dynamic Measures of Risk", Working paper, Graduate School of Engineering Science, Osaka University, 2000.
- [16] Spivak, G. and J. Cvitanic, "Maximizing the Probability of a Perfect Hedge". 1998, To appear in *Ann. Appl. Probab.*