オプション価格における単調性と凸性

木島 正明
東京都立大学 経済学部

〒192-0397 八王子市南大沢1-1
TEL:0426-77-2323 FAX:0426-77-2304
email:kijima@bcomp.metro-u.ac.jp

概要：オプション価格における単調性と凸性はこれまでにも議論され，多くの有益な結果が得られてきた．本稿では，これらの結果を整理し一般化を図る．

1 ブラック・ショールズ・モデル

安全証券の瞬間的な収益率を一定 $(r > 0)$ とし，配当のない原証券 (危険資産) の価格過程 $S(t)$ は確率微分方程式

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t)dt + \sigma dz(t), \qquad t \in [0,T]; \qquad S(0) = S, \tag{1.1}$$

に従うとする．ここでTは将来のある時点，σはボラティリティで正の定数，$\mu(t)$ は期待収益率である．また，money-market account を

$$B(t,T) = e^{r(T-t)}, \qquad t \leq T, \tag{1.2}$$

で表わし，$B(0,t)$ を**ニューメレール**とする相対価格を

$$S^*(t) = \frac{S(t)}{B(0,t)}, \qquad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

と書く[1]．このとき，$S^*(t)$ は確率微分方程式

$$\frac{dS^*(t)}{S^*(t)} = (\mu(t) - r)dt + \sigma dz(t), \qquad t \in [0,T]; \qquad S^*(0) = S(0) = S,$$

に従う．ここで

$$\sigma dz^*(t) = (\mu(t) - r)dt + \sigma dz(t), \qquad t \in [0,T],$$

[1]以下では，価格cに対して，$B(0,t)$ をニューメレールとする相対価格をc^*で表わす．

で定義される$z^*(t)$を標準ブラウン運動にする確率測度P^*を考えれば[2]，P^*の下で$S^*(t)$は確率微分方程式

$$\frac{dS^*(t)}{S^*(t)} = \sigma dz^*(t), \qquad t \in [0,T]; \qquad S^*(0) = S, \tag{1.4}$$

に従う．したがって，$S^*(t)$はP^*に関して**マルチンゲール**である．

満期T，行使価格Kのヨーロピアン・コール・オプションの価格cを求めよう．これは

$$h(x) = \{x - K\}_+; \qquad \{x\}_+ = \max\{0, x\}, \tag{1.5}$$

を**ペイオフ関数**とするデリバティブである．いま，時点tのコール・オプションの相対価格$C^*(t)$が原証券の相対価格$S^*(t)$で**複製される**とする．すなわち，ある$\theta(t)$が存在し

$$C^*(t) = C^*(0) + \int_0^t \theta(u) dS^*(u), \qquad t \in [0,T], \tag{1.6}$$

と表わされるとする．$S^*(t)$はP^*に関してマルチンゲールなので，(1.6)式の確率積分もマルチンゲールである．満期では(1.5)式から

$$C(T) = \{S(T) - K\}_+, \qquad C^*(T) = \frac{\{S(T) - K\}_+}{B(0,T)}$$

が成り立つので，コール・オプションの時点0における価格は

$$c = C^*(0) = E^*[C^*(T)] = E^*\left[\frac{\{S(T) - K\}_+}{B(0,T)}\right] \tag{1.7}$$

を評価することで得られる．ここでE_t^*はP^*に関する条件付き期待値を表わし，$E^* = E_0^*$とおいた．

ブラック・ショールズ・モデルでは金利とボラティリティが確定的なので，(1.7)式は

$$c = E^*\left[\{S^*(T) - K^*\}_+\right], \qquad K^* = \frac{K}{B(0,T)} \quad (=\text{確定的}) \tag{1.8}$$

となり，$S^*(t)$は(1.4)式からP^*の下で対数正規分布に従う．(1.8)式を評価するために

$$X = \log\frac{S^*(T)}{S^*(0)} = \log\frac{S^*(T)}{S} \sim N\left(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right)$$

とおき[3]，

$$E^*\left[\{S^*(T) - K^*\}_+\right] = E^*\left[S^*(T) 1_{\{S^*(T) \geq K^*\}}\right] - K^* P^*\{S^*(T) \geq K^*\}$$

を考える．ここで1_Aは定義関数で，Aが真のとき$1_A = 1$，偽のとき$1_A = 0$である．Xの密度関数を$f_X(x)$として

$$f_Y(x) = e^x f_X(x), \qquad x \in I\!R, \tag{1.9}$$

[2]このような確率測度の存在はギルサノフの定理から保証される．

[3]$X \sim N(\mu, \sigma^2)$は確率変数Xが平均μ，分散σ^2の正規分布に従うことを表わす．

とおくと[4]，$f_Y(x)>0$かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)dx = E^*[e^X] = \frac{1}{S^*(0)}E_0^*[S^*(T)] = 1$$

であるから$f_Y(x)$は密度関数である．ここで$S^*(t)$はP^*に関してマルチンゲールであることを使った．この密度関数をもつ確率変数をYとすると

$$\begin{aligned} E^*\left[S^*(T)1_{\{S^*(T)\geq K^*\}}\right] &= SE^*\left[e^X 1_{\{Se^X\geq K^*\}}\right] \\ &= S\int_{-\infty}^{\infty} e^x 1_{\{Se^x\geq K^*\}} f_X(x)dx \\ &= S\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{Se^x\geq K^*\}} f_Y(x)dx \ = \ SP^*\{Se^Y \geq K^*\} \end{aligned}$$

となるので，コール・オプションの価格は

$$c = SP^*\{Se^Y \geq K^*\} - K^*P^*\{Se^X \geq K^*\} \tag{1.10}$$

で与えられる．(1.9) 式から，Yの積率母関数は

$$m_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{(t+1)X}] = \exp\left\{\frac{\sigma^2 T}{2}t + \sigma^2 T\frac{t^2}{2}\right\}$$

となるので，Yは正規分布$N(\sigma^2T/2, \sigma^2T)$に従う．以上から，有名な**ブラック・ショールズの公式**

$$c = S\Phi(d) - Ke^{-rT}\Phi(d-\sigma\sqrt{T}), \qquad d = \frac{\log(S/K)+rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \tag{1.11}$$

が得られる．ただし$\Phi(z)$は標準正規分布の分布関数である．

コール・オプションの価格cは(S,T,K,σ,r)の関数である．ブラック・ショールズ・モデルでは，価格cの各パラメータに関する感応度が簡単に計算され，

$$\left\{\begin{array}{lcll} c_S &=& \Phi(d) & >0 \\ c_{SS} &=& \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\phi(d) & >0 \\ c_{SK} &=& -\frac{1}{K\sigma\sqrt{T}}\phi(d) & <0 \\ c_T &=& \frac{S\sigma}{2\sqrt{T}}\phi(d) + Kre^{-rT}\Phi(d-\sigma\sqrt{T}) & >0 \\ c_K &=& -e^{-rT}\Phi(d-\sigma\sqrt{T}) & <0 \\ c_{KK} &=& \frac{S}{K^2\sigma\sqrt{T}}\phi(d) & >0 \\ c_\sigma &=& S\sqrt{T}\phi(d) & >0 \\ c_r &=& KTe^{-rT}\Phi(d-\sigma\sqrt{T}) & >0 \end{array}\right. \tag{1.12}$$

[4]変換 (1.9) をEsscher変換といい，保険プレミアムを算出する代表的な考え方である．Esscher変換の経済学的な意味についてはBühlmann (1983), Iwaki, Kijima and Morimoto (1999) およびそこでの参考文献を参照して頂きたい．

が成立する[5]．ただしc_xは価格cの変数xに関する偏微分，$\phi(d)$は標準正規分布の密度関数を表わす．したがって，たとえば，コール・オプションの価格cは現在の価格Sに関して単調増加で凸，行使価格Kに関して単調減少で凸となる．

2 既存研究のおもな結果

原証券価格$S(t)$において$S(0)=x$のとき$S_x(t)$と書くことにする．リスク中立確率P^*の下で$S(t)$が拡散過程とすれば，$S(t)$は強マルコフ性をもつサンプル・パスが連続な確率過程である．$x<y$に対して

$$\tau = \inf_t \{S_y(t) \le S_x(t)\}, \qquad x<y,$$

とおく（τは停止時）．ここで新しい確率過程

$$\tilde{S}_x(t) = \begin{cases} S_x(t), & 0 \le t \le \min\{T,\tau\}, \\ S_y(t), & \min\{T,\tau\} \le t \le T, \end{cases}$$

を定義すると，$\tilde{S}_x(t)$と$S_x(t)$は同じ確率法則に従う拡散過程である．しかも，すべての時点において

$$\tilde{S}_x(t) \le S_y(t), \qquad t \in [0,T],$$

が成立するので，単調非減少なペイオフ関数$h(x)$をもつデリバティブにおいて

$$E^*\left[\frac{h(\tilde{S}_x(T))}{B(0,T)}\right] \le E^*\left[\frac{h(S_y(T))}{B(0,T)}\right]$$

となり，デリバティブ価格のSに関する単調性が示される．これが Hobson (1998) の coupling 議論による証明の概略である．この議論は金利が確率的な場合にも適用できる．Hobson (1998) は同様の議論を使って，$h(x)$が凸のとき価格のSに関する凸性も示した．これらの結果の別証として，El Karoui et al. (1998) と Bergman et al. (1996) を参照して頂きたい．

デリバティブ価格のSに関する凸性を使うと次の重要な結果が得られる．

命題 2.1 金利を確定的とし，$S_i(t)$を拡散過程とする．ボラティリティにおいて，$\frac{\partial}{\partial x}(x\sigma(x,t))$は有界で連続とし，さらに

$$\sigma_1(x,t) \ge \sigma_2(x,t), \qquad t \in [0,T],$$

[5]導出にあたっては，関係式

$$S\phi(d) = Ke^{-rT}\phi(d-\sigma\sqrt{T})$$

を利用する．

が成立するとする．このとき，ペイオフ関数が凸ならば，ある正規化条件の下でデリバティブ価格に関して$C_1(t) \geq C_2(t)$が成立する．

いま$\sigma_2(x,t)$が正しいボラティリティであったとしよう．ショート・ポジションをもつ投資家がボラティリティを$\sigma_1(x,t)$であると推定し，複製ポートフォリオによりリスクをヘッジしたとする．このとき，命題2.1から，ヘッジ・ポートフォリオの価値はつねに真のデリバティブ価値よりも大きいので，この投資家はショート・ポジションのリスクを完全にヘッジしたことになる．

なお，Bergman et al. (1996) では確率ボラティリティ・モデル(ボラティリティ変動が他の不確実性のソースから生成されるモデル)におけるオプション価格のSに関する単調性と凸性を議論しているが，本稿では省略する．

3 デリバティブの評価方法

ここでは，経路に依存しないペイオフ関数$h(x)$をもつ満期Tのヨーロピアン・デリバティブを考え，その時点tにおける価格を$C(t)$とする．

3.1 リスク中立化法

第1節でブラック・ショールズ公式(1.11)を導いた方法がリスク中立化法である．この項では，確認の意味で一般的な枠組みでリスク中立化法を説明する．

安全証券の瞬間的な収益率を$r(t)$とし，配当のない原証券(危険資産)の価格過程$S(t)$は確率微分方程式

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t)dt + \sigma(t)dz(t), \qquad t \in [0,T]; \qquad S(0) = S, \tag{3.1}$$

に従うとする．また，money-market account を

$$B(t,T) = \exp\left\{\int_t^T r(u)du\right\}, \qquad t \leq T, \tag{3.2}$$

で表わし，$\mu(t), \sigma(t), r(t)$は$\mathcal{F}_t = \sigma\{z(s), s \leq t\}$に適合する確率過程とする．$B(0,t)$をニューメレールとする相対価格を(1.3)で表わすと，

$$\sigma(t)dz^*(t) = (\mu(t) - r(t))dt + \sigma(t)dz(t), \qquad t \in [0,T],$$

で定義される$z^*(t)$を標準ブラウン運動にする確率測度P^*に関して，$S^*(t)$は確率微分方程式

$$\frac{dS^*(t)}{S^*(t)} = \sigma(t)dz^*(t), \qquad t \in [0,T]; \qquad S^*(0) = S, \tag{3.3}$$

に従うことが示される．したがって，正規化条件の下で，$S^*(t)$ は P^* に関してマルチンゲールである．

デリバティブの価格付けもブラック・ショールズ・モデルの場合と同様である．いま，デリバティブの時点 t における相対価格 $C^*(t)$ が原証券の相対価格 $S^*(t)$ で複製されるとする．すなわち，ある $\theta(t)$ が存在し

$$C^*(t) = C^*(0) + \int_0^t \theta(u) dS^*(u), \qquad t \in [0, T], \tag{3.4}$$

と表わされるとする．$S^*(t)$ は P^* に関してマルチンゲールなので，ある条件の下で $C^*(t)$ もマルチンゲールとなり，デリバティブの時点0における価格は

$$C(0) = C^*(0) = E^*[C^*(T)] = E^*\left[\frac{h(S(T))}{B(0,T)}\right] \tag{3.5}$$

を評価することで得られる．特に，コール・オプションの場合には(1.7)式，すなわち

$$c = E^*\left[\{S^*(T) - K^*\}_+\right], \qquad K^* = \frac{K}{B(0,T)} \quad (=\text{確率的 if 金利が確率的}) \tag{3.6}$$

を評価すればよい．

Bergman et al. (1996) は確定的な金利下で次の結果を示した．ここでは Kijima (1999) による別証を与える．

命題 3.1 ペイオフ関数 $h(x)$ は非減少，凸かつ $h(0) = 0$ とする．このとき，価格関数は満期までの時間について非減少となる．

証明：$T_i, i = 1, 2,$ を満期までの長さとし $T_1 < T_2$ とする．また，$c(i)$ を満期以外は同じデリバティブの価格とする．(3.5) から

$$c(i) = E^*\left[\frac{h(S(T_i))}{B(0,T_i)}\right], \qquad i = 1, 2.$$

与えられた条件の下で

$$\frac{h(x)}{k} \geq h(x/k), \qquad k \geq 1,$$

であるから

$$\frac{h(S(T_2))}{B(0,T_2)/B(0,T_1)} \geq h\left(B(0,T_1)S^*(T_2)\right).$$

したがって

$$c(2) \geq E^*\left[\frac{1}{B(0,T_1)} E^*_{T_1}\left[h\left(B(0,T_1)S^*(T_2)\right)\right]\right] \geq E^*\left[\frac{1}{B(0,T_1)} h\left(B(0,T_1)S^*(T_1)\right)\right] = c(1)$$

ただし，2番目の不等号は$\{h(S^*(t)); 0 \le t \le T\}$が$P^*$の下で劣マルチンゲールであることによる($h$は凸関数).

命題3.1はリスク中立化法が適用される限り任意の価格過程に対して成立することに注意．この命題の仮定は，通常のコール・オプションでは成立するがプットでは成り立たない．実際，ブラック・ショールズ式においても，プット・オプションの価格は満期までの長さに関して単調ではない．

命題 3.2 金利だけが異なる2つのデリバティブを考えて，すべての時点において$r_1(t) \ge r_2(t)$とする．このデリバティブの複製ポートフォリオにおいて安全資産を借入れるならば[6]，$C_1(t) \ge C_2(t)$が成立する．

証明：デリバティブ価格$C(t)$が原証券価格$S(t)$と安全資産$B(0,t)$で複製される，すなわち(3.4)式から

$$C_i(t) = C_i(0) + \int_0^t b_i(u)dB_i(0,u) + \int_0^t \theta_i(u)dS(u), \qquad t \in [0,T]; \qquad i = 1,2,$$

が成立するとする．上式の$\theta(u)$は(3.4)式の$\theta(u)$と同じであることに注意(Geman et al. (1995)を参照)．ここで，おのおのの価格過程を$B_1(0,t)$の相対価格で考えると

$$\begin{aligned} C_1^*(t) &= C_1(0) + \int_0^t \theta_1(u)dS^*(u), \\ C_2^*(t) &= C_2(0) + \int_0^t b_2(u)(r_2(u) - r_1(u))B_2^*(0,u)du + \int_0^t \theta_2(u)dS^*(u) \end{aligned}$$

となるが，2つのデリバティブは満期Tでペイオフが一致するので

$$\begin{aligned} &C_1(0) + \int_0^T \theta_1(u)dS^*(u) \\ &\quad = C_2(0) + \int_0^T b_2(u)(r_2(u) - r_1(u))B_2^*(0,u)du + \int_0^T \theta_2(u)dS^*(u) \end{aligned}$$

が成立する．$S^*(t)$はP^*に関してマルチンゲールであり，仮定から$b_2(u) \le 0$かつ$r_1(t) \ge r_2(t)$なので，上式の両辺に期待値をとれば

$$C_1(0) = C_2(0) + \int_0^T E^*[b_2(u)(r_2(u) - r_1(u))B_2^*(0,u)]du \ge C_2(0)$$

が得られる．以上の議論は任意の時点tにも適用される．

3.2 フォワード中立化法

時点tにおける満期Tの(信用リスクのない)割引債価格を$v(t,T)$とし，$v(t,T)$はリスク中立確率P^*に関して確率微分方程式

[6]たとえば，通常のコール・オプションでは安全資産をショートする．

$$\frac{dv(t,T)}{v(t,T)} = r(t)dt + \eta_v(t,T)dz_v^*(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3.7}$$

に従うとする[7]．ただし$r(t)$は(確率的な)瞬間的スポット・レートで

$$r(t) = -\lim_{T\to t}\frac{\ln v(t,T)}{T-t} = -\frac{\partial}{\partial T}\ln v(t,T)\Big|_{T=t}$$

で与えられる．また，(配当のない)原証券価格は確率微分方程式

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \eta_S(t)dz_S^*(t), \qquad t \in [0,T]; \qquad S(0) = S, \tag{3.8}$$

に従うとし，P^*に関する標準ブラウン運動$z_v^*(t)$, $z_S^*(t)$には相関があってもよいとする．

割引債価格$v(t,T)$をニューメレールとする証券の相対価格を

$$S^T(t) = \frac{S(t)}{v(t,T)}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3.9}$$

とする．$S^T(t)$は$S(t)$の満期Tの**先渡価格**である[8]．前項で説明したリスク中立化法と同様に，ある確率測度P^Tに関して標準ブラウン運動$z^T(t)$が存在し，先渡価格は

$$\frac{dS^T(t)}{S^T(t)} = \sigma_T(t)dz^T(t), \qquad t \in [0,T]; \qquad S^T(0) = \frac{S}{v(0,T)}, \tag{3.10}$$

と書くことができる[9]．リスク中立確率P^*と異なり，P^Tはニューメレールとして選んだ割引債の満期Tに依存する．(3.10)式より，P^Tは先渡価格をマルチンゲールにする確率測度であるから，P^Tを**フォワード中立確率**と呼ぶことが多い．

さて，フォワード中立化法でも，デリバティブの時点tにおける先渡価格$C^T(t)$を原証券の先渡価格$S^T(t)$で複製することを考える．すなわち，ある$\theta(t)$が存在し

$$C^T(t) = C^T(0) + \int_0^t \theta(u)dS^T(u), \qquad t \in [0,T],$$

と表わされるとする．$S^T(t)$はP^Tに関してマルチンゲールなので，ある正規化条件の下で$C^T(t)$もマルチンゲールとなり，デリバティブの時点0における価格$C(0)$は

$$C^T(0) = E^T\left[C^T(T)\right] = E^T\left[h\left(S^T(T)\right)\right], \qquad C^T(0) = \frac{C(0)}{v(0,T)} \tag{3.11}$$

を評価することで得られる．ただしE_t^TはP^Tに関する条件付き期待値で$E^T = E_0^T$と書いた．(3.11)式において

$$S^T(T) = S(T), \qquad v(T,T) = 1$$

であることに注意されたい．特に，コール・オプションの場合には

$$c^T = E^T\left[\{S(T) - K\}_+\right], \qquad c^T = \frac{c}{v(0,T)} \tag{3.12}$$

となる．(3.6)式ではK^*は確率的であるが，(3.12)式ではKは確定的(行使価格)である．フォワード中立化法の詳細は木島(1999)を参照して頂きたい．

---

[7]観測確率から出発しても同様の議論が展開できるが，その場合にも価格付けが可能(リスク中立確率が存在)であることを確認しなければならない．

[8]以下では，価格cに対して，$v(t,T)$をニューメレールとする相対価格をc^Tで表わす．

[9]金利が確定的な場合には$v(t,T) = B(0,t)/B(0,T)$なので$S^T(t) = B(0,T)S^*(t)$となり，リスク中立化法とフォワード中立化法は本質的に同じである．

4　拡散過程と Total Positivity

この節では，先渡価格$S^T(t)$がP^Tに関して**拡散過程**の場合に，デリバティブ価格のSに関する単調性と凸性をTotal Positivityの理論を使って証明する[10].

いま(3.10)式において，ボラティリティ$\sigma_T(t)$は状態$S^T(t)$と時間tのみに依存し十分なめらかとする．すなわち，先渡価格$S^T(t)$は確率微分方程式

$$\frac{dS^T(t)}{S^T(t)} = \sigma(S^T(t), t)dz^T(t), \qquad t \in [0, T]; \qquad S^T(0) = \frac{S}{v(0,T)}, \tag{4.1}$$

に従い，その解は存在するものとする．また，拡散過程$S^T(t)$の推移密度関数を

$$p_t(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} P^T\{S^T(t) \le y | S^T(0) = x\}, \qquad x,\, y \ge 0,$$

とする．

定義 4.1　1. 実数値関数$K(x,y)$がTP_r (totally positive of order r)であるとは，すべての$m = 1, 2, \cdots, r$とすべての$x_1 < x_2 < \cdots < x_m$，$y_1 < y_2 < \cdots < y_m$に対して

$$\det \begin{pmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \cdots & K(x_1,y_m) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \cdots & K(x_2,y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_m,y_1) & K(x_m,y_2) & \cdots & K(x_m,y_m) \end{pmatrix} \ge 0$$

2. すべてのrに対してTP_rであるとき，$K(x,y)$はTP (totally positive)であるという．

Karlin (1964, p58)によると次の結果が成立する．これは，拡散過程が出生死滅過程の極限であることから示される．

補題 4.1　$X(t)$を強マルコフ過程とし，その推移密度関数を$p_t(x,y)$とする．このとき，次の3条件は同値である[11].

1. すべてのtに対して$p_t(x,y)$はTP_2
2. すべてのtに対して$p_t(x,y)$はTP
3. $X(t)$のサンプルパスは連続

系 4.1　拡散過程の推移密度関数$p_t(x,y)$において

[10] Total Positivityの詳細についてはKarlin (1968)を，よく使われる部分の概略についてはKijima (1997)の付録Cを参照して頂きたい．

[11] Kijima (1998)によると，(離散状態)マルコフ連鎖では，ある条件の下で推移分布関数$P_t(x,y)$がTP_2であることと$X(t)$が下方にジャンプができないことは同値，推移生存関数$\overline{P}_t(x,y)$がTP_2であることと$X(t)$が上方にジャンプができないことは同値である．

$$x_1 < x_2 \text{ ならば } \frac{p_t(x_2, y)}{p_t(x_1, y)} \text{ は} y \text{に関して単調非減少}$$

したがって，$S^T(0) = x$のときの(4.1)の解を$S_x^T(t)$と書けば，$S_x^T(t)$はxに関して確率的に増加，すなわち任意の$K \geq 0$に対して

$$x_1 < x_2 \implies P^T\{S_{x_1}^T(t) > K\} \leq P^T\{S_{x_2}^T(t) > K\}$$

が成立する．

数列$(x_1, \cdots, x_m)$における符号の変化の回数を$S(x_1, \cdots, x_m)$で表わすことにする．実数上の関数$f(t)$の符号変化の回数は

$$S(f) = \sup S(f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_m)), \qquad t_1 < t_2 < \cdots < t_m,$$

で定義される．ここでsupはすべてのmとすべての可能な数列$(t_1, \cdots, t_m)$に関して取られる．次の結果はVDP (variation-diminishing property)と呼ばれる．

補題 4.2 $K(x, y)$をTP_rとし

$$g(x) = \int K(x, y) f(y) dy$$

とおく．このとき，

1. $S(f) \leq r - 1$ならば$S(g) \leq S(f)$
2. $f(x)$を区分的連続とし$S(f) = S(g) = r - 1$とする．このとき$f(x)$と$g(x)$の符号変化のパターンは同じである．

定理 4.1 $S^T(t)$はP^Tに関して拡散過程とし，デリバティブ価格$C = C(0)$は(3.11)式で与えられるとする．このとき，

1. $h(x)$が単調非減少ならばCはSに関して単調非減少．
2. $h(x)$が凸(または凹)ならばCはSに関して凸(または凹).

証明： 1. $S^T(0) = x$のとき

$$g(x) = E^T\left[h\left(S^T(T)\right) \middle| S^T(0) = x\right] = \int_0^\infty p_T(x, y) h(y) dy$$

とおく．ただし$p_t(x, y)$は拡散過程$S^T(t)$の推移密度関数である．αを任意の実数とし，変換

$$g(x) - \alpha = \int_0^\infty p_T(x, y)\{h(y) - \alpha\} dy$$

を考える．$h(x)$が単調非減少ならば，任意のαに対して$h(y)-\alpha$の符号は高々1回だけ変化し，その変化のパターンは$(-,+)$である．推移密度関数$p_T(x,y)$はTP_2なので，補題4.2から$g(x)-\alpha$も同様であり，したがって$g(x)$はxに関して単調非減少である．

2. ペイオフ関数$h(x)$が凸の場合には

$$h(x)-\alpha_1 x-\alpha_2, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in I\!R,$$

の符号は高々2回だけ変化し，2回変化する場合の符号変化は$(+,-,+)$である．また，$S^T(t)$はP^Tに関してマルチンゲールなので

$$\int_0^\infty y p_T(x,y)dy = E^T\left[S^T(T)\right] = S^T(0) = x$$

が成立し，

$$g(x)-\alpha_1 x-\alpha_2 = \int_0^\infty p_T(x,y)\{h(y)-\alpha_1 y-\alpha_2\}dy$$

が得られる．$p_T(x,y)$はTP_3なので，補題4.2から$g(x)-\alpha_1 x-\alpha_2$の符号も高々2回だけ変化し，2回変化する場合の符号変化のパターンは同じである．したがって$g(x)$はxに関して凸である．凹の場合も同様．

Kijima (1998) によれば，ジャンプのある価格過程で推移生存関数$\overline{P}_T(x,y)$がTP_2となるモデルを構築でき，この場合には定理4.1と同様にして単調性を示すことができる[12].

5　確率凸順序

この節では命題2.1の別証を確率順序(確率優位)の理論を使って考える[13]．ジャンプのある場合への拡張についてはKijima (1999)を見よ．

$\Delta t>0$を十分小さくとり，(4.1)式を離散化する．離散化された確率過程をX_nとし

$$\sigma_n^X(X_n) = \sigma(S^T(n\Delta t), n\Delta t)$$

とおく．このとき

$$X_{n+1} = X_n + X_n\sigma_n^X(X_n)\Delta_{n+1}^X, \qquad n=0,1,2,\cdots; \qquad X_0 = S^T(0), \tag{5.1}$$

はある正規化条件の下で(拡散過程である)$S^T(t)$に弱収束する．ただしΔ_n^X, $n=1,2,\cdots$,は独立で同一の正規分布$N(0,\Delta t)$に従う確率変数列である．

定義 5.1 2つの確率変数XとYにおいて，Xが凸順序の意味でYよりも大きい($X \geq_{\mathrm{cx}} Y$と書く)とは，すべての凸関数$f(x)$に対して

[12] Bergman, Grundy and Wiener (1996) はジャンプがある場合で価格が単調にならないケースを例示している．

[13] 確率優位の詳細についてはKijima and Ohnishi (1996) を参照して頂きたい．

$$E[f(X)] \geq E[f(Y)]$$

が成立することである[14]．ただし期待値は存在するものとする．

定理 5.1 (5.1)式で定義される2つの離散時点確率過程X_nとY_nにおいて

1. すべてのxとnに対して$\sigma_n^X(x) \geq \sigma_n^Y(x)$

2. $x\sigma_n^X(x)$または$x\sigma_n^Y(x)$のどちらか一方がxに関して凸

が成立するならば，すべてのnにおいて$X_n \geq_{\mathrm{cx}} Y_n$が成立する．ただし$X_0 \geq_{\mathrm{cx}} Y_0$とする．

証明： $f(x)$を任意の凸関数とし，

$$E[f(X_{n+1})] = E\left[E\left[f\left(X_n\left(1+\sigma_n^X(X_n)\Delta_{n+1}^X\right)\right)\middle|X_n\right]\right]$$

を考える．いま

$$g_X(x) = E\left[f\left(x\left(1+\sigma_n^X(x)\Delta_{n+1}^X\right)\right)\middle|X_n = x\right], \qquad x \geq 0,$$

とおく．Δ_{n+1}^XとX_nは独立で，仮定1から

$$\sigma_n^X(x)\Delta_{n+1}^X \geq_{\mathrm{cx}} \sigma_n^Y(x)\Delta_{n+1}^Y$$

なので$g_X(x) \geq g_Y(x)$が成立する．また，

$$\begin{aligned} g_X''(x) &= E\left[\left(1+\left(x\sigma_n^X(x)\right)'\Delta_{n+1}^X\right)^2 f''(X_{n+1})\right] \\ &\quad + \left(x\sigma_n^X(x)\right)'' E\left[\Delta_{n+1}^X f'\left(x\left(1+\sigma_n^X(x)\Delta_{n+1}^X\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.2}$$

であり，$f'(x)$は単調非減少なので$E[\Delta_{n+1}^X f'(x(1+\sigma_n^X(x)\Delta_{n+1}^X))] \geq 0$．したがって，$x\sigma_n^X(x)$が凸ならば$g_X(x)$も凸である．このとき，$X_n \geq_{\mathrm{cx}} Y_n$とすれば

$$E[f(X_{n+1})] = E[g_X(X_n)] \geq E[g_X(Y_n)] \geq E[g_Y(Y_n)] = E[f(Y_{n+1})]$$

となり，$X_{n+1} \geq_{\mathrm{cx}} Y_{n+1}$が示される．$x\sigma_n^Y(x)$が凸の場合も同様．

$\Delta t \to 0$のとき(5.2)の項は$(x\sigma_n(x))'$が有界連続という仮定の下で0に収束するので，定理5.1における2つめの条件は極限では不要である．したがって，この結果から命題2.1が直ちに得られる．

---

[14] $X \geq_{\mathrm{cx}} Y$であることと，YがXよりもRothschild and Stiglitz (1970)の意味でリスキーであることは同値．

6 コール・オプションの価格

この節ではコール・オプションの価格(3.12)の行使価格Kに関する単調性と凸性を考える．ただし先渡価格$S^T(t)$は拡散過程である必要はない．

(3.12)式と(1.8)式はまったく同じ形をしているので，(1.10)式を導いたときと同じ議論を使えば，フォワード中立確率P^Tに関して

$$c^T = S^T(0)P^T\{\tilde{S}^T(T) \geq K\} - KP^T\{S^T(T) \geq K\}, \qquad c^T = \frac{c}{v(0,T)} \tag{6.1}$$

が成立する．ただし，ここでは変換(1.9)ではなく，$\tilde{S}^T(T)$は分布関数

$$P^T\{\tilde{S}^T(T) \leq x\} = \frac{1}{S^T(0)}\int_0^x tdP^T\{S^T(T) \leq x\}, \qquad x \geq 0, \tag{6.2}$$

に従う確率変数とする．このとき，(6.1)式をKで偏微分すると

$$\begin{aligned} c_K^T &= -S^T(0)dP^T\{\tilde{S}^T(T) \geq K\} - P^T\{S^T(T) \geq K\} + KdP^T\{S^T(T) \geq K\} \\ &= -P^T\{S^T(T) \geq K\} \end{aligned} \tag{6.3}$$

が得られる．(6.3)から，市場で観測されるコール・オプションの価格から，フォワード中立確率P^Tに関する価格$S(T)$の確率分布を逆算することができる[15]．(6.3)式は金利やボラティリティに何も仮定をおいていないことに注意されたい．

さらに，$K=0$のとき$c^T = S^T(0)$，$K=\infty$のとき$c^T=0$であるから次の結果が得られる．

定理 6.1 ヨーロピアン・コール・オプションの価格cに関して

$$c = v(0,T)\int_K^\infty P^T\{S^T(T) \geq x\}dx = S - v(0,T)\int_0^K P^T\{S^T(T) \geq x\}dx \tag{6.4}$$

が成立する．したがって，$c_K \leq 0$および$c_{KK} \geq 0$が成り立つ．

(6.4)式から，よく知られた不等式

$$S \geq c \geq \{S - Kv(0,T)\}_+$$

が直ちに得られる．また，系4.1から次の結果が得られる．

系 6.1 c_KはSに関して単調に減少する．

系6.1は，コール・オプションにおけるデルタ・ポジションc_Sは行使価格Kに関して減少することを示しており，Bergman et al. (1996) では金利が確定的な場合にこの結果を示している．

[15]前述のように，cはKに関して単調非増加で凸なので，市場に存在するKの各点で微係数が一致するように，指数スプラインなどを使って滑らかに$P^T\{S(T) > K\}$を推定する必要がある．現在，実証分析を含めて実施中．

References

[1] 木島正明(1999)，期間構造モデルと金利デリバティブ，朝倉書店.

[2] Black, F. and M. Scholes (1973), "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654.

[3] Bergman, Y.Z., B.D. Grundy and Z. Wiener (1996), "General properties of option pricing," *Journal of Finance*, **51**, 1573–1610.

[4] Bühlmann, H. (1983), "The General Economic Premium Principle," *Astin Bulletin*, **14**, 13–21.

[5] Geman, H., N. El Karoui, and J.C. Rochet (1995), "Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing," *Journal of Applied Probability*, **32**, 443–458.

[6] El Karoui, N., M. Jeanblanc-Picqué and S.E. Shreve (1998), "Robustness of the Black and Scholes formula," *Mathematical Finance*, **8**, 93–126.

[7] Hobson, D.G. (1998), "Volatility misspecification, option pricing and superreplication via coupling," *Annals of Applied Probability*, **8**, 193–205.

[8] Iwaki, H., M. Kijima and Y. Morimoto (1999), "An economic premium principle in multiperiod economy," *Insurance: Mathematics and Economics*, tentative.

[9] Karlin, S. (1964), "Total positivity, absorption probabilities and applications," *Transactions of the American Mathematical Society*, **111**, 33–107.

[10] Karlin, S. (1968), *Total Positivity*, Stanford University Press.

[11] Kijima, M. (1997), *Markov Processes for Stochastic Modeling*, Chapman & Hall.

[12] Kijima, M. (1998), "Hazard rate and reversed hazard rate monotonicities in continuous-time Markov chains," *Journal of Applied Probability*, **35**, 545–556.

[13] Kijima, M. (1999), "Monotonicity and convexity of option prices revisited," submitted.

[14] Kijima, M. and M. Ohnishi (1996), "Portfolio selection problems via the bivariate characterization of stochastic dominance relations," *Mathematical Finance*, **6**, 237–277.

[15] Rothschild, M. and J.E. Stiglitz (1970), "Increasing risk: I. A definition", *Journal of Economic Theory*, **2**, 225–243.