

# 無限ゲームについて

大阪府立大学 総合科学部 寺岡義伸

## 1 はじめに

よく知られているように、利害関係の違いにより生じた競争的な場に置かれた2個の行動主体が、どのような計画に基づいて行動するのが合理的であるかを論ずる数学的理論がゲームの理論と言えよう。2個以上の行動主体が競争的状态にある例は、我々の日常生活のあらゆる場面で遭遇し、そしてこれら競争の問題は、碁や将棋あるいはトランプといった室内ゲームに類似していることに着目されたことから、この理論がゲームの理論と名付けられたことも周知の事実である。

1921年のE.Borelによる戦略の概念の導入、1928年のJ.Von Neumannによるmin-max定理の発見を発火点とし、1944年のJ.Von NeumannとO.Morgensternによる大著「ゲームの理論と経済行動」(Theory of Games and Economic Behavior)の発行により、ゲームの理論はこの世に誕生した。この理論は当初理論経済学の再編を目指して世に問われたが、純粋数学・統計学・計画科学・制御理論…と多くの分野に大きな刺激を与え、理論自体も着実な進歩を遂げてきた。この間ゲームの理論の専門誌International J.Game Theory、Game Theory and Economic Behavior、International Game Theory Review、Game Theory and Application、…が発行され、R.J.Aumannが中心として編集しまとめたゲームの理論のあらゆる分野の集大成Handbook of Game Theory with Economic Applicationsが刊行され、この方面を志す研究者達への大きな燈台も確立された。

このようにまとめてみるとゲームの理論の進歩はまさに順風満帆の歴史のように見えるが、その発生の当初期待された程の発展を遂げたかについては疑問と反省がある。ある分野では、役に立たない理論の典型であるとか、1つの哲学として考えればよいとまで言われてきた。特に経済学にあっては、役に立と考えられて開発させられてきたテーマが案外に役立たず、今1つと思われた結果が役に立っているといったような現象が見られ、更には、理論経済学がゲームの理論で再編できる程経済の動きは単純ではないとまで言われている。また、若い時ゲームの理論に夢を描き、研究の道に入った研究者達の中に、途中から疑問を持ちはじめ、他の分野へ転向した人達も少なくない。転向まではしなくても研究は続けながら疑問と反省に悩み2足の草鞋をはいている人も結構多いように思われる。しかし、このような悩みがありながらもゲームの理論は着実に進歩している。

さてここで、ゲームの理論で発展した分野を詳細に調べ、代表的なテキスト、例えばG.OwenのGame TheoryやL.C.ThomasのGame Theory and Applications、あるいは鈴木光男のゲーム理論入門に目を通すと、この発達にはある種の偏りがあることに気がつく。特に、1960年前後に発行された英文のS.KarlinやM.Dresherによるテキスト、あるいはそんなに古くはないが日本語の坂口実や西田俊夫のテキストと比較すると、はっきりと見えてくる。その偏りとは、ゲームを構成するプレイヤー全員の各々に許された純戦略全体の集合が有限集合であるゲーム、有限ゲームに土台を置きその上での様々な展開、即ち、多段ゲームやくり返しゲーム、あるいは方向を変えて特性関数や配分に関する各種の概念を議論しているということである。もちろんその導入部分においては、少なくとも1人のプレイヤーの純戦略全体の集合が無限集合としてもかまわないとしてある。しかし、細かな内容に一步踏み込むとそうではない。無限ゲームは大き

く遅れている。最近出版された G.Owen のテキストははっきりと離散型のゲームで統一しているという話を耳にする。

このような結果に至った原因としては、以下のようなことが考えられる。

- (1) 歴史的に有名な min-max 定理は 2 人 0 和有限ゲームすなわち行列ゲームに対して与えられた。そしてこの定理を基にして方向を  $n$  人ゲーム転化し特性関数型のゲームを展開していった。
- (2) その後の追従者達は min-max 定理の拡張を試み、まずその出発点としてプレーヤにとって許された純戦略全体が可算無限個の集合となっている場合を対象としたが、数学的に何ら面白い結果は出なかった。
- (3) 次の対象として、純戦略全体の集合がコンパクト集合であり、利害関係も連続関数となっている場合、行列ゲームの自然な拡張としての min-max 定理が成立する。しかしながら、応用上我々がよく出会うゲームは利害関係に不連続点をもつ場合が多い。また、行列ゲームでは線形計画法に変換する一般的解法が確立しているが無限ゲームにおいては、一般的解法が確立されておらず、あたかも常微分方程式の解法のようにその問題その問題に応じて工夫しなければならない。
- (4) 利得関係が不連続点をもつゲームのあるクラスにあつては、恒等子法や不動点法といった解法があるが、そのモデルが我々の生活になじまなく見られ研究者数が多くない。特にタイミングのゲームでは、Karlín や Drescher 等の先駆的研究があるが、そのモデルがあまりにも生々しい為、特に日本では「そんな研究をやってもらっては困る…」といった声まであった。
- (5) 非 0 和ゲームに目を向けても理論面では 2 人 0 和ゲームとほぼ同様の定理が成立している。しかし、Nash 平衡点が無数に存在したりとか情動的に優位なプレーヤが必ずしも有利とはならない例が続出したりとか多くの問題点が発生している。Selten による Nash 平衡点の見直しも有限ゲームを対象にしたものであり、無限ゲームに特有な困難も解決されねばならないままで多く残されている。

無限ゲームが大きく遅れているという現状に対してその主な原因を並べたが、一方応用の面から眺めると、探索ゲーム、入札ゲーム、タイミングのゲーム、配置ゲーム、競争的在庫、ポーカーゲーム、縄張りの持久戦… 数え上げると限りがないほど多くの展開がある。実際イザ現実の問題を扱うとなると無限ゲームとして定式化される問題の方がはるかに多く存在する。

本稿では、無限ゲームには数学的に観て多くの困難が残されているにもかかわらず、まだまだ研究の対象となる興味深い分野であることを紹介したい。

## 2 数学理論としての無限ゲーム

前節でも解説したように、2 人 0 和ゲームに対する min-max 定理の直ぐ考えられる拡張としては、無限行列ゲームへの拡張であろう。しかし、次の 2 つの例で示すように min-max 定理は絶望的である。

例 2.1. 下記の  $a_{ij}$  によって規定される無限行列ゲームを考えよう：

$$a_{ij} = \frac{i-j}{\sqrt{1+(i-j)^2}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \dots)$$

この時

$$\sup_x \inf_y M(x, y) = -1 < 1 < \inf_y \sup_x M(x, y),$$

ここに

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_\infty = \{[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots] \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, x_i \geq 0\},$$

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} x_i y_j.$$

■

例 2.2. 次の  $a_{ij}$  によって規定される無限行列ゲームを考える：

$$a_{ij} = i - j.$$

この時

$$x_i = \begin{cases} \frac{1}{2^i}, & i = 2^k, k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{j}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ij} = +\infty$$

対称性より、II についても同様。

■

加算個の純戦略をもつゲームにおいては、こうしたこと以外ほとんど興味ある議論は出てこないと言っても過言ではない。そうなるかどうかのような拡張が考えられるであろうか。

ここで、 $\{X, Y, M(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$  を 2 人 0 和ゲームとすると、無限ゲームへの自然な拡張としては、 $X$  と  $Y$  が有限次元でない凸集合となっている場合が考えられる。具体的には

- (a) Euclid 空間の中にある集合の上での確率測度全体。
- (b)  $(0, \infty)$  で定義された非負可積分関数  $\phi(t)$  で  $\int_0^\infty \phi(t) dt \leq \alpha$  を満足するもの全体
- (c) 関数成分の Vector  $[\phi(t), \dots, \phi_m(t)]$  で  $0 < \phi_i(t) < 1$  ( $0 \leq t \leq 1; i = 1, \dots, n$ ) を満足するもの全体

等、色々と対象になってくる。

先にも説明したように、2 人 0 和無限ゲームでは

$$\max_{\mathbf{x} \in X} \min_{\mathbf{y} \in Y} M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in Y} \max_{\mathbf{x} \in X} M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

という形の min-max 定理は、もはや一般には成立しない。そこで  $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  の連続性や、 $X$  または  $Y$  の少なくとも一方についてある適当な意味でのコンパクト性が仮定されるとうまくいきそうである。しかしもっと弱い形で

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \inf_{\mathbf{y} \in Y} M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{y} \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

が成立する場合があると言うべきであろう。

さて、Player I、II の純戦略全体の集合が共に  $[0, 1]$  で、利得関数  $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  が各  $\mathbf{y}$  に対して  $\mathbf{x}$  につき concave であり、かつ、各  $\mathbf{x}$  に対して  $\mathbf{y}$  につき convex であるゲームを凹-凸ゲームと呼んでいるが、このゲームは、最適戦略をもつ。

**定理** 凹-凸ゲーム  $M(x, y)$  が連続であるとする、純戦略の中で最適戦略、すなわち鞍点をもつ。 ■

注：凹-凸ゲームはその定義により鞍型の利得関数をもっているの上の結果は当然と言える。

そうすると、一般の単位正方形上の連続ゲームではどうなるのであろうか。あるいは  $M(x, y)$  が不連続な場合は…。これらの議論に入る前に単位正方形上のゲームに対しての混合戦略について解説する。

単位正方形上のゲームとは、各プレーヤが  $[0, 1]$  の点として表現される連続体の濃度の純戦略をもつゲームのことであり、Player  $i$  への利得関数を  $M_i(x, y)$  で表すこととする ( $i = 1, 2$ )。即ち

$$M_i(x, y) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}^1, \quad i = 1, 2.$$

このようなゲームに対する各プレーヤの混合戦略としては  $[0, 1]$  上の確率測度ということであるが、具体的には  $[0, 1]$  上累積分布関数

(i)  $F(0) = 0, F(1) = 1$

(ii) 非減少,  $x < x' \Rightarrow F(x) \leq F(x')$

(iii)  $(0, 1)$  上で右連続

$$F(x) = F(x+0), \quad x \in (0, 1)$$

を満足する関数を用いられる。この場合期待値の記号として

$$\begin{aligned} M_i(x, G) &= \int_0^1 M_i(x, y) dG(y) \\ M_i(F, y) &= \int_0^1 M_i(x, y) dF(x) \\ M_i(F, G) &= \int_0^1 \int_0^1 M_i(x, y) dF(x) dG(y) \\ &= \int_0^1 M_i(x, G) dF(x) \\ &= \int_0^1 M_i(F, y) dG(y) \end{aligned}$$

を使用することとする。また  $[0, 1]$  上の累積分布関数全体の集合を  $D$  で表すこととする。

さて、連続な利得関数をもつ単位正方形上のゲームには次の定理が成立する。

**定理**  $M(x, y)$  が閉正方形  $0 \leq x, y \leq 1$  上で連続であるならば

$$\max_{F \in D} \min_{G \in D} \int_0^1 M(x, y) dF(x) dG(y) \quad \text{および} \quad \min_{G \in D} \max_{F \in D} \int_0^1 M(x, y) dF(x) dG(y)$$

が存在して両者は相等しい。 ■

上の定理は行列ゲームにおける min-max 定理の自然な拡張と考えられる。では、 $M(x, y)$  が連続でない場合はどうなるのであろうか。更にはもっと違うタイプの無限ゲームでは…。min-max 定理に関するの数学理論は非線形関数解析学の話題として色々と研究されている。我国では高橋渉氏の研究が顕著である。また無限ゲームでは  $\epsilon$ -最適という概念も導入されている。

定義 点  $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$  が 2 人 0 和ゲーム  $\{X, Y, M(x, y)\}$  の  $\varepsilon$ -鞍点 ( $\varepsilon$ -最適戦略の組) であるとはそれぞれ Player I、II の任意の戦略  $x \in X, y \in Y$  に対して不等式

$$H(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \leq M(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq M(x_\varepsilon, y) + \varepsilon$$

を満足する戦略の組のことである。

そうすると次の定理が成立する。

定理 2 人 0 和ゲーム  $\{X, Y, M(x, y)\}$  に対して有限なゲーム値  $v$  が存在するための必要十分条件は、任意の  $\varepsilon > 0$  に対してそれぞれ Player I、II の  $\varepsilon$ -最適戦略  $x_\varepsilon, y_\varepsilon$  が存在して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(x_\varepsilon, x_\varepsilon) = v$$

が成立することである。 ■

当然 2 人 0 和ゲームの混合拡大に対しても最適混合戦略や  $\varepsilon$ -最適戦略の概念が導入され、種々の定理が与えられていることもよく知られた事実であろう。確かに数学の問題として扱うなら、まだまだ多くの問題が残されているが、それは平面的な進歩であるかも知れない。

ここで話を 2 人 0 和ゲームから非 0 和ゲームに転じよう。非 0 和ゲームというと、2 人ゲームに関しての leader と follower の間の平衡—Stackelberg 平衡—その相互の組み合わせとしての Nash 平衡、 $n$  人非協力ゲームに対しての Nash 平衡ということになるのであるが、その多くの理論は有限ゲームに対してである。有名な Selten による Nash 平衡点の再定義も有限ゲームを混合拡大することにより得られた無限ゲームを対象に議論している。しかしながら、非 0 和ゲームの源流とも考えられるクールノーの市場複占の問題は無限ゲームに他ならない。

無限ゲームに関する Nash 平衡点の存在理由を紹介しよう。

定理  $X_1 \subset R^m$  を Player I の純戦略全体の集合、 $X_2 \subset R^n$  を Player II の純戦略全体の集合とし、これらは共に、 $X_1 \times X_2$  が空でないコンパクトな凸集合とする。また利得関数  $M_1(x, y)$  と  $M_2(x, y)$  は  $X_1 \times X_2$  で連続であり、 $M_1(x, y)$  はすべての固定された  $y$  に対して  $x$  につき凸、また  $M_2(x, y)$  はすべての固定された  $x$  に対して  $y$  につき凹とする。そうすると 2 人非 0 和ゲーム  $\{X_1, X_2, M_1(x, y), M_2(x, y)\}$  は Nash 平衡点  $(x^*, y^*)$  をもつ。 [Parthasarathy and Raghavan (1971)] ■

上の定理は直観的には納得でき、応用上よく出てくるタイプのゲームへの平衡点の存在を保証している。また単位正方形上の連続ゲーム (あるいはもっと一般的にコンパクト集合上の連続ゲーム) に関しては次の定理がある。

定理  $X_1$  と  $X_2$  を有限次元ユークリッド空間内のコンパクト集合とし、 $M_1(x, y)$  と  $M_2(x, y)$  は  $X_1 \times X_2$  上で連続な関数とする。そうすると 2 人非協力ゲーム  $\{X_1, X_2, M_1(x, y), M_2(x, y)\}$  は混合戦略の中で平衡点  $(\mu, \nu)$  をもつ。 ■

この場合、期待利得は  $\mu(\cdot), \nu(\cdot)$  を確率測度とすると

$$M_i(\mu, \nu) = \int_{x_1} \int_{x_2} M_i(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

である。

Nash 平衡点の存在には、Brower の不動点定理や Kakutani の不動点定理が大きく貢献しており、この方面の研究者には現在でも研究対象の宝庫となっている。また、1973 年になって M. Smith や Price は非協力ゲームは生物進化の理論的研究に深く関係していることを指摘し、ESS という概念を提案しているが、これも対称な有限ゲームを対象とした議論である。

### 3 無限ゲームの解法

第1節でも書いたように、行列ゲームには線形計画法に転化して解くといったような一般論的解法が存在しているが、無限ゲームにはその内容があまりにも複雑すぎてそのようなものはない。場合場合によって優れた直観、適切な摂動法 (perturbation)、その問題の特有の形式などを有効に利用することである。このこつは、ちょうど微分方程式を解く場合に似ている。このことが無限ゲームを難しくしている反面、多くの飯の種を支えてくれていることにもなっている。

しかし、あるクラスのゲームにあつては、最適戦略や Nash 平衡点をわりあい容易に見つけることのできる一般的方法がないわけではない。その代表的な方法が恒等子法と不動点法であろう。

(1°) 恒等子 (equalizer) 法 これは、単位正方形上のゲームおるいはそれに準じるゲームに有効である。 $M(F^\circ, y) \equiv \text{const}$  for  $y \in [a, b] \subset [0, 1]$  のとき、 $F^\circ$  を Player I の恒等子という。各 Player の恒等子を発見して

$$M(F^\circ, y) \begin{cases} = \\ > \end{cases} v_1 \text{ for } y \in \begin{cases} [a_2, b_2] \\ [a_2, b_2]^c \end{cases};$$

$$M(x, G^\circ) \begin{cases} = \\ < \end{cases} v_2 \text{ for } x \in \begin{cases} [a_1, b_1] \\ [a_1, b_1]^c \end{cases}$$

とすれば必然的に  $v_1 = v_2 = M(F^\circ, G^\circ)$  になり、 $F^\circ, G^\circ$  が最適戦略であり、 $M(F^\circ, G^\circ)$  がゲームの値となる。この時

$$F^\circ(a_1) = G^\circ(a_2) = 0; F^\circ(b_1) = G^\circ(b_2) = 1$$

が成立。このタイプのゲームは、タイミングのゲーム、ナワバリのゲーム、入札ゲーム等、応用上よく見られる。

(2°) 不動点法 (fixed-point method) 各プレーヤの戦略の組  $(F^\circ, G^\circ)$  に対し

$$(a) \quad M(F, G^\circ) \longrightarrow \max_{F \in D}$$

$$(b) \quad M(F^\circ, G) \longrightarrow \min_{G \in D}$$

を考える。もしも  $F^\circ$  が (a) の最大点、かつ  $G^\circ$  が (b) の最小点になっていれば、この  $F^\circ, G^\circ$  が最適戦略となる。後で述べるポーカーゲームの構造を持つゲームに有効である。

ところで、上記の2つの方法は、非0和ゲームの Nash 平衡点を求める方法にも通用する。(2°) 不動点法はそのまま

$$M_1(F, G^\circ) \longrightarrow \max_{F \in D}$$

$$M_2(F^\circ, G) \longrightarrow \max_{G \in D}$$

を満足する戦略の組  $(F^\circ, G^\circ)$  を考える問題に書き換えることができる。(1°) の恒等子法は次のように表現することができる。

$$M_1(x, G^\circ) \begin{cases} = \\ < \end{cases} v_1 \text{ for } x \in \begin{cases} [a_1, b_1] \\ [a_1, b_1]^c \end{cases};$$

$$M_2(F^\circ, y) \begin{cases} = \\ < \end{cases} v_2 \text{ for } y \in \begin{cases} [a_2, b_2] \\ [a_2, b_2]^c \end{cases}$$

を満足する  $(F^\circ, G^\circ)$  を求め、これが

$$F^\circ(a_1) = G^\circ(a_2) = 0;$$

$$F^\circ(b_1) = G^\circ(b_2) = 1$$

を満たせば、 $(F^\circ, G^\circ)$  は 1 つの Nash 平衡点となる。

これ以外にも、ゲームを構成する利得関数の型に応じて様々な解法が考えられる。

しかし、無限ゲームにあたっては平衡点の存在性は一般には成立するとは限らない。また無数に存在する例も多いことにも注意されたい。

## 4 無限ゲームの展開

いよいよ本稿の主題である無限ゲームの様々な展開について述べよう。無限ゲームには統一的な理論はないが、一つ一つのモデルを考えると驚くほど幅広い展開の可能性が見えてくる。本稿では代表的なモデルを紹介し、その解についてもふれる。

### 4.1 探索ゲーム

このゲームに関しては、草田健作氏より面白い研究が紹介されると思うので、ここでは簡単な紹介にとどめる。

**Ex. (search on a closed interval.)** [Diubin and Suzdal (1981)].

これは最も簡単な探索ゲームである。Player II(Hider) は点  $y \in [0, 1]$  を選び、Player I は同時に II とは独立に点  $x \in [0, 1]$  を選ぶ。もし点  $y$  が  $|x - y| < \ell$ , ここに  $0 < \ell < 1$ , となっているなら II は I から発見されたとして、I に対して +1 を支払う。その他のときは 0 を支払う。この場合利得関数は

$$M(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } |x - y| \leq \ell \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Ex. (球面上の探索)**  $R^3$  内に半径  $R$  の球  $C$  がある。Player I(searcher) は一連の点  $x_1, \dots, x_s \in C$  を選び、Player II は一点  $y \in C$  を選ぶ。二人は互いに独立に同時に選ぶものとする。もし、 $x_j, j = 1, \dots, s$  の中の 1 つの点の  $\gamma$ -近傍に点  $y$  が入っているとすると、Player II は発見されたことになる。ここで点  $x_j$  の  $\gamma$ -近傍というのは点  $x_j$  を山の頂点とし大地の半径が  $\gamma$  となるカップ状をした球面上の一部分を意味する。点  $x_j$  の  $\gamma$ -近傍を  $S(x_j, \gamma)$  で記す。Player I の目的は Player II を発見することであり、II のそれは I から発見されないことである。そうすると Player I への利得は

$$M(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \in M_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここに、 $x = (x_1, \dots, x_s)$  で  $M = \cup_{j=1}^s S(x_j, \gamma)$ 。

Ex. (平面上の追跡ゲーム)  $S_1$  と  $S_2$  を平面上の集合とし、Player I は点  $x \in S_1$  を、II は点  $y \in S_2$  をそれぞれ独立に選ぶ。また、各プレーヤは互いに相手に対して何の情報も持っていない。Player II は Player I との距離を最小にすることが目的であり、I は II との距離を最大にしたい。この場合、I、II の戦略はそれぞれ  $x \in S_1, y \in S_2$  であり、Player I への利得は  $x$  と  $y$  との間のユークリッド距離  $\rho(x, y)$  とする。

$$M(x, y) = \rho(x, y), \quad x \in S_1, y \in S_2$$

Ex. (リング内での追跡ゲーム) 前例で、 $S_1 = S_2 = S$  となっており、 $S$  を内側が半径  $r$  の円と外側が半径  $R$  の円で囲まれたリングとなっている場合を考える。この例について最適戦略は以下ようになる：Player I はリング  $S$  の外側の円上の一様分布  $\mu^*$  に従って、II は内側の円上の一様分布  $\nu^*$  に従ってそれぞれの点を選ぶ。この戦略に従うとすると期待利得 (距離) は

$$\begin{aligned} M(\mu^*, \nu^*) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \xi} d\xi \equiv \Phi(r, R) \end{aligned}$$

で与えられる。ここでリングの中心を原点とし、 $\psi$  と  $\varphi$  はそれぞれ Player I, II の純戦略を極表示した時の偏角を表す。

証明には、Player I が純戦略  $x = (\rho, \psi)$  を使い、II が混合戦略  $\nu^*$  を用いた時の I への期待利得を  $M(x, \nu^*)$ 、逆に II が純戦略  $y = (\mu^*, y)$  を使い I が混合戦略  $\mu^*$  を用いた時の I への期待利得を  $M(\mu^*, y)$  とすれば、

$$\begin{aligned} M(x, \nu^*) &= \Phi(r, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \xi} d\xi \\ M(\mu^*, y) &= \Phi(\rho, R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \xi} d\xi \end{aligned}$$

を得、 $r \leq \rho \leq R$  を用いると

$$M(x, \nu^*) \leq M(\mu^*, \nu^*) \leq M(\mu^*, y)$$

を得る。

このゲームは様々な形で展開される。

## 4.2 入札ゲーム

競争入札の問題をゲーム論的に扱うと面白い。初期の頃の OR 誌には案外素朴ではあるが面白い入札ゲームの論文が見つけられる。このゲームはその後、不確実性の導入や情報様式の一般化等で様々な展開が試みられ American Economic Review、Econometrica、Management Science、Operations Research に数多くの論文が発表された。Handbook of Game Theory には R. Wilson による詳しい総合報告が載せられている。このゲームも今回、渡辺先生の解説があるので、ここでは省略する。

## 4.3 保険契約

保険契約は加入者と保険会社との間のゲームと考えると面白い。これは正確にはゲームの構造をしていないが、ゲーム論的に考えると精密な解が出てくる。事故にして  $x$  円の損害をこうむる確率が  $\text{cdf } F(\cdot)$  で

表される事故に直面している時、加入者 (buyer) は保険料  $\pi$  を支払って保険会社 (seller) から保険契約  $T(\cdot)$  を買う。すなわち、金額  $x$  の損害が buyer に現実起こったとき、seller は  $T(x)$  だけの支払いを約束する。この時  $0 \leq T(x) \leq x, \pi = \int_0^\infty T(x)dF(x)$  の仮定を置くことは自然であろう。

いま、 $u(z), v(z)$  をそれぞれ buyer と seller のもつ効用関数とすると、保険契約を結ぶことによる各 Player への期待値は

$$\begin{aligned} \text{buyer にとって } & \int_0^\infty u[-\pi - x + T(x)]dF(x) \longrightarrow \max_{T(x)} ; \\ \text{seller にとって } & \int_0^\infty v[\pi - T(x)]dF(x) \longrightarrow \max_{T(x)} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $u(\cdot), v(\cdot)$  をともに凹関数と仮定すると、buyer にとっては免責型が、seller にとっては比例型が最適契約となる。この問題も様々な展開が可能である。

#### 4.4 タイミングのゲーム

無限ゲームの代表といえばこのタイミングのゲームではないかと思われる程、1950年代から1960年代にかけて、Blackwell、Karlin、Restrepo、Shiffman、Smith、…等有名な研究者によって精力的に研究された。連続な利得関数をもつ無限ゲームはそれ自身美しい結果を出しているが、現実の問題では不連続な部分を有する利得関数で定式化できる問題がよく見られる。実はこの不連続性がゲームの解を導くための大きな手掛りを与えてくれるのである。そしてこの手掛りは、タイミングのゲームだけでなく、入札ゲームや後で触れる配置ゲームや縄張りのゲームにも応用されている。

最適なタイミングを考える問題は私がよく出会う問題である。人は何かある事業に取り掛かる時そのタイミングを考えなければならない。早い時期に取り掛ると失敗の可能性が高くできるだけ遅く取り掛りたい。しかし、あまり遅すぎると相争相手から出し抜かれ、大損失をこうむるおそれがある、という事態がそうである。このタイミングの問題は以下のように決闘でモデル化するとよく解かりやすい：

2人の決闘者 (Player I, II) が距離 2 だけおいて向き合って立ち、単位速度で近寄る。止ったり後退したりはできない。射撃の精度は精度関数

$$A_1(x) = \text{Player I が時刻 } x \text{ において (このとき相互の距離は } 2(1-x) \text{) 発砲するとき、相手に当たる確率}$$

$$A_2(y) = \text{Player II が時刻 } y \text{ において発砲するとき、相手に当たる確率}$$

で表わされる。これらの関数はいずれも、 $A_i(0) = 0, A_i(1) = 1$  である滑らかな増加関数 ( $i = 1, 2$ ) であると仮定する。

ここでプレーヤに得られる情報について決めておく。一方の決闘者が発砲した瞬間にその音が相手に聞こえる (すなわち、彼が行動をとったことを相手が情報として知ってしまう) とき、彼は noisy bullet を持っているという。これに対して消音装置がついていて、彼が既に発砲したのかまだしていないのかが相手に知られないとき、彼は silent bullet を持っているということにする。そして両者共 noisy bullet を持っているとき noisy duel、silent bullet を持っているとき silent duel、また一方が silent bullet を持っており他方が noisy bullet を持っているとき silent-noisy duel と呼んでいる。

この分野の古典的成果は S.Karlin の Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics (1959) および M.Dresher の Games of Strategy (1961) にまとめられているが現在絶版となっている。

### Noisy Duel - 両者が一発ずつ持っている場合

この決闘では、各々の決闘者は相手が発砲すれば直にそのことがわかるから、Player I の純戦略は  $x \in [0, 1]$  となる。この意味は、 $x \in [0, 1]$  を定め、相手が  $x$  より前に行動して失敗すれば時刻 1 まで待つて行動し、 $x$  までに行動しなければ時刻  $x$  で発砲する、ということである。Player II の純戦略も  $Y \in [0, 1]$  であり、同じように定義される。そうすると Player I への期待利得は、

$$M(x, y) = \begin{cases} 2A_1(x) - 1, & x < y \\ A_1(x) - A_2(x), & x = y \\ 1 - 2A_2(y), & x > y \end{cases}$$

となる。

**定理**  $A_1(t) + A_2(t) = 1$  の  $[0, 1]$  での唯一根を  $t_0$  とする。そうすると  $(t_0, t_0)$  はこのゲームの鞍点となる。 ■

### Noisy Duels - Fox and Kimeldorf による一般化 (1969)

Player I は  $m$  回、II は  $n$  回行動できる場合を考えた。DP 的考え方をこのゲームに導入して、このゲームを  $G_{mn}$  とおくと、 $G_{m,n+1}$  と  $G_{m-1,n}$  の解が求まると再帰的關係により  $G_{mn}$  が解ける。したがって次の結果を得る。

適当な  $\{t_{ij} : i, j = 1, 2, \dots\}$  と唯一の  $\{v_{ij} : i, j = 1, 2, \dots\}$  が存在して

$$\begin{aligned} v_{ij} &= A_1(t_{ij}) + [1 - A_1(t_{ij})]v_{i-1,j} \\ &= -A_2(t_{ij}) + [1 - A_2(t_{ij})]v_{i,j-1}, \end{aligned}$$

ここに  $v_{i0} = 1$  for  $i > 0$  and  $v_{0j} = -1$  for  $j > 0$  が成立する。これより任意の  $m, n$  に対してゲーム  $G_{mn}$  は値  $v_{mn}$  をもつ。

また、時刻  $\{t_{ij}\}$  は

$$\prod_{i=1}^m [1 - A_1(t_{in})] + \prod_{j=1}^n [1 - A_2(t_{mj})] = 1$$

から順次求まってくる。すなわち、両者が最適に振舞うならば、 $G_{mn}$  における最初の行動は時刻  $t_{mn}$  であるべきであり、さらに

$$A_1(t_{mn}) - A_2(t_{mn}) + [1 - A_1(t_{mn})][1 - A_2(t_{mn})]v_{m-1,n-1} \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I \\ II \end{array} \right\}$$

が行動とることとなる。 ■

### Silent Duel - 両者とも一発ずつ持っている場合

この場合両者共互いに相手がもう既に行動した後なのかまだしていないのかを知らされず事前に最適戦略を求めようというものである。そこで Player I の純戦略を  $x \in [0, 1]$ 、II のそれを  $y \in [0, 1]$  とおくと Player I への期待利得  $M(x, y)$  は

$$M(x, y) = \begin{cases} A_1(x) - \{1 - A_1(x)\}A_2(y), & x < y \\ A_1(x) - A_2(x), & x = y \\ -A_2(y) + \{1 - A_2(y)\}A_1(x), & x > y \end{cases}$$

となる。この利得関数に対しては純戦略の中に最適戦略はみつからない。そこで混合戦略の中からみつけ出すこととなる。この場合利得関数の形から Player I の混合戦略は  $[0, 1]$  上の *cdf*  $F(x)$  であり、この  $F(x)$  は適当な区間  $(a, 1) \subset [0, 1]$  上の密度部分  $f(x) > 0$  と点までの mass 部分  $\alpha \geq 0$  で構成されるものとする。

Player II の混合戦略は  $[0, 1]$  上の *cdf*  $g(y)$  であり、この  $g(y)$  は同じ区間  $(a, 1) \subset [0, 1]$  上の密度部分  $g(y) > 0$  と点までの mass 部分  $\beta \geq 0$  で構成されるものとする。

と仮定し、このクラスの中から最適戦略をみつけるものとする。そうして

$$M(F, y) \begin{cases} = \\ > \end{cases} v_1 \text{ for } y \in \begin{cases} [a, 1] \\ [0, a] \end{cases} ;$$

$$M(x, G) \begin{cases} = \\ < \end{cases} v_2 \text{ for } x \in \begin{cases} [a, 1] \\ [0, a] \end{cases}$$

を考察することにより、次の結果を得る。

**定理**  $a_1$  と  $a_2$  をそれぞれ方程式

$$1 + \frac{1}{A_2(a)} = \int_a^1 \frac{A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2} dt ; \quad 1 + \frac{1}{A_1(a)} = \int_a^1 \frac{A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2} dt$$

の  $[0, 1]$  での唯一根とし、 $a = \max(a_1, a_2)$  とおく。そうすると I, II の最適混合戦略  $F^*(x)$  と  $G^*(y)$  は以下のように与えられる：

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ \int_a^x \frac{k_1 A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2} dt + \alpha I_1(x), & a \leq x \leq 1 \end{cases} ;$$

$$G^*(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < a \\ \int_a^y \frac{k_2 A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2} dt + \beta I_1(y), & a \leq y \leq 1 \end{cases} ,$$

ここに  $I_1(z)$  は  $z = 1$  での unit-step function であり、

$$\alpha \begin{cases} = \\ = \\ < \end{cases} 0 \text{ and } \beta \begin{cases} > \\ = \\ = \end{cases} 0 \text{ if } a \begin{cases} a_1 > a_2 \\ a_1 = a_2 \\ a_2 > a_1 \end{cases} ,$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{\left\{1 + \frac{1}{A_2(a)}\right\}}{H\alpha} = \frac{\int_a^1 \frac{A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2} dt}{1 - \alpha} ,$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{\left\{1 + \frac{1}{A_1(a)}\right\}}{H\beta} = \frac{\int_a^1 \frac{A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2} dt}{1 - \beta} .$$

またゲームの値  $v^*$  は

$$v^* = \frac{1 - 3A_{3-i}(a)}{A_{3-j}(a) \int_a^1 \frac{A_{3-i}'(t)}{A_i(t)\{A_{3-i}(t)\}^2} dt} \text{ if } a = a_i .$$

**Silent Duels** - Restrepo による一般化 (1957),

Noisy Duels の場合と同様に Player I は  $m$  回、II は  $n$  回行動できる場合を考える。この場合 I の純戦略を  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  ただし  $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m \leq 1$ 、II の純戦略を  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  ただし  $0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq 1$  とする。そうすると I への期待利得を  $M(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$  とすると

$$M(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} A_1(x_1) + [1 - A_1(x_1)]M(x_2, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n), & x_1 < y_1 \\ -A_2(y_1) + [1 - A_2(y_1)]M(x_1, \dots, x_m; y_2, \dots, y_n), & y_1 < x_1 \end{cases}$$

ただし  $x_1 = y_1$  の時は上記 2 つの関係式の平均を得る。また Player I, II の混合戦略をそれぞれ  $F(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})$  とし以下のように想定する :

$$F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m F_i(x_i) ; G(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n G_i(y_i)$$

ただし、 $F_i(x_i)$  は  $[a_i, a_{i+1}]$  上の *cdf* であり、 $i < m$  の時は *pdf* のみで、 $i = m$  の時は  $[a_m, a_{m+1})$  上の密度部分と点  $a_{m+1}$  での可能な mass  $\alpha \geq 0$  とで構成される。また  $G_j(y_j)$  は  $[b_j, b_{j+1}]$  上の *cdf* であり、 $j < n$  の時は *pdf* のみで、 $j = n$  の時は  $[b_n, b_{n+1})$  上の密度部分と点  $b_{n+1}$  での可能な mass  $\beta \geq 0$  とで構成される。ここに、 $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m < a_{m+1} = 1; b_1 < b_2 < \dots < b_n < b_{n+1} = 1$  であり、さらに  $a_{m+1} = b_{n+1} = 1$ 。Restrepo は上記のようなクラスの混同戦略の中から、Single-bullet のモデルで得られた最適混合戦略と相似な *cdf* をつなぎ合せとして、最適戦略を導く漸化関係式を導いた。

**Silent-Noisy Duel** - 両者とも一発ずつ持っている場合

随分長い間  $a_1(t) = a_2(t) = t$  の場合についての解しか見られなかったが、1970 年代に入ってもっと一般のクラスのモデルの特別な場合とに一般精度関数に対しての解が Styszynski(1974) と Teraoka(1979) によって独立に求められた。ここでは、Player I は silent bullet を、II は noisy bullet を持っているものとする。そうすると、I の純戦略は  $x \in [0, 1]$  であり、まず  $x$  を定め、II が  $x$  より前に行動して失敗すれば時刻 1 まで待って行動し、逆に II が  $x$  より前に行動しなければ  $x$  で行動する、ことを意味する。他方、Player II の純戦略は単に  $y \in [0, 1]$  である。そうすると Player I への期待利得  $M(x, y)$  は次式で与えられる。

$$M(x, y) = \begin{cases} A_1(x) - \{1 - A_1(x)\}A_2(y), & x < y \\ A_1(x) - A_2(x), & x = y \\ 1 - 2A_2(y), & x > y \end{cases}$$

ここで、 $t_0$  を  $A_1(t)A_2(t) + A_1(t) + A_2(t) - 1 = 0$  の  $[0, 1]$  における唯一根とし、 $t_0 \in (t_0, 1)$  に対して

$$h_i(t) = A'_{3-i}(t) / \{A_1(t)A_2(t) + A_1(t) + A_2(t) - 1\}$$

とおくと次の結果を得る。

**定理**  $a$  を  $(t_0, 1)$  における方程式

$$\int_a^1 h_1(t) \exp \left[ - \int_a^t \{1 + A_1(s)\} h_1(s) ds \right] = \frac{1}{2}$$

の唯一根とすると Player I, II の最適混合戦略はそれぞれ次のように与えられる。

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ 2 \int_a^x h_1(t) \exp \left[ - \int_a^t \{1 + A_1(s)\} h_1(s) ds \right] dt, & a \leq x \leq 1 \end{cases} ;$$

$$G^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq a \\ \beta \left( 2 \int_a^y h_2(t) \exp[-\int_a^t \{1 + A_2(s)\} h_2(s) ds] dt + I_1(y) \right), & a \leq y \leq 1 \end{cases},$$

ここに  $I_1(y)$  は  $y = 1$  での unit-step function であり

$$\beta = 1 / (1 + 2 \int_a^1 h_2(t) \exp[-\int_t^1 \{1 + A_2(s)\} h_2(s) ds] dt) > 0 .$$

またゲームの値は  $v^* = 1 - 2A_2(a)$  となる。 ■

この問題の一般化は、現在でもまだ大きく未解決として残されている。現在までのところ、Styszynski による m-silent vs. 1-noisy(1974)、Kurisu による 2-silent vs. 2-noisy(1986)、Rudzik か Owlowyky を中心としたポーランド学派による 1-noisy vs. k-silent-1-noisy や 1-noisy vs. 1-noisy-k-silent 等に関する一連の研究 (1984~1992)、同じ流れの Kurisu の研究 (1990) があるが、一般精度関数をもつ m-noisy vs. 1-silent が未だに open problem となっている。

#### タイミングのゲームの展開 - その後の発展

タイミングのゲームは今紹介した問題がその出発点ではあるが、プレーヤの置かれた状況に不確実性を導入したり、様々なタイプの情報構造を導入することにより、多様な展開をみせる。これらの研究はそれぞれ現実の経営戦略や市場の問題を念頭に置いてモデル化されたものであり、決闘を想定したのは、その表現の形式に他ならない。代表的なものを紹介しよう。

Player I は常に II が観測でき、他方 II は最初 I が観測できないが、I との距離は近づくにつれて発見確率が上昇してくる Noisy Duel が 1971 年 Sweut によって発表された。Player II の混合戦略に発見にされた条件の下での行動開始という条件つき分布が導入され面白い。しかし、行動回数は一回であり、行動回数一般化や Silent 型への展開が残されている。

両プレーヤの各々が弾丸を持っているいないのが不確実なモデルは、Teraoka によって導入され Silent、Noisy、Silent-Noisy を中心に様々な問題を扱った (1975~1981)。またこれらの論文を読んだ Cegielski は Silent Duels において弾丸の数の確率変数化 (I は高々  $m$  発、II は高々  $n$  発) に成功し、Styszynski はある確率過程に従って弾丸が入手できるモデルを提案し解を導いた (1980)。しかし、Noisy Duels に対してのこの方面の一般化は大きく未解決である。

プレーヤの数の一般化も大きな展開であるが、 $n$  人の時は全員が等しい精度 (Sakaguchi 1980)、一般精度の時は 3 人ゲーム (Kurisu 1982) のみが発表されている。これらは非 0 和として展開されている。

ゲームの進行がある確率法則に従って停止されるゲームは、一般化された精度関数が時間についての増加関数ではなく単峰関数となるので、それまでのゲームと異なり面白い (Teraoka 1983,1984,1985, Sakaguchi 1985)。また Teraoka の論文の弱い仮定を批判して作成した Garnaer の論文も面白い。このモデルもまだまだやることが残っている。

その他 情報様式に様々な仮定を設けた Teraoka の論文 (1984,1985,1986)、各プレーヤの移動速度に変化を入れた Kurisu の論文 (1997,2000)、各プレーヤが 2 種類の武器を持つ Trayla の一連の論 (1998~2000)、... があり、タイミングのゲームはまだまだやることが残されている。

#### 4.5 その他の無限ゲーム

タイミングのゲーム以外にも無限ゲームとして扱うと面白くなる問題にポーカー・ゲーム、配置のゲーム、縄張りのゲームがある。ポーカー・ゲームは配布されるカードを乱数と考え、受取った乱数の実現値に基づいて、賭に応じるか、降りるか、の確率を定めるのが純戦略であり、Bellman(1952)、Karlin and Restrepo(1957)

のモデルを出発点とし、最近では Sakaguchi や Sakai の報告がある。タイミングのゲームとよく似た形の利得関数を持つが純戦略の中で Nash 平衡点が導れる問題として面白いのが、配置ゲームであろう。これは 1929 年の Hotelling の問題が出発点となっている。[0, 1] 上に客が分布しており、その中に対立する 2 店が店を出したい。各々の店は互いに対立する相手を考えながら品物の値段と店の配置位置を決めるのが目的である。この際客の移動に伴う費用も考えに入れ、客は安い方の店を選ぶ。この問題も様々に発展され現在でもゲームの専門誌の中に論文を見る。

Smith により生物進化の理論的研究がゲーム理論と深く関係することが示された (1982)。この時紹介されたモデルは、複数の企業間の市場独占の為の対立やある企業の市場への参入の問題、すなわち、縄張りの問題に応用できる。この応用も無限ゲームとして定式化できる (Teraoka 1993,1995,1997,1998,1999)。その他にも、競合的在庫の問題 (Hohjo 1998,1999,2000)、ソフトウェア出荷のゲーム (Dohi,Teraoka,Osaki) 等ともかくも無限ゲームは私達に様々な興味を与えてくれ、これからも発展の望まれる分野なのである。

## 参考文献

成書のみ紹介し、個々の論文は省略させていただきます。

- [1] Aumann,R.J.,and S.Hart,editors,Handbook of Game Theory with Economic Applications, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [2] Dresher,M. Games of Strategy : Theory an Appliations, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
- [3] Karlin,S.,Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, II, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
- [4] 西田俊夫, ゲームの理論, 日科技連, 東京, 1973
- [5] Owen,G.,Game Theory, Third Edition, Academic Press, New York, 1995.
- [6] Petrosjan,L.A.,and N.A.Zenkevich,Game Theory,World Scientific, Singapore, 1996.
- [7] 坂口実, ゲームの理論, 森北出版, 東京, 1969.
- [8] Shubik, M. editor, Mathematics of Conflict, Elsevier Science Publishers B.V., North Holland, 1983.
- [9] Smith,J.M.,Evolution and the Theory of Games, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [10] 鈴木光男, ゲームの理論, 勁草書房, 東京, 1959.
- [11] 鈴木光男, ゲーム理論入門, 共立全書, 東京, 1981.
- [12] Thomas,L.C.,Games, Theory and Applications, Ellis Horwood Ltd, London, 1986.