ゲームにおける決定不能性とランダムネス

中山幹夫

慶應義塾大学経済学部

1 はじめに

ＯＲの多くの分野と異なり，今日のゲーム理論では最適解を計算して求めるという研究はとくに多いわけではない．これは，今日のゲーム理論が経済理論との関連が強く，計量経済学を除けば経済理論自体は伝統的に数値計算をあまり必要としていないことがひとつの理由であろう．さらに，合理的行動とは何か，非協力的行動や協力的行動とは何か，などという哲学的議論を必然的にともなうために，計算という実践的な領域に向けられる関心が十分ではなかったともいえる．初期の２人ゼロ和ゲームや双行列ゲームなどにおいて，行動モデルとしての単純さのゆえに，理論が計算手順とほぼ平行して展開されたのとよい対照をなしている[1]．

しかし，近年，実験経済学の興隆にともない，**限定された合理性**への関心が高まるにつれて，計算や計算手順に言及する研究が散見されるようになった．とはいえ，アルゴリズムの性質や効率性を論ずる以前の，計算可能か否かという基礎的な段階の哲学的議論であるところがいかにもゲーム理論的である．たとえば，Binmore [4]，Anderlini [1] などによる，**チューリングマシンの停止問題**のゲームのプレイへの応用，さらに，Knoblauch [17] や Nachbar and Zame [22] などの，無限回繰り返しゲームでの**決定不能性**の研究，Prasad [27] による，無限ゲームでのナッシュ均衡の存在についての決定不能性やランダム性の研究などがその例である．

これらの結果は，主に戦略の実行手続を**計算可能**なものに限定することにより得られる一連の不可能性定理であり，実行するアルゴリズムの非存在を主張するものである．この意味では，計算可能性は実り豊かな成果を約束する研究領域とは言い難いかもしれないが，人間の認識や計算，推論能力の限定合理性に対する主要な分析用具であり，また隣接領域とくにコンピュータ科学や情報理論，さらに進化生物学などとの交流を促進するという点からも，ゲーム理論にとっては無視できない領域である．もちろん，限定合理性の導入によって新しい可能性を探ることの重要性はいうまでもないが，その前に何がどのようにして不可能なのかについて一度みておくことも有益であろう．

本稿では，古典的かつ基本的な Rabin [28] のゲームの必勝戦略の計算不可能性，Jones [15] による**算術ゲーム**における計算不可能性とゲーデル型の不完全性，さらに，アルゴリズム的情報理論における**ランダム性**を無限ゲームのナッシュ均衡の個数に対して応用した Prasad [27] の結果についての解説を試みる．計算論の応用による新しい可能性については，中山 [23] で扱っているが，まだ数はきわめて少ないので，時期が熟すのを待って展望することにしたい．

2 決定不能な必勝戦略

１９５７年に Rabin [28] によって考察されたゲームは，引き分けのない**勝ち負けゲーム** (win-lose game) で，先手と後手をもつ完全情報２人ゲームである．このゲームでは，後手が必勝戦略をもつにもかかわらず，それが必勝戦略であることを確かめる手順が存在しない．ここでは Jones [15] が再定式化した単純明快な形式をとりあげよう．

[1] Brown [6]，Robinson [29]，Lemke=Howson [20] など

記号 Z_+ で非負の自然数の集合をあらわす．集合 $S \subset Z_+$ が与えられており，S はそれ自身もその補集合 $S^c \subset Z_+$ も無限集合であるとする．このとき，Rabin のゲームとは次のように定義されるゲームである．

1. 先手 J_1 が $x_1 \in Z_+$ を選ぶ．

2. 後手 J_2 が，x_1 を知って，$x_2 \in Z_+$ を選ぶ．

3. $x_1 + x_2 \in S$ ならば J_1 の勝ち，$x_1 + x_2 \in S^c$ ならば J_2 の勝ち．

容易にわかるように，このゲームでは後手が必勝戦略をもつ．ある x_1 に対して，どんな x_2 を選んでも $x_1 + x_2 \notin S^c$ だったとしたら，S^c が無限集合であることに反するからである．

問題は，S も S^c も無限集合であるから，たとえば，$x_1 + x_2 \in S^c$ であることを決定する手順が実際に存在するか否かという点にある．偶数の集合や，素数の集合などは，そのメンバーであるか否かを決定するアルゴリズムをもっているが，すべての集合 S がそうであるわけではない．Rabin のゲームでは，S は**単純集合** (simple set) と呼ばれる集合とされる．

集合 $S \subset Z_+$ が単純集合であるとは

1. S は**帰納的可算** (recursively enumerable, r.e.) である

2. S^c は無限集合で，帰納的可算な無限部分集合を含まない

の２条件がみたされることである[2]．

このように，S が単純集合であれば，S^c のいかなる無限部分集合も帰納的可算ではないから，$x_1 + x_2 \in S^c$ であるか否かは**決定不能**となる．単純集合は，Post [26] によって１９４４年に人為的に導入された集合であるが，この Rabin の仕事から６年後の１９６３年に Kolmogorov [18] が，後で述べる**ランダム数**の集合の補集合として自然な意味を与えた．それゆえ，Rabin のゲームにおける勝敗は，現代的には「和がランダム数でないならば J_1 の勝ち，ランダム数ならば J_2 の勝ち」というように翻訳することができる．

3　決定不能な算術ゲーム

Jones [15] の**算術ゲーム** (arithmetical game) とは，整数係数の多項式

$$P(x_1, ..., x_k)$$

を利得関数としてもつゲームをいう．$P(x_1, ..., x_k) = 0$ の整数解を求めるとき，この方程式は**ディオファントス方程式** (diophantine equation) といわれる．有名な**ヒルベルトの１０番問題**とは，与えられたディオファントス方程式が整数解をもつか否かを決定するアルゴリズムの存在を問うもので，１９７０年に Matijasevič [21] によって否定的に解決された．

さて，$P(x_1, ..., x_k)$ の未知数 $x_i \in Z_+$ の数 k を，ゲームの長さとよぼう．長さ k の算術ゲームは次のようにプレイされる．最初に，プレイヤー１，J_1 が $x_1 \in Z_+$ を選び，これを知ってプレイヤー２，J_2 が $x_2 \in Z_+$ を選び，次にこれを知って J_1 が $x_3 \in Z_+$，これを知って J_2 が $x_4 \in Z_+$ を選び，以下同様にして，$x_k \in Z_+$

[2] S が帰納的可算であるとは，S がある**帰納的関数** $f : Z_+ \to Z_+$ の値域であること，つまり S のメンバーを残らず数え上げるアルゴリズムをもつことである．集合 $A \subset Z_+$ もその補集合 $A^c \subset Z_+$ もともに帰納的可算であるとき，A は**帰納的**であるという．また，A が帰納的であるとき，関係 $x \in A$ は**決定可能**，または計算可能であるという．詳細は，たとえば中山 [24] 参照

が選ばれると P の値が決まる．最後に選ぶプレイヤー，つまり x_k を選ぶプレイヤーは，$P=0$ にできれば勝ち，相手のプレイヤーは $P \neq 0$ とできれば勝つ，というのが勝敗のルールである．

長さ k を偶数にとろう．すると

1. J_1 が必勝戦略をもつ $\Leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots P(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) \neq 0$

2. J_2 が必勝戦略をもつ $\Leftrightarrow \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \cdots P(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = 0$

であり，1の否定は2であるから，必勝戦略をもつのは高々1人である．必勝戦略の存在は Zermelo [31] からしたがうが，どちらがもつかは一般に知られていない．算術ゲームでは，これは次に述べるように決定不能である．

定理 1. (Jones [15])．必勝プレイヤーを決定できない長さ4の算術ゲームのクラスがある．

証明. 各 $n \in Z_+$ に対し，次の補題で述べる $Q(n, x_1, x_2, x_3, x_4)$ をペイオフとする算術ゲーム G_n を考える．

> **Jones [14, Lemma 2]**. 任意の帰納的可算集合 W に対して，ある整数係数多項式 $Q(n, x_1, x_2, x_3, x_4)$ が存在して
>
> $$n \in W \Leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 (Q(n, x_1, x_2, x_3, x_4) \neq 0)$$
>
> となる．

W として**帰納的でない**帰納的可算集合 $K = \{x | x \in W_x\}$ をとると，補題から

$$J_1 \text{ が } G_n \text{ において必勝戦略をもつ} \Leftrightarrow n \in K$$

となって，左辺は決定不能である． □

定理 2. どのプレイヤーも計算可能な必勝戦略をもたない，長さ6の算術ゲームがある．

詳細は略すが，これは前述の補題を用いて，Rabin の定理を算術ゲームで表現したものである．

Jones [15] は，また次のようなゲーデル型のメタ数学的結果も提示している．

定理 3. 次の1，2および3が成立するような，長さ4の算術ゲームがある．

1. 命題「J_1 は G において必勝戦略をもつ，または J_2 は G において必勝戦略をもつ」は理論Tにおいて証明可能である．

2. 命題「J_1 は G において必勝戦略をもつ」は理論Tにおいて証明可能ではない．

3. 命題「J_2 は G において必勝戦略をもつ」は理論Tにおいて証明可能ではない．

ここに，理論Tは，算術を含み，帰納的に公理化されるサウンドな理論であるとされる[3]．ゲーデルの第1不完全定理は，公理化された無矛盾な算術の理論には，証明もその否定の証明も不可能な論理式が存在することを述べているが[4]，

[3] 公理があてはまる論理式のケースの集合が帰納的であって，証明可能な論理式はヴァリッド (valid)，つまり，つねに真であるような理論．たとえば，Boolos=Jeffrey [5] など参照．

[4] たとえば，Boolos=Jeffrey [5] 参照．

理論Tの命題「J_1 は G において必勝戦略をもつ」がまさにこのような論理式となっていることが2，3からわかる．

ゲーデルの定理は，数学者の合理的行動としての数学の形式体系が不完全であることを示すものであるが，上の定理は，意思決定者の合理的行動を記述するゲーム理論も同様の意味で不完全であることを示している．しかも，「J_1 は G において必勝戦略をもつ」という命題が，証明もその否定の証明も不可能であるということは，この不完全性がゲーム理論の根幹に関わるものであることを物語る．

4 ナッシュ均衡のランダム性

Prasad [27] は，Z_+ を戦略空間とするn人ゲームのあるクラスにおいて，ナッシュ均衡の存在が決定不能であるばかりでなく，さらに，ナッシュ均衡の個数が有限個か無限個かという属性が，均質なコインを投げて決定するのと区別できないという意味で制御不能（ランダム）であるという，注目すべき定理を証明した．

自然数 $m \in Z_+$ をパラメターとする $n+1$ 人ゲーム

$$G_m = (\{1, \ldots, n+1\}, (S_i)_{i=1}^{n+1}, (u_{im})_{i=1}^{n+1})$$

のクラス $\{G_m\}$ を考えよう．ここに，各プレイヤー i について，戦略集合 $S_i = Z_+$ であり，利得関数 u_{im} はパラメター m と戦略の組 $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ に関する**整数係数の多項式**である．すると，次の定理が成り立つ．

定理 4. **(Prasad [27])** あるゲームのクラス $\{G_m\}$ ついて，

1. 任意の $m \in Z_+$ に対して，G_m が混合戦略ナッシュ均衡をもつか否かは決定不能である．
2. 任意の $m \in Z_+$ に対して，G_m のナッシュ均衡は，**ランダム実数** Ω の2進展開の第 m 項が0ならば有限個，1ならば無限個存在する．

ここで1は，

$$\begin{gathered} G_m \text{ がナッシュ均衡をもつ} \Leftrightarrow \text{ディオファントス方程式} \\ P(m, x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ が整数解をもつ} \end{gathered}$$

となることを示し，ナッシュ均衡の存在をこの**ヒルベルトの10番問題の決定不能性**に帰着させることによって証明することができる．

2は，**アルゴリズム的情報理論**で基本的役割を果たしている**停止確率**という**ランダム実数** Ω が用いられており，前節のゲーデル型の不完全性定理をも超えて，一切の推論を無意味にする無秩序に支配された現象がゲーム理論の世界にも存在することを述べている．ランダムという用語は，このような混沌をアルゴリズム的に表現するものである．

4.1 停止確率

停止確率とは，次のように定義される実数 Ω である．

$$\Omega = \sum_n P(n), \quad where\ P(n) = \sum_{p|U(p)=n} 2^{-|p|}$$

ここに，$|p|$ はプログラム p を2進列でコード化したときの長さ，つまりビット数である．それゆえ，$P(n)$ は，任意のプログラム p が万能チューリングマシンU

に入力されたときに，Uが値 $n \in Z_+$ をプリントする確率であり，Ω は，Uが停止する確率を表す[5]．この意味で Ω は**万能チューリングマシンの停止確率**と呼ばれる．

4.2 ランダム数

自然数 $n \in Z_+$ について，

$$H(n) = \min_{p|U(p)=n} |p|$$

と定義される $H(n)$ を n の**複雑度**という．もしどんなプログラムも n を出力しない場合は $H(n) = +\infty$ と定義する．n の複雑度とは，このように，n を万能チューリングマシンに出力させるための，最小のプログラム p の長さのことである．複雑度の概念は，Kolmogorov（[18]），Chaitin（[7]）および Solomonoff [30] によって，ほぼ同時期に独立に発表された．

自然数 n は，その複雑度が自分自身の2進コード[6]の長さ $|n|$ よりはるかに小さくはないとき，**ランダム**であると定義される．すなわち，n に依存しない $c > 0$ があって，

$$H(n) > |n| - c$$

であるとき，n はランダムであるといわれる（Chaitin [9]）．たとえば，0と1を交互に1億個づつ並べてできる長さ2億ビットの列

01010101....0101

は，これよりはるかに短いプログラムによってプリントできるのでランダムではない．このように，ランダム数は自分自身より本質的に短いプログラムでは記述できない数であるから，その2進コードの各項を記述するには，それをそのまま入力するしかない．すでに出力された項と，次に出力される項との間にはどんな論理的関係もないので，この意味で「銭投げ」のベルヌイ試行によって各項を決定するのと区別できないのである．

この無秩序さは，次の定理が述べるように，ランダム数の著しい決定不能性となって現れる．

定理 5.（Kolmogorov [18], [19]）ランダムでない自然数の集合は，単純である．

このようなランダム数の無法則性は，無限の2進列の場合にはさらに制御できないものとなる．x を2進数の無限列とし，x_n を初項からの長さ $|x_n| = n$ の有限列とするとき，

$$\exists c \forall n [H(x_n) > |x_n| - c]$$

ならば，x は**ランダム**であるという（Chaitin [8]）．実数 x がランダムであるとは，x の小数点以下の2進展開がランダムであることをいう．

定理 6.（Chaitin [8]）停止確率 Ω はランダム実数である．

こうして，Prasad の定理の2は，ゲーム G_m のナッシュ均衡の個数が有限個か無限個かのいずれであるかを決定するには，均質なコインを投げるよりほかはないことを述べるものである．

---

[5] $\Omega \le 1$ であるためには，プログラムが self-delimiting であるという仮定が必要である．詳細は Chaitin [8] 参照．

[6] たとえば，$(empty, 0), (0,1), (1,2), (00,3), (01,4), (10,5), (11,6), \ldots$ とすれば，2進列 $a_n \ldots a_1 a_0$ と自然数 $x = 2^{n+1} - 1 + \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i$ が1対1に対応する．

4.3 指数的ディオファントス方程式

ナッシュ均衡のランダム性の源泉は，次の定理に述べられている奇妙な方程式の存在である．

定理 7. (Chaitin [10]) ある**指数的ディオファントス方程式**

$$L(m, x_1, ..., x_n) = R(m, x_1, ..., x_n)$$

が存在して，その解 $(x_1, ..., x_n)$ は，停止確率 Ω の２進展開の第m項が０ならば有限個，１ならば無限個存在する．

$L(m, x_1, ..., x_n) = R(m, x_1, ..., x_n)$ が指数的ディオファントス方程式であるとは，L, R のいずれも整数係数でかつ x^y の形をした項を許す多項式であることをいう．ちなみに Chaitin [11] は，この定理の指数的ディオファントス方程式を，２万個の未知数をもつ２００ページに及ぶ方程式として作成している．

さて，ゲーム G_m は，次のように与えられている．

1. $u_{1m}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = Q + (1 - (x_1 - x_2)^2 + x_3)^2(Q - 1)$
2. $u_{2m}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = Q + ((x_1 - x_2)^2 - x_3)^2(Q - 1)$
3. $u_{3m}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = Q + ((x_1 - x_2)^2 - x_3 - 1)^2(Q - 1)$
4. $u_{im}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = Q, \quad i = 4, \ldots, n + 1$

   where,

   (a) $Q \equiv Q(m, x_1, \ldots, x_{n+1})$
   $= 1 - [(P^2 - x_{n+1})^2 + (P^2 - x_{n+1} - 1)^2(P^2 + x_{n+1})]$

   (b) $P \equiv P(m, x_1, \ldots, x_n) = L(m, x_1, \ldots, x_n) - R(m, x_1, \ldots, x_n)$

ここに，$P \equiv L - R$ は定理７で存在が保証されている指数的ディオファントス多項式である．すると，ナッシュ均衡の存在の決定不能性は，まず次の２つの補題からしたがう．

補題 1. G_m がナッシュ均衡をもつ $\Leftrightarrow \exists x_1, ..., x_{n+1}[Q = 1]$

補題 2. (**Prasad [27, Lemma 1]**) $\exists x_1, ..., x_{n+1}[Q = 1] \Leftrightarrow \exists x_1, ..., x_n[P = 0]$

最後の右辺は決定不能なヒルベルトの１０番問題である．また，ナッシュ均衡のランダム性は，次の補題からの直接の結果である．

補題 3. (**Prasad [27, Corollary 1]**)．G_m のナッシュ均衡の数は，上の定理における指数的ディオファントス方程式 $L = R$ の解の個数に等しい．

ゲーム G_m のプレイヤーの数nは特定化されていないが，Jones = Matijasevíč [16] によれば，定理７は $n \geq 4$ で成立する．

5 終わりに

本稿で扱ったゲームはいずれも，ORや経済学に典型的に現れる意思決定問題をモデル化したものではない．その意味では，決定不能性やランダム性も大して重大ではないと思われるかもしれない．しかし，ここでは取り上げなかったが，Knoblauch [17] や Nachbar and Zame [22] は，ゲーム理論で普通に扱う無限回繰り返しゲームにおいて，計算不可能な最適反応しかもたない戦略や，計算不可能なサブゲーム完全均衡が存在することを証明しており，決定不能性は病理的な現象であるとは断定できないことを示している．

最近では，計算可能性理論のポジティブな応用も現れている．たとえば，Anderlini=Sabourian [3] や Anderlini [2] などでは，戦略の摂動に計算可能性を課した均衡選択の理論を展開しており，また，Howard [13] や Nakayama [25] では，自分や血縁を認識するプレイヤーの存在や行動について論じている．

また，情報の複雑度やランダム性などは，ゲーム理論にとっては新しい概念であり，目下のところわずかに Gilboa=Schmeidler [12] などで Kolmogorov complexity への言及が見られる程度にすぎない．しかし，最近の実験経済学や「実験数学」への関心の高まりの中で，認識一推論一決定の合理的手順の分析に不可欠な役割を果たすことが期待される．

References

[1] L. Anderlini, "Some Notes on Church's Thesis and the Theory of Games," *Theory and Decision*, **29** (1990), 15–52.

[2] L.Anderlini, "Communication, Computability and Common Interest Games," *Games and Economic Behavior* **27**(1999), 1–37.

[3] L.Anderlini and H.Sabourian, "Cooperation and Effective Computability," *Econometrica* **63**(1995),1337–1369.

[4] K.Binmore, "Modelling Rational Players I and II," *Economics and Philosophy* **3** (1987), 179–214, and **4** (1987), 9–55.

[5] G.Boolos and R.Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[6] G.W.Brown, "Iterative Solutions of Games by Fictitious Play," in *Activity Analysis of Production and Allocation*, T.Koopmans, ed, New York:Wiley, 1951

[7] G.Chaitin, "On the Length of Programs Computing Finite Binary Sequences," *Journal of the ACM* **13**(1966),547–569.

[8] G.Chaitin, "A Theory of Program Size Formally Identical to Information Theory," *Journal of the ACM* **22**(1975),329–340.

[9] G.Chaitin, "Algorithmic Information Theory," *Encyclopedia of Statistical Sciences* **1**(1982),38–41

[10] G.Chaitin, "Incompleteness Theorems for Random Reals, " *Advances in Applied Mathematics* **8**(1987), 119–146.

[11] G.Chaitin, *Algorithmic Information Theory* Cambridge University Press, 1987.

[12] I.Gilboa and D.Schmeidler, "Cas-Based Knowledge and Induction," (1996),mimeo.

[13] J.V.Howard, "Cooperation in the Prisoner's Dilemma," *Theory and Decision* **24** (1988), 203–213.

[14] J.P.Jones, "Classification of Quantifier Prefixes Over Diophantine Equations," *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **27**(1981), 403–410.

[15] J.P.Jones, "Some Undecidable Determined Games," *International Journal of Game Theory* **11** (1982), 63–70.

[16] J.P.Jones and Y.V.Matijasevič, "Exponential Diophantine Representation of Recursively Enumerable Sets," in *Proceedings of the Herbrand Symposium, Logic Colloquium '81*, J.Stern, ed, *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics* **107**, 159-177, Norrth-Holland, Amsterdam, 1982.

[17] V.Knoblauch, "Computable Strategies for Repeated Prisoners' Dilemma," *Games and Economic Behavior* **7** (1994), 381–389.

[18] A.N.Kolmogorov, "On Tables of Random Numbers," *Indian Journal of Statistics* **25**(1963), 369–376.

[19] A.N.Kolmogorov, "Three Approahes to the Quantitative Definition of Information," *Problems of Information Transmission* **1**(1965), 1–7.

[20] L.E.Lemke and J.T.Howson, "Equilibrium Points of Bimatrix Games," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **12**(1962), 413–423.

[21] Y.V.Matijasevič, "Enumerable Sets are Diophantine," *Doklady Akademii Nauk SSSR* **191**(1970),279–282.

[22] J.H.Nachbar and W.R. Zame, "Non-Computable Strategies and Discounted Repeated Games," *Economic Theory* **8** (1996), 103–122.

[23] 中山幹夫, "限定合理性とマシンプレイヤー," 第１１回ＲＡＭＰシンポジウム論文集 (1999),15–25.

[24] 中山幹夫, "ゲームと戦略の計算可能性について," 三田学会雑誌 **91** (1999), 592–615.

[25] M.Nakayama, "Kinship-Recognition and Self-Sacrifice in Prisoners' Dilemma," (1999), mimeo.

[26] E.L.Post, "Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and Their Decision Problems," *Bulletin of the American Mathematical Society* **50**(1944),284–316.

[27] K.Prasad, "Computability and Randomness of Nash Equilibrium in Infinite Games," *Journal of Mathematical Economics* **20** (1991), 429-442.

[28] M.O.Rabin, "Effective Computability of Winning Strategies," in *Contributions to the Theory of Games, Annals of Math. Studies*, M.Dresher et al. eds. Princeton University Press: Princeton, 1957.

[29] J.Robinson, "An Iterative Method of Solving a Game," *Annals of Mathematics*, **54** (1951), 296–301.

[30] R.J.Solomonoff, "A Formal Theory of Inductive Inference," *Information and Control* 7(1964), 1–22, also 224–254.

[31] E.Zermelo, "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels," *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, **II**(1912), 501–504.