探索ゲームとその周辺

菊田健作
神戸商科大学商経学部

1．はじめに．

探索理論 (Search Theory) の対象としては，遭難漁船や魚群の捜索等のほか，通信線などの装置の故障の発見，鉱脈探し，犯人の捜査，図書館での本探し，ガンなどの予防検診，スーパー・マーケットにおける商品の配列，ハッカーの探索など種々考えられる．これらは数学モデル化されて現在でも盛んに研究されている．本報告では次の３つの話題について述べる．第２節において，切り替え費用を要するグラフ上の探索ゲームについて１９９５年頃までの結果について述べる．第３節において，(Noisy) Accumulation Game について得られた結果について述べる．第４節では，Rendezvous Search Problem（探索問題の一種）の最近の研究についていくつか紹介し，第５節で当面の研究課題について述べる。

２．切り替え費用を要する探索ゲーム

２．１．グラフ上の探索問題

探索状況の一つのモデルとしてｎ個の箱（あるいは領域）の一つに入っている静止目標物を見つけるにいたるまでの期待総費用を最小化する問題が考えられる．この問題に対する基本的モデルの分析はほぼなされているとはいうものの，切り替え費用を考慮したモデルに関して得られている結果はスペシャルケースについての場合が多い．その理由として，理論的取り扱いが難しくなることがあげられる．本節の目的は，(i) 切り替え費用を考慮し，(ii) 探索者の初期位置が特定されており，かつ (iii) 見逃し確率を考慮しない，場合に限って，この問題を解説，また分析するときの問題点について考え，今後研究すべき方向を探ることである．ここであげられている内容の詳細については [Kikuta1995],[菊田 1992], その他を参照されたい．[Ahlswede/Wegener 1987],[Gal 1980],[中井 1986],[NRL 1991],[Ruckle 1983],[坂口 1981] 等において，この分野の研究の状況について詳しく述べられているし，本稿で引用できなかった成書，論文も多数紹介されている．[Lossner/Wegener 1982] では，切り替え費用がより一般的でかつ見逃し確率を考慮したモデルに対するベイズ解について論じられている．[Gluss 1961] は，(i),(ii),(iii) を満足するモデルを扱った最初のものと考えられ，やはりベイズ解について論じられている．[Gal 1980] では，箱をチェックする費用を考えなくてもよい場合に，ミニマックス解について論じられている．[Ruckle 1983] では，探索者の出発位置が特定されておらず，箱をチェックする費用を考えなくてもよい場合に，ミニマックス解について論じられている．

グラフ $G=(V,E)$ 上の探索問題について述べる．$V=\{0,1,2,...,n\}$ を点集合という．E は V の二つの点 i,j の組 (i,j) からなる集合である．E の元を辺（edge）といい，E を辺集合という．点 $1,\ldots,n$ のどれか一つに静止目標物がある．探索者（seeker）は点０から出発して，辺上を移動しつつ，点を一つずつ調べていく．見逃し確率はどの点についても 0 である．点 $i(i=1,\ldots,n)$ を調べる費用は $c(i)$（≥ 0）$(i=1,\ldots,n)$ である．$(i,j)\in E$ のとき，点 i から j への移動費用は $d(i,j)(>0)$ であるとする．$(i,j)\notin E$ のときは，i と j とを結ぶ道に関する移動費用 (Traveling Cost) を考え，その最小のものを $d(i,j)$ と定義する．$d(i,j)$ を切り替え費用 (Switching Cost) ということもある．即ち，探索者が点 i から j へと探索を切り替えるときにかかる費用である．探索者は目標物を発見するまでの費用が，ある意味で小さくなるように，調べる順序すなわち戦略 (strategy) を決定せねばならない．

２．２．探索ゲーム

本節では，探索者の決定基準として次に述べる二つを考えることにする．探索者が，目標物が各点に存在する事前確率を計算できる場合（以後，リスクの場合という），目標物を発見するまでの期待総費用を計算できるので，探索者がリスクに対して中立であれば，期待総費用を最小にするような戦略を選ぶべきである．一方，事前確率を計算できない場合（以後，不確実性の場合という），探索者は最悪の場合を想定し，その場合の総費用が最小になるような戦略を選ぶかも知れない．本節では，特に，目標物も意志を持つと想定して，探索者と目標物の双方がゼロ和ゲームを行なう．このとき，目標物を hider ということにする．探索者は，ゲームの均衡点に対応する戦略を求めるとする立場をとる．探索者の（純粋）戦略は $N=V\backslash\{0\}=\{1,\ldots,n\}$ 上の置換で表すことが出来る．N 上の置換全体の集合を Σ で表す．$\sigma\in\Sigma$ に対し，探索者は $\sigma(0),\ldots,\sigma(n)$ の順に探索するとする．σ に対し，σ と逆の順の探索を行なわせる置換を $r\sigma$ で表す．すなわち，$(r\sigma)(i)=\sigma(n-i+1), i=1,\ldots,n$. 目標物が点 i にあるとして，探索者が戦略 $\sigma\in\Sigma$ をとるならば，目標物を発見するまでの費用は，$k=\sigma^{-1}(i)$ とおいて，$f(i,\sigma)=d(\sigma(0),\sigma(1))+\cdots+d(\sigma(k-1),\sigma(k))+c(\sigma(1))+\cdots+c(\sigma(k))$ となる．ここに，$\sigma(0)=0$. リスクの場合，目標物が点 $1,\ldots,n$ に存在する事前確率をそれぞれ $p_1,\ldots,p_n$ とするとき，$p=(p_1,\ldots,p_n)$

とおくならば，探索者が戦略 σ を用いたときの期待探索費用 $f(p,\sigma)$ は $f(p,\sigma)=p_1f(1,\sigma)+\cdots+p_nf(n,\sigma)$ となる．探索者の問題は条件 $\sigma\in\Sigma$ の下で $f(p,\sigma)$ を最小化することである．不確実性の場合，hider の戦略は，どの点に隠れるかということであるから，N を hider の戦略全体の集合と考えることが出来る．hider，探索者がそれぞれ戦略 i,σ をとったときの探索費用は $f(i,\sigma)$ である．hider，探索者の利得はそれぞれ，$f(i,\sigma)$，$-f(i,\sigma)$ であるとする．探索者の問題は条件 $\sigma\in\Sigma$ の下で $\max\{f(i,\sigma):i\in N\}$ を最小化することである．

例1．$V=\{0,1,2\}$，$E=\{(0,1),(1,2)\}$．$\sigma(1)=1,\sigma(2)=2$ とする．$f(1,\sigma)=d(0,1)+c(1),f(1,r\sigma)=d(0,1)+d(1,2)+d(2,1)+c(1)+c(2),f(2,\sigma)=d(0,1)+d(1,2)+c(1)+c(2),f(2,r\sigma)=d(0,1)+d(1,2)+c(2)$ となる．不確実性の場合，2×2 の行列ゲームとして表される．minimax 値 $=f(2,\sigma)>$ maxmin 値 $=f(2,r\sigma)$ であるから，純戦略均衡点はない．最適戦略は，$p_1=c(1)/[d(1,2)+d(2,1)+c(1)+c(2)],q\sigma=[d(2,1)+c(1)]/[d(1,2)+d(2,1)+c(1)+c(2)]$ のように，混合戦略で与えられる．$c(1)=c(2),d(1,2)=d(2,1)$ ならば $q\sigma=1/2$ となる．一方，リスクの場合、$p_1f(1,\sigma)+p_2f(2,\sigma)$ と $p_1f(1,r\sigma)+p_2f(2,r\sigma)$，すなわち，$c(1)+p_2[d(1,2)+c(2)]$ と $d(1,2)+c(2)+p_1[d(2,1)+c(1)]$ の大小を比較することになる．ここに，p_1,p_2 は事前確率である．これより，$p_1>c(1)/[d(1,2)+d(2,1)+c(1)+c(2)]$ ならば，探索者は σ を採るべきである．

例1からわかるように，純戦略の範囲内では均衡点が存在するとは限らない．そこで，戦略の範囲を拡げて，hider，探索者の混合戦略全体の集合をそれぞれ P,Q とすると，探索者の問題は条件 $q\in Q$ の下で $\max\{f(p,q):p\in P\}$ を最小化することである．2.3 節では例1を点の個数が n である場合に一般化したモデルを考える．

２．３．ツリー上の探索ゲーム．

リニアグラフ上の探索問題を考える．グラフは次の図のようになる．

[図 1.]

点 $1,\ldots,n$ のどれか一つに静止目標物がある．探索者は点0から出発する．見逃し確率はどの点についても0である．分析を容易にするために次のことを仮定する．

仮定１：点を調べる費用はどの点についても $c(\geq 0)$ である．つまり，$c(i)=c,i=1,\ldots,n$.

仮定２：点 i から点 j への移動費用は $|i-j|$ である．つまり，$d(i,j)=|i-j|$，すべての i,j に対して．

以上の条件の下で，探索者は，点を一つずつ調べていく．彼は目標物を発見するまでの費用が，ある意味で小さくなるように，探索を開始する前に，調べる順序すなわち戦略（strategy）を決定せねばならない．まず不確実性の場合にこの問題を考えてみよう．例1で見たように，純戦略均衡点は一般には存在しない．hider の一つの混合戦略 p^* を次のように定義する．

$$p_i^*=\frac{b\Gamma(b+n-i)\Gamma(n)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(b+n)},i=1,\ldots,n. \tag{2.1}$$

ここに，$b=c/(2+c)$ であり，$\Gamma(\bullet)$ はガンマ関数である．また，N の部分集合 S に対し，探索者の一つの戦略 $\sigma(S)$ を次のように定義する．探索者はまず，S に属する番号のうち，小さいものから順に調べる．次に，$N\backslash S$ に属する番号のうち，大きいものから順に調べる．$q(S)$ は $\sigma(S)$ と $(r\sigma)(S)$ とを確率 1/2 ずつでとる戦略であるとする．

例2．$n=5$，$S=\{1,3,5\}$ とすると，$\sigma(S)$ は，箱を 1,3,5,4,2 の順にチェックしていく．次に，σ' は，箱を 3,4,2,1,5 の順にチェックしていく戦略を表すものとする．N のすべての部分集合 T に対し，$\sigma'\neq\sigma(T)$ である．移動距離の点で，$\sigma(S)$ は σ' より有利である．

定理１．ゲームの値は，$n+(n+1)c/2$ である．p^* は hider の唯一の最適戦略である．一方，N の任意の部分集合 S に対し，$q(S)$ は探索者の一つの最適戦略である．

この定理の証明の過程で次のことが示される：すべての $p\in P$ に対して，$f(p,q(S))=n+(n+1)c/2$. つまり，探索者は戦略 $q(S)$ を採用しているかぎり，hider の戦略に関係なく，期待移動距離は n であり，調べるべき点の期待個数は $(n+1)/2$ である．さらに，定理1より，hider が戦略 p^* を採用しているかぎり，探索者は，少なくとも n だけの期待移動距離を持ち，調べるべき点の期待個数は少なくとも $(n+1)/2$ である．$c=0$ であれば，$p^*=(0,\ldots,0,1)$ となる．つまり，点をチェックする費用を無視できるならば，探索者の出発位置からもっとも遠いところに hider は隠れるべきである．また，$c\to\infty$ のとき，$p^*\to(1/n,\ldots,1/n)$ となる．つまり，点をチェックする費用に比べて移動費用が非常に小さいときは，hider はどの点にも同じ比率で隠れるべきである．一般に，

$$p_1^*<p_2^*<\cdots<p_n^* \tag{2.2}$$

が成り立つ．つまり，hider は探索者の出発位置から遠ざかるほど隠れる確率を大きくすべきである．さらに，$n \to \infty$ のとき，(ゲームの値) $/n$ は $1 + c/2$ に近づく．また，(2.1) とスターリングの公式とから，$n \to \infty$ のとき，$np_i^* \to b(1-t)b-1$ である．ここに，$0 \le t \le 1, t \le i/n \le t + 1/n$ である．

[図 2. $b(1-t)b-1$ のグラフ]

次に，仮定 1，2 を外してみよう．ただし，点から点への移動費用は次を満たすとする：

$$
(2.3) \qquad \begin{aligned} &1 \le i < j \le n \text{ であるようなすべての } i,j,k \text{ に対し}, d(i,j) + d(j,k) = d(i,k), \\ &1 \le i,j \le n, i \ne j \text{ であるようなすべての } i,j \text{ に対し}, d(i,j) = d(j,i), \text{ かつ } d(i,j) > 0. \end{aligned}
$$

なお，$d(i,i) = 0$, $i = 1,\dots,n$, としておく．$s(k) = c(n-k+1) + c(n-k+2) + \cdots + c(n), b(k) = c(n-k)/[2d(n-k,n) + s(k)], k = 1,\dots,n-1, b(0) = +\infty$ とおく．確率ベクトル $p^1,\dots,p^n$ を帰納的に次のように定義する：

$$
(2.4) \qquad p^1 = (1), \text{ かつ } p^k = \frac{1}{1+b(k-1)}(b(k-1), p^{k-1}), k = 2,\dots,n.
$$

p^k が確率ベクトルであること，p^n が p^* の一般化になっていること，は容易に確認できる．次に，2^{k-1}-ベクトル q^k, $k = 1,\dots,n$, を帰納的に次のように定義する：

$$
(2.5) \qquad q^1 = (1), \text{かつ } q^k = \frac{1}{1+a(k-1)}(a(k-1)q^{k-1}, q^{k-1}), k = 2,\dots,n.
$$

ここに，$k = 1,\dots,n-1$ に対して，$a(0) = +\infty$ かつ $[2d(n-k,n) + s(k+1)]/[1+a(k)] = [2d(n-k+1,n) + s(k)]/[1+a(k-1)] + d(n-k,n-k+1) + c(n-k+1)a(k-1)/[1+a(k-1)]$．$q^k$ の前半分の成分 (i.e., 第 1 から第 2^{k-2} 成分まで) は，$\{n-k+2,\dots,n\}$ 上の置換 σ を $\{n-k+1, n-k+2,\dots,n\}$ 上の置換 σ' に拡張して，$\sigma'(n-k+1) = n-k+1$, $\sigma'(i) = \sigma(i)$, $i = n-k+2,\dots,n$, としたものの全体の集合上の確率分布，q^k の後半分の成分は，$\{n-k+2,\dots,n\}$ 上の置換 σ を $\{n-k+1, n-k+2,\dots,n\}$ 上の置換 σ' に拡張して，$\sigma'(n) = n-k+1$, $\sigma'(i) = \sigma(i+1)$, $i = n-k+1,\dots,n-1$, としたものの全体の集合上の確率分布である．さらに，q^k に $k! - 2^{k-1}$ 個のゼロ成分を加えて q^{*k} に拡張する．ここに，q^{*k} は $k!$ 個の成分からなる．すなわち，$q^{*k} = (q^k, 0)$,0 は $k! - 2^{k-1}$ 次ゼロベクトル．q^{*k} は $\{n-k+1, n-k+2,\dots,n\}$ 上の置換全体の集合上の確率分布である．

<u>定理 2.</u> p^n は hider の唯一の最適戦略である．q^{*n} は探索者の一つの最適戦略である．ゲームの値 $v(n)$ は次の再帰関係式で与えられる：$v(0) = 0$ かつ，$k = 1,\dots,n$, に対し，$v(k) = d(n-k,n-k+1) + c(n-k) + v(k-1)/[1+b(k-1)]$, あるいは $v(k) = v(k-1) + d(n-k,n-k+1) + c(n-k)a(k-1)/[1+a(k-1)]$.

一般に，

$$
(2.6) \qquad \frac{p_1^n}{c(1)} < \frac{p_2^n}{c(2)} < \cdots < \frac{p_n^n}{c(n)}
$$

が成立する．これは，仮定 1，2 の下では，(2.2) に帰着する．hider は探索者の出発位置から遠ざかるほど単位チェック費用当たりの隠れる確率を大きくすべきである．また，$p_i^n = b^{n-i}p_n^n(1+b^1)(1+b^2)\cdots(1+b^{n-i-1})$, かつ $p_n^n = 1/[(1+b^1)(1+b^2)\cdots(1+b^{n-1})]$. これは，仮定 1，2 の下では，(2.1) に帰着する．仮定 1 の下では，すべての $k = 1,\dots,n-1$, に対して，$a(k) = 1$ である．それゆえ，q^n の成分はすべて $1/2^{n-1}$ に等しい．$c \to 0$ ならば，$p^n \to (0,\dots,0,1)$. また，$c \to +\infty$ ならば，$b^k \to 1/k$ となり，$p^n \to (1/n,\dots,1/n)$. これらは定理 1 のすぐ後で述べた p^* の挙動の一般化になっている．ところで，ある点 i のチェック費用のみが特に大きい場合，すなわち，$c(i) \to +\infty$ の場合，$p_i^n \to 1$ で，他の成分は 0 に収束する．つまり，hider は，点 i に隠れるべきである．また，探索者は点 i を最初にチェックするような戦略のみを考えるべきであるという結果も得られる．しかしゲームの値は $+\infty$ となる．$d(i,i+1) \to +\infty$ の場合，hider は点 $1,\dots,i$ には隠れるべきではない．ゲームの値は $+\infty$ となる．ある点 $i(\ne n)$ のチェック費用のみが特に小さい場合，すなわち，$c(i) \to 0$ の場合，$p_i^n \to 0$, すなわち，hider は点 i に隠れる確率を小さくすべきである．

次に，リスクの場合を考えてみよう．これを最初に考えたのは Gluss である．既に [Gluss 1961] に解説されているように，彼は探索者の戦略全体の集合を $\{\sigma(S) : S = \{r,\dots,n\}, 1 \le r \le n\}$ と $\{\sigma(S) : S = \{1,\dots,u\}, 0 \le u \le n-1\}$ の和集合に限定して，その中で最適なものを求めた．ただし，仮定 1，2 をおいて，事前確率

は $p_i^\sharp = 2i/[n(n+1)],\ i=1,\dots,n$ であった．次に，仮定１，２を外し，(2.3) を満たすような，一般の $d(i,j)$ かつ $c(i)$ の下で考えてみよう．ここで，事前確率 $p=(p_1,\dots,p_n)$ に対し，

$$\frac{p_1}{c(1)} < \frac{p_2}{c(2)} < \cdots < \frac{p_n}{c(n)} \tag{2.7}$$

かつ $i<j,\ i'<j',\ i<i'$ であるような i,i',j,j' に対し，

$$\frac{(p_{i+1}+\cdots+p_j)}{d(i,j)} < \frac{(p_{i'+1}+\cdots+p_{j'})}{d(i',j')} \tag{2.8}$$

を仮定する．(2.7) は (2.6) と同様であり，(2.8) は，探索者の出発位置から遠くなるほど単位距離当たりの存在確率が大きくなることを意味する．

定理３．問題：最小化 $f(p,\sigma)$ 条件 $\sigma\in\Sigma$，において，σ が最適であれば，N のある部分集合 S に関し，$\sigma=\sigma(S)$．

定理３により，探索者は自分が検討すべき戦略集合を小さくすることが出来る．すなわち，彼は条件 $S\subseteq N$ の下で $f(p,\sigma(S))$ を最小化する問題を考えればよい．$z(i)=[p_i-1]/[p_i+\cdots+p_n], e(i)=c(i-1)/[2d(i-1,n)+c(i)+\cdots+c(n)]$，とおくと次の定理を得る．

定理４．$i=2,\dots,n$ に対し，$z(i)\neq e(i)$ と仮定する．探索者の唯一の最適戦略は $\sigma(\{i-1: z(i)>e(i)\})$ である．

それでは，定理４で述べられている戦略は Gluss が考えた戦略集合に常に含まれるのだろうか．次の例はこれに否定的に答える．

例３．$n=4$, $p=(15,17,28,80)/140$. $c(i)=1$, $i=1,2,3,4$, とする．すべての i,j に対して $d(i,j)=|i-j|$, とする．定理４により，最適な戦略は，$\sigma(\{1,3\})$ すなわち 1, 3, 4, 2 の順に調べることである．ところが，この戦略は Gluss の戦略集合には含まれない．

例３から次のことがわかる．事前確率が (2.7),(2.8) を満たしただけでは，最適戦略が Gluss の戦略集合に含まれるとは限らない．しかし，事前確率が点の番号 i に関して線形であれば，仮定１，２の下では，最適戦略が Gluss の戦略集合に含まれる．

定理５．事前確率が $p_i=a+bi$, $i=1,\dots,n$. $a=1/n-b(n+1)/2$, $0<b<2/[n(n+1)]$ であるとする．仮定１，２の下では，最適戦略は Gluss の戦略集合に含まれる．

Gluss が与えた事前確率 $p^\sharp$ は，定理５の仮定を満たす．ゆえに，Gluss は厳密に最適な戦略を得ていたことがわかる．

さて、定理２はグラフが一般の rooted tree の場合（探索者は最初に root に居る）に拡張される。

［図３．］

例４．$n=9$, $E=\{(0,1),(1,2),(1,3),(3,4),(3,5),(0,6),(6,7),(6,8),(6,9)\}$. tree の性質により、root 0 を除く 9 個のそれぞれの点 j に対して枝 $(i,j), i<j$ が対応する。そこで、$w(j)\equiv 2d(i,j)+c(j)$ とおく。$w(S)=\sum_{i\in S}w(i), S\subseteq D=V\backslash\{0\}$ とする．hider の最適戦略 p^* は次式を満たす．ただし，$p^*(D)=1, p^*(i)\geq 0, i\in D$ である．$p^*(1)/c(1)=p^*(2)/w(2)=p^*(345)/w(345), p^*(6)/c(6)=p^*(7)/w(7)=p^*(8)/w(8)=p^*(9)/w(9), p^*(12345)/w(12345)=p^*(6789)/w(6789)$，かつ $p^*(3)/c(3)=p^*(4)/w(4)=p^*(5)/w(5)$. 一方，探索者の最適戦略は，点 1 に来たとき，確率 $r(\tau(1<))$ で点 1 を調べてから次に進む，確率 $1-r(\tau(1<))$ で点 1 を調べずにまず点 2 または 3 に進む，また，確率 $r(1;[2,3]), 1-r(1;[2,3])$ でそれぞれ点 2,3 の方に進む，等々である．$r(1;[2,3])=[z(2)+w(345)-v(345)]/w(2345), r(\tau(1<))=[c(1)+w(2345)-v(2345)]/[c(1)+w(2345)],\dots$ である．$c(i)\to 0,\forall i$ ならば $p^*(i)\to 0, i=1,3,6$ である．すべての i について，$c(i)\to\infty$ ならば $p^*(i)\to 1/9$. ゲームの値 v_{K_0} も次のような再帰式で与えられる：$v_{K_0}=[w(12345)v_1+w(6789)v_6+w(12345)w(6789)]/w(123456789), v_1=d(1)+c(1)+w(2345)v_{K_1}/[c(1)+w(2345)], v_6=d(6)+c(6)+[w(789)v_{K_6}]/[c(6)+w(789)]$, etc.

２．４．リニアグラフ上の探索問題

この節では次の図で表されるグラフ上の探索問題に対してリスクの場合のみを考える．

[図４.]

点 $-n,-(n-1),\dots,-1,1,\dots,n$ のどれか一つに静止目標物がある．探索者は点 0 から出発する．見逃し確率はどの点についても 0 である．点を調べる費用はどの点についても $c(\geq 0)$ である．点 i から点 j への移動費用

は $|i-j|$ である．さらに事前確率 $p=(p_{-n},\ldots,p_{-1},p_1,\ldots,p_n)$ が与えられている．以上の条件の下で，探索者は，点を一つずつ調べていく．探索者は目標物を発見するまでの期待総費用が，小さくなるように，調べる順序すなわち戦略（strategy）を決定せねばならない．この問題に対して，厳密解はまだ得られていない．簡単のために事前確率 p について次の仮定をおく：$p_i=p_{-i}(1\le i\le n), p_i>0(1\le i\le n), p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$. つまり，存在確率は，探索者の出発位置に関して対称であり，探索者の出発位置から遠くなるほど存在確率は小さくなる．$\underline{N}=\{-1,\ldots,-n\}$ とおく．分析を容易にするために，探索者の戦略を次のものに限定する：$s=[l_1,l_2,\ldots,l_m], 1\le l_1<l_2<\cdots<l_m=n, l_i(1\le i\le n)$ は整数．つまり，まず点 -1 から $-l_1$ まで順に探索，次に点 1 から l_2 まで探索，次に点 $-(l_1+1)$ から $-l_3$ まで探索，次に点 l_2+1 から l_4 まで探索，以下同様に探索していく．m が偶数であるか奇数であるかによって探索手順の終了の仕方に違いがあるが，とにかく $N\cup\underline{N}$ のすべての点をチェックする手順を与えている．この型の戦略全体の集合を T で表す．事前確率 p, 戦略 s，チェック費用 c のときの期待探索費用を $f(p,s,c)$ とすると，探索者の問題は，条件 $s\in$ T の下で，$f(p,s,c)$ を最小化することになるが，$f(p,s,c)$ の s に依存しない項を除くと，結局

$$\text{最小化}\ g(p,s,c)=2A(p,s)+cB(p,s)\ \text{条件}\ s\in \mathrm{T}, \tag{2.9}$$

ここに，$A(p,s)=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^k l_j r(l_{k-1}+1,l_{k+1}), B(p,s)=\sum_{k=1}^m l_k r(l_{k-1}+1,l_{k+1}), r(i,j)=\sum_{k=i}^j p_k, l_0=0, l_{m+1}=n$ である．$A(p,s)$,$B(p,s)$ はそれぞれ移動距離，点のチェック費用に関係した部分である．

<u>定理 6.</u> 数 $c_0,c_1,\ldots,c_k$ と S の元 $s_0,s_1,\ldots,s_k$ があって $c_0=0<c_1<\cdots<c_k<c_{k+1}=+\infty$, が成り立つ．$s_i$ が (2.11) の最適解であるのは $c_i\le c\le c_{i+1}$ のとき，そのときに限る．さらに，$A(s_0)<A(s_1)<\cdots<A(s_k), B(s_0)>B(s_1)>\cdots>B(s_k)$, かつ $g(p,s_0,c_0)<g(p,s_1,c_1)<\cdots<g(p,s_k,c_k)$.

この定理から，c が増加するにつれて $A(\bullet)/B(\bullet)$ は増加，つまり $B(\bullet)$ をより重視すべきであることがわかる．次の例は $n=5$ の場合の計算例である．またこの例により，実際，途中で折り返した方が有利であることが起こりえることがわかる．

<u>例 5.</u> $n=5,\ p_i=(n+1-i)/(n^2+n),\ i=1,2,3,4,5.$ $A(\bullet)$ と $B(\bullet)$ を直接計算することにより，$c_1=4, c_2=20, c_3=40, s_0=[3,5], s_1=[2,4,5], s_2=[1,3,4,5], s_3=[1,2,3,4,5]$ であることがわかる．$g(p,s_0,c)=4.6+2c, g(p,s_1,c)=5+1.9c, g(p,s_2,c)=5.6666\ldots+1.8666\ldots c, g(p,s_3,c)=7+1.8333\ldots c$ である．

<u>定理 7.</u> $s=[l_1,l_2,\ldots,l_m]$ が (2.9) の最適解ならば，$p_{l_k}>p_{l_{k+1}}, k=1,\ldots,m-1$.

つまり，最適な戦略の下では，折り返す所においては，事前確率が減少していなければならない．このことから，$p_1=p_2=\cdots=p_n$ ならば，最適な戦略は $[n]$ でなければならないことが導かれる．定理 7 は差分不等式を解くことにより得られる．

問題 (2.9) に対して動的計画法を用いて接近することも出来る．$p_j^{x-1}(x\le|j|\le n)$ を，番号が $-(x-1)$ から $x-1$ までの点をチェックして，目標物を発見できず，探索者は点 $x-1$ にいるという条件の下で，目標物が点 j にある事後確率とする．これは，x と j のみに依存する．そこで，$W(x)(1\le x\le n)$ を，上と同じ条件の下，以後最適にふるまったときの期待費用とする．Bellman による最適性の原理により，

$$\begin{aligned} W(x)=\min_{x\le\ell\le n}\{&(1+c)\sum_{j=x}^{\ell}(j-x+1)p_j^{x-1}+\sum_{j=x}^{\ell}(j+2\ell-x+1)p_j^{x-1}+c\sum_{j=x}^{\ell}(j+\ell-2x+2)p_j^{x-1}\\ &+[3\ell-x+1+2(\ell-x+1)c+W(\ell+1)]\times 2r^{x1}(\ell+1,n)\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

ここに，$r^{x-1}(i,j)=\sum_{k=i}^j p_k^{x-1}$. 再帰方程式 (2.10) を境界条件 $W(n+1)=0$ とともに解くことにより，最適な戦略を見つけることが出来る．$n=5$ の場合，例 4 で示された結果と同じものを，(2.10) を用いて得ることが出来る．n が比較的小さい場合は，与えられた c に対して，(2.10) を用いて最適な戦略を計算できる（$n=10$ の場合の計算例は [Kikuta 1990]）．n が大きくなると計算の手間が著しく増大する．そのような場合は，戦略の型をさらに限定することも一つの方法である．

<u>3 .Accumulation Game.</u>

Accumulation Game は査察（Inspection）あるいは検証の一つの数学モデルである。表 1 のように種々の場合を考えることができるが．まず，探索領域が離散的で object も離散の場合について説明する．2 人の players（Hider と探索者）がいる。n 個の箱があり、毎回（たかだか、k 回）hider と探索者は同時に、hider は h 個の object を n 個の箱のうち、空である箱のいずれかに隠す。各箱に高々 1 個．一方探索者は s 個の箱を調べる．

（1回目はすべての箱が空）．探索者が object が隠されている箱を調べたとき、確率1でそれを見つける。探索者は hider の選択を知ることはできない。k 回の後（あるいは k 回に達する前に）hider が N 個の箱に object を隠すことができれば hider の勝ちであり、k 回終了までに、N 個に達しないときは探索者の勝ちであるとする．

Feature	*Easy alternative*	*Hard alternative*
Type of media	Discrete	Continuous
Nature of location	Discrete	Continuous
Relation of locations	Independent	Related
Numcer of searches per turn	Fixed	Variable
Finding probability	1	$p \in [0,1]$
Hiding rules	One of each location/ all at one location	Variable
Time	Limited	Unlimited
Movement of objects	No	Yes
Result of finding	Seeker wins/seizes object	Seizure or more searches
data from other locations	No	Yes
Seeker strategy	Random	Game theoretic optimal
Hider information	Location of each/no search	Location of finds

[表1．p.396 of Kikuta/Ruckle 1997]

探索者が調べた箱の番号を hider がどの程度知ることができるかによって、game は3つに分かれる．

(i) Noisy Case: 毎回，hider は探索者が調べた箱の番号を知ることができる，

(ii) Quiet Case:探索者が object を見つけたときのみ、hider は探索者が調べた箱の番号を知ることができる，

(iii) Very Quiet case: 毎回，hider は探索者が調べた箱の番号を知ることができない．

ここでは、Noisy Case の解析結果を報告する。ある turn の後，発見されずに残っている object 数を M とする．後 k 回残っている時，以後最適にふるまった時のゲームの値 $V(M,k)$ とする．次の再帰方程式が成り立つ：

$$V(M,k)=\sum_{i=0}^{s}P_M(i)V(M+h-i,k-1), V(M,k)=\begin{cases}0 & \text{if } k=0 \text{ and } M<N;\\ 1, & \text{if } M=N,\end{cases}$$

ここに，$P_M(i)=\binom{M+h}{i}\times\binom{n-M-h}{s-i}/\binom{n}{s}$．この再帰方程式を使って計算した例を以下に示す．まず，$n=100, N=42, h=s=3, M=0, k=20$ のとき，ゲームの値は 0.85324 である，$n=100, N=42, h=s=3, M=22, k=10$ のとき，ゲームの値は 0.5389 である．$n=100, N=30, h=2, s=6$ での計算例を以下の表に示す．

k/M	0	3	15	25	28
5	0	0	0	0.47536	0.91556
10	0	0	0.05621	0.93249	0.99325
15	0.00002	0.00249	0.62132	0.99315	0.99994
20	0.14001	0.30757	0.93538	0.99934	0.99995
25	0.69564	0.81726	0.99234	0.99994	0.99999

[表2. p.406 of Kikuta/Ruckle 1997]

さらに，発見確率を 0.6 としたら，次のようになる．

k/M	0	3	15	25	28
5	0	0	0	0.9091	0.9947
10	0	0	0.05833	0.9991	1
15	0.0059	0.1496	0.9871	1	1
20	0.79	0.9231	0.9998	1	1
25	0.9942	0.9984	1	1	1

[表3. p.406 of Kikuta/Ruckle 1997]

次に，unit interval $I = [0, 1]$ での game を考える．探索者は毎回，長さ $s(< 1)$ の I の部分開区間 A を調べる．一方，hider は h 単位の物質を，上の境界が I 上の連続関数 f の形をとり $\int_0^1 f(t)dt = h$ を満たすように，I 上に隠す．$\int_{I\setminus A} f(t)dt \geq 1$ ならば hider の勝ち，そうでないときは探索者の勝ちである．$s < 1$ に対し，$p(s) = p$ を I を覆うのに必要な長さ s の閉区間の最小数であると定義する．探索者の被覆戦略とは確率 $1/p$ で区間 $[j/p, (j+1)/p], j = 0, 1, \ldots, p-1$ を選ぶ戦略である．hider の戦略 $P(t_0, M)$ を次の関数で表されるものとする．

$$f_{t_0,\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{M(t-t_0-\epsilon)}{\epsilon^2} & \text{if } t_0 - \epsilon \leq t \leq t_0; \\ \frac{M(t_0+\epsilon-t)}{\epsilon^2} & \text{if } t_0 \leq t \leq t_0 + \epsilon; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1 回限り（i.e., $k = 1$）のゲームにおいて，$1 \leq h < p/(p-1)$ ならば，ゲームの値は $(p-1)/p$ である．上記の被覆戦略は探索者の一つの最適戦略である．また，$P(j/(p-1), h/p), j = 0, 1, \ldots, p-1$ を確率 $1/p$ で選ぶ戦略は hider の一つの最適戦略である．

C を長さ 1 の円周とし，ここでのゲームを考える．$s, t \in C(mod 1)$ に対し $A(s, t)$ を s から t まで時計回りの開いた弧であるとする．C 上の点 t を一様分布によって選び，次に弧 $A(t, t+s)$ を選ぶ戦略を，探索者の一様戦略と呼ぶ．C 上の関数 $f(t) = h, \forall t \in C$ を hider の一様戦略と呼ぶ．すると，一様戦略は，C 上のゲームでのそれぞれの player の最適戦略となり（ただし，hider の場合は，$h \geq 1/(1-s)$ のとき），ゲームの値は次のようになる．$h < 1$ のとき，0，$h \geq 1/(1-s)$ のとき，1．しかし，$1 \geq h < 1/(1-s)$ のときは，複雑である．

4. ランデブー探索問題

4.1. The Rendezvous Search Problem.

本節では、Rendezvous Search Problem（探索問題の一種）の最近の研究についていくつか紹介する。2 人の players が直線上に位置している。彼等は時刻 0 においてお互いの初期位置間の距離の確率分布を知っているが、相手が自分のどちら側にいるのか、また 2 人がどちら向きに進んでいるのかを知らない。彼等は最大速度 1 で進むことができて、できるだけ早く出会うことを望んでいる。彼等はどのように行動すればよいか。この場合の、最小の期待再会時間を rendezvous value と呼ぶ．[Alpern 1995] はこの問題を次の二つの場合に分けた：(i) Asymmetric case: 2 人の players が異なる戦略を選択できる場合、および (ii) Symmetric case: 2 人の players が同じ戦略を用いなければならない場合．[Alpern/Gal 1995] は asymmetric case で、初期位置間の距離の確率分布が有界な場合と、可算無限の場合とについて調べた。特に初期位置間の距離 d が既知の場合は、asymmetric rendezvous value が $13d/8$ であることを示した。[Alpern 1995] は symmetric rendezvous value が $5d/2$ であると推測した。しかし [Anderson/ Essegaier 1995] は、初期位置間の距離が有界な分布 F に従うとき、symmetric rendezvous value が高々 $1.78388D + \mu/2$ であることを示した。ここに $D = \inf\{x : F(x) = 1\}$，μ は F の平均値である。[Lim/Alpern 1996] は players の数が 2 人以上の場合の rendezvous search 問題を調べた。特に、n 人が直線上の連続する整数点上にランダムに置かれ、ランダムな方向に向けられたとき、すべてが一同に会すことができることを確実にするに必要な最小時間（minimax rendezvous value）について考察した。それは 漸近的に $n/2$ に近づくこと、さらに 3 人の場合は minimax rendezvous value が 4 であることを示す証明を与えた。[Baston 1997] は上記 [Anderson/ Essegaier 1995] が与えた上界を $1.7091D + \mu/2$ まで低めた。さらに、[Baston 1997] は、[Lim/Alpern 1996] の問題で 3 人の場合の minimax rendezvous value は実は 3.5 であることを示した。

4.2. Asymmetric Rendezvous on the Line is a Double Linear Search Problem.

2 人の players が距離 d 離れて直線上に位置している。それぞれの向きはそれぞれ確率 1/2 で決まる。相手が自分のどちら側にいるのか、また 2 人がどちら向きに進んでいるのかを知らない。それぞれが自分の最初の向きを前進だと考える。$d \sim G$ で G は有限の平均をもつ。2 人の戦略は次の集合から採られる：$L = \{f : [0, \infty) \to (-\infty, \infty) : f(0) = 0, |f(s) - f(t)| \leq |s - t|\}$．$L$ の部分集合で、傾きが ± 1（離散点を除いて）となる f の全体は L 内で dense である。$f \in L$ を使うと、時刻 t に彼の前進の向きに $f(t)$ のところにいる。最初に進む向きの組み合わせは 4 通りあり、それぞれが確率 1/4 で起こる。2 人の戦略を f, g とする。最初 d 離れていて、時刻 s までに 2 人が出会えるのは、それぞれ次の場合のようになる。

$$\text{(i)} \xrightarrow{f} \xleftarrow{g}, d \leq \max_{t \leq s}[f(t) + g(t)], G(\max_{t \leq s}[f(t) + g(t)])$$

$$\text{(ii)} \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}, d \leq \max_{t \leq s}[f(t) - g(t)], G(\max_{t \leq s}[f(t) - g(t)])$$

$$\text{(iii)}\ \xleftarrow{f}\xleftarrow{g}, d \leq \max_{t\leq s}[-f(t)+g(t)], G(\max_{t\leq s}[-f(t)+g(t)])$$

$$\text{(iv)}\ \xleftarrow{f}\xrightarrow{g}, d \leq \max_{t\leq s}[-f(t)-g(t)], G(\max_{t\leq s}[-f(t)-g(t)])$$

そこで、$f,g \in L$ に対し、x,y を $x(t)=f(t/2)+g(t/2), y(t)=-f(t/2)+g(t/2), |x'(t)|+|y'(t)|\leq 1$ と定義する。2 人が時刻 s までに出会う確率は

$$P^R_{f,g}(s)=\frac{1}{4}\{G(\max_{0\leq t\leq 2s} x(t))+G(\max_{0\leq t\leq 2s} -x(t))+G(\max_{0\leq t\leq 2s} y(t))+G(\max_{0\leq t\leq 2s} -y(t))\}.$$

[Alpern/Beck 1997] は、Asymmetric Rendezvous Search Problem on the Line（2 人の players）が次の Double Linear Search Problem に同値であることを示した。一つの静止目標物が 2 本の直線の内のいずれかに置かれる。2 人の searcher は 2 本の直線の原点にそれぞれ位置する。2 人の searcher は、合計の速さが 1 であるようにして、彼等のうちの 1 人が目標物を発見するまでの期待時間が最小になるような行動をする。次の図 5 では、$P^R_{f,g}(20)=[G(8)+G(4)+G(6)+G(4)]/4$ となる。

[図 5.]

4.3. A New Upper Bound for Symmetric Rendezvous.

2 人の players が直線上にいてそれぞれが速さ 1 で動き、$D/2$ の整数倍の時刻のみに方向を変える。各 player の戦略を $\eta_1F\eta_2B\eta_3F\eta_4B\ldots$ のように表現する．これの意味は、まず $\eta_1D/2$ の間前進、$\eta_2D/2$ 後進、... [Anderson/Essegaier 1995] は次の 4 つの戦略を確率的に使用する、しかも $3D$ 時間単位ごとにそれを繰り返す、という戦略を使用して、4.1 節で述べた上界を算出した。

(4.1) $$f(1)=2F4B, f(2)=1F3B2F, f(3)=1F2B1F2B, f(4)=1F1B1F3B.$$

このやり方は、直前の $3D$ の間に players が得た情報を使用していない。このことに注意して、[Baston 1997] は、次のような戦略を考えた：

(4.2) $$\alpha_1=1F2B2F1B, \alpha_2=1F3B2F, \beta_1=1F1B1F3B, \beta_2=2F4B.$$

- 一方が α、他方が β を使えば、$3D$ までに出会う。
- 1 人が α を用い、$3D$ までに出会わなかった
  ⇒ 他方は同じ β を用い、同じ向きに前進、か又は
  もう一方の α を用い、同じ向きに前進；さらに各 player には次のことがわかる：
  相手が自分と同じ向きに前進 ⇔ 相手が α_1 を使用
- 1 人が β を用い、$3D$ までに出会わなかった：この場合も同様のことがわかる。そこで

(4.3) $$a_1=1F2B2F2B, a_2=1F3B3F, b_1=1F1B1F3B1F, b_2=2F5B.$$

を確率的に選び、それを $7D/2$ ごとに繰り返す。この戦略によって、上界の改良値が得られる。

4.4. Minimax Three-person Rendezvous Search on the Line.

$D=1$ とし、3 人が他の player と出会う前にはそれぞれ $2F5B, 1F2B2F2B, 1F2B1F1B2F$ に従うとする。3 人のうち 2 人が出会った後は、case by case で行動を考える（その詳細は [Baston 1997] を参照)。例えば、Players 2,3 がまず時刻 1/2 に出会ったとすると、その後それぞれが自分の出発点に戻り、それから 2 人が出会った地点まで来る、その後は 2 人ともそこに止まる。

5．おわりに.

今後検討せねばならない点として,（1）より複雑なグラフ,（2）より一般的な切り替え費用,（3）より一般的な探索費用（箱をチェックする費用),（4）見逃し確率を導入する,（5）動くことが出来る目標物,（6）有向グラフ,（7）連続モデルとの関連を調べること，等が考えられる．第 2.3 節において,（2）,（3）をある程度まで考慮した．しかし，切り替え費用は，(2.3) の最初の条件で示されるように，加法的であった．これを，三角不等式 $d(i,j)+d(j,k)\geq d(i,k)$ としただけで問題が格段に難しくなることが，$n=3$ 程度の例をチェックしただけで予想される.（4）を考慮することにより，モデルはより現実に近づくと思われる．まず，すべての点

について見逃し確率は等しいというような条件を付けたモデルの分析から始めたほうがよいように思われる．（５）に関しては，目標物が動くことが出来る場合の方が，分析は容易である可能性がある．特に，ミニマックス解を考えるときはその可能性が強い．（１）は，すぐに手が付けられる事柄であり，筆者の課題である．（６），（７）も興味のある話題である．さて，第2.4節においてベイズ解を求めるとき，動的計画法による接近を示した．ミニマックス解を求めるときに，動的計画法を応用できるのだろうか．これについては，探索者が探索順序を逐次に決定していく場合とからめて，整理しておかなければならない話題である．また，線形計画法を用いて接近するやり方も考えられる．[NRL 1991] は探索理論の特集号であり，[中井 1986],[坂口 1981] は探索理論についての概観を手際よく述べている．これらを参照しつつ，上述の課題を究明していかなければならないと感じている．

[Kikuta/Ruckle1997] は新しい探索ゲームを提案し，accumulation game と呼んだ．そこでは，noisy case を調べた．[Ruckle/Kikuta 1999] は quiet accumulation game の二つの special case を分析した．一つは，$k=2$, $T=3$ の場合，もう一つは $k=T$ の場合である．$k=2$，$T=3$ の場合を $T=k+1$ ($k\geq 2$) の場合へ拡張して分析するのは困難である．そこで [Ruckle/Kikuta 1999] では，n 個の箱，k 個の location，$T=k+m(m\geq 1)$ 回の試行を行える quiet accumulation game の三つの variation を提案している．これらの variation を分析することにより，元のゲームの値の上界または下界を見つけることができる．さらに，これらの分析により，元のゲームの最適戦略についての情報を得ることができる．各 variation はプレーヤーの戦略に制限を加えることにより得られる．

Rendezvous Search に関しては次の２つを当面の研究課題として考えている:(i) Minimax Four-Person Rendezvous Search on the Line，および (ii) Rendezvous Search Problem with Examination Cost.

参考文献

Ahlswede, R. and Wegener, I.(1987): *Search Problems*. John Wiley and Sons, Chichester. esp, pp.264-265.

Alpern,S. (1995):The Rendezvous Search Problem. *SIAM J. on Control and Optimization* 33, 673-683.

Alpern,S. and Beck,A.(1997): Asymmetric Rendezvous on the Line is a Double Linear Search Problem. June. mimeo.

Alpern,S. and Gal,S. (1995):The Rendezvous Search Problem on the Line with Distinguishable Players. *SIAM J. on Control and Optimization* **33**, 1270-76.

Anderson, E.J. and Essegaier,S. (1995): Rendezvous Search on the Line with Distinguished Players. *SIAM J. on Control and Optimization* **33**, 1637-42.

Baston,V.(1997): Two Rendezvous Search Problems on the Line. 1997. mimeo.

Gal,S.(1980):Search Games. Academic, New York. esp, pp.17-33.

Garnaev,A.(2000): *Search Games and Other Applications of Game Theory* , Springer.

Gluss,B.(1961):Approximately Optimal One-Dimensional Search Policies in Which Search Costs Vary through Time. *Nav. Res. Logist.* Vol.8, 277-283.

伊理正夫，藤重悟，大山達雄 (1986)：グラフ・ネットワーク・マトロイド，第１章，講座・数理計画法７，産業図書.

菊田健作 (1992)：切り替え費用を要する探索の問題．富大経済論集，第 37 巻第３号.

Kikuta,K.(1990):A One-Dimensional Search with Traveling Cost. *Journal of the Operations Research Society of Japan.* Vol.33, 262-276.

Kikuta,K.(1995):A Search Game with Traveling Cost on a Tree. *Journal of the Operations Research Society of Japan.* Vol.38, 70-88.

Kikuta,K. and W.H.Ruckle(1997): Accumulation Games I-Noisy Search. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.94, No.2, August.

————(1999):Continuous Accumulation Games in Continuous Regions. December. (To appear in *JOTA*)

Lim, W.S. and Alpern, S.(1996): Minimax Rendezvous Search on the Line. *SIAM J. on Control and Optimization* **34**, 1650-65.

Lim, W.S.,Alpern, S. and Beck,A.(1997): Rendezvous Search on the Line with More Than Two Players. *Operations Research* **45**, 357-364.

Lossner, U. and Wegener, I. (1982): Discrete Sequential Search with Positive Switch Cost. *Math. Oper. Res.* Vol.7, 426-440.

中井暉久 (1986) : 探索理論展望, mimeo.
Naval Research Logistics.(1991):, Vol.38, No.4.
Ruckle,W.H.(1983):*Geometric Games and Their Applications.* Pitman, Mass..esp, pp.148-155.
Ruckle,W.H. and K.Kikuta(1999):Quiet Accumulation Games. Working Paper No.176, Institute of Economic Research, Kobe university of Commerce, August.
———(1999): Variations of Quiet Accumulation Games. Working Paper No.177, Institute of Economic Research, Kobe university of Commerce, August.
坂口実 (1981) : 探索理論, BASIC 数学　Vol.14, 61-67.

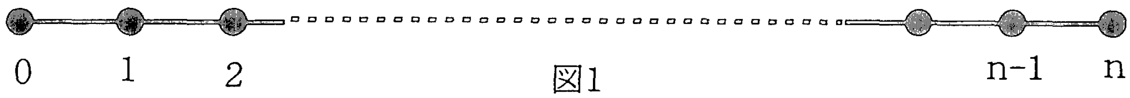

図1

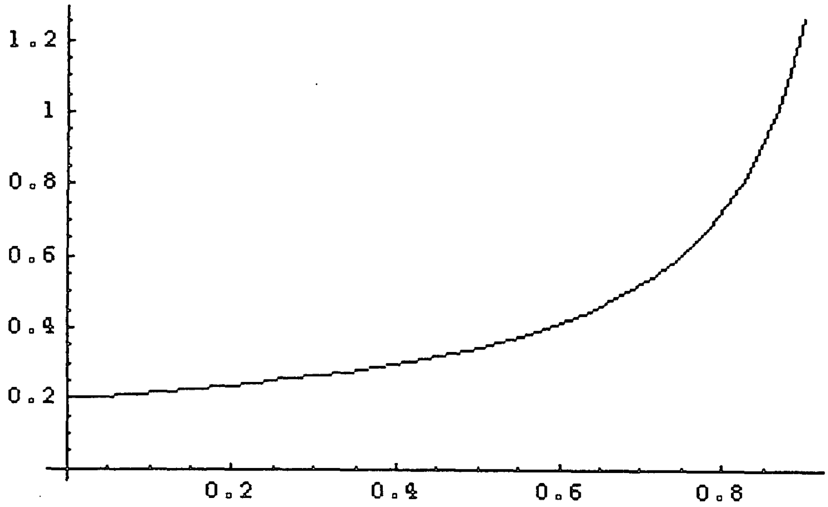

図2

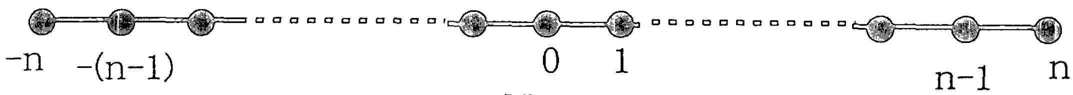

図4

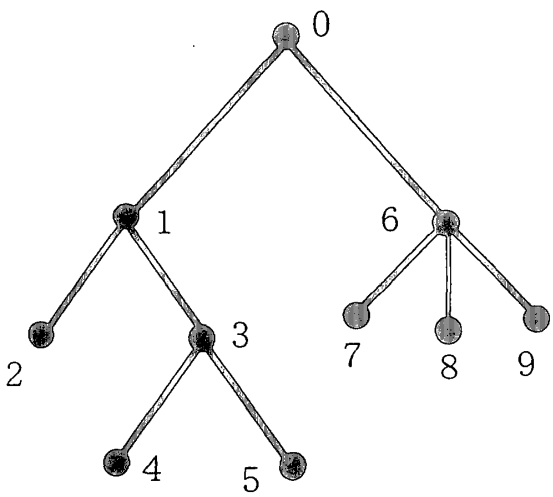

図3

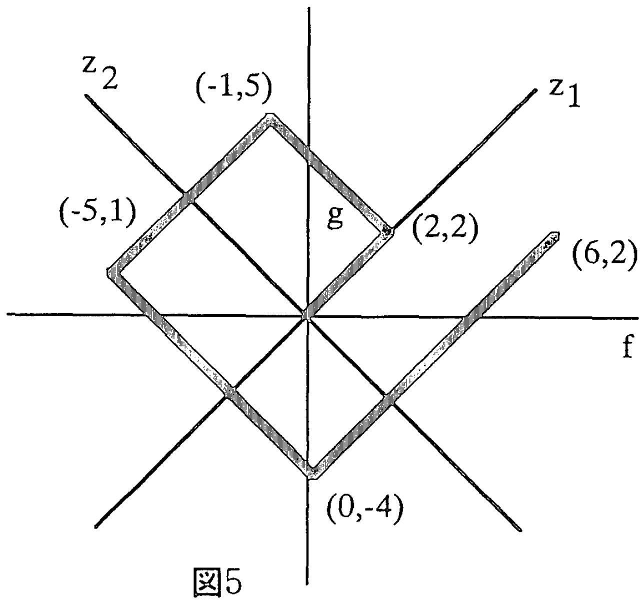

図5