競売と競争入札のゲーム理論

渡辺隆裕
岩手県立大学 総合政策学部

1 はじめに

ゲーム理論における競争入札・競売理論の研究は、Vickley [2] をはじめとして盛んに行われている。80 年代には数多くの論文が出され、単一財の入札を中心に多くの成果が得られた。Milgrom and Weber [1] はその代表的な論文であり、Willson[4] のサーベイなどはその時期の主要な結果である。

近年はアメリカの連邦通信委員会の PCS の周波数のライセンスの販売にゲーム理論家がアドバイスを与えて成功した事や、実験経済学によって入札の実験結果が多く得られたことから、入札理論の研究は再び注目を集めている。このような流れを組んで、近年は複数財入札の論文や、理論と実験・実証を橋渡しする研究が多く行われている。

本論文の前半部では入札理論の基本的な成果として、単一財入札の時の理論モデルがどのようなものであるか述べる。これらの多くの結果は先に述べたように既に 80 年代に得られ、今更という感もあるが、OR 学会ではあまり入札理論が知られていないことや、それに比してこれらの結果から得られる知見は大きく、近年行われている研究の基礎となることから、あえてこの部分に重点をおいた。ここで述べられている結果は Willson[4] のサーベイ論文と大差がないが、第 1 価格入札・第 2 価格入札を含んだ単一財の入札モデルの定式化と、一般の不完備情報ゲームから見てどこにどのような仮定がおかれているかを明示的に示している点で、単一財入札の結果を概観する上で見通しの良いものになっていると考える。

後半は複数財入札について述べる。複数財入札については、現在多くの結果が得られているが、実はこれらにはモデルの仮定に様々な相違がある。本当ならば、これらの仮定の相違でどのような結果の違いがあるかを述べるべきであるが、本論文では先に述べたような理由からそこまで詳細に踏み込まず、単にモデルにおける仮定の違いを述べるに留めた。

本論文では「入札」という言葉は、1 人の売り手と複数の買い手による財の取引き方法を表す。競売 (auction) と同意義で用いており、むしろこちらの言葉の方が適当であったかもしれない。公共事業入札のような 1 人の買い手と複数の売り手に対する理論も売り手と買い手を逆転させれば全く同じように考えられるであろう。なおなお証券の取り引きなどで使われる売り手と買い手がそれぞれ複数で値付けをする取り引き方法はダブルオークション (double auction) と呼ばれるが、ここでは考察しない。

2 入札の種類

入札方法には様々な種類があり、落札価格の決定方法、財の数、相手の入札額が公開されるかどうか、などによって分けることができる。以下、それを見ていこう。

まず、売買される財が 1 つの財である**単一財入札 (single unit auction)** か、複数の財である**複数財入札 (multi unit auction)** かに分けることができる。美術品・競走馬・インターネット競売などで取り引きされる多くの商品・中古車などは前者に属する。これに対し後者の競売で取り引きされるものは、ロット単位で売られる花卉・PCS の周波数帯販売、シンガポールの車両購入権・債券や株式などである。債券や株式など取引される財の単位が非常に多い場合は、1 単位の無限に分割可能な財をどのように分けるかという**分割財入札 (auction for divisible** goods) や**分割入札** (share auction) と考えることもある。次に入札の形態として、相手の入札額の情報が逐時公開され、自分の入札額を更新できる**競り** (open auction) か、入札額が分からない**封印入札** (sealed bid auction) かに分けることができる。単一財の競りの代表的なものは2つあり、値段をせり上げていく**イングリッシュオークション** (English auction) が一般的であるが、花卉の入札等には値段をせり下げていく**ダッチオークション** (Dutch auction) も使われる。一方、単一財の封印入札は1番高い値をつけた落札者にその価格で落札する**第1価格入札** (first price auction) が一般的であるが、理論的には1番高い値をつけた落札者に2番目の価格で落札する**第2価格入札** (second price auction) も重要である。

複財の入札になると、封印入札に限っても複数の財の入札のかけかたによって、同時にすべての財を入札にかける**同時入札** (simultaneous auction) か、何単位かの財に分けて何回か入札を行う**逐次入札** (sequential auction) かに分けることができる。同時入札、逐次入札の毎回の入札に対しては、落札者にそれぞれの入札した価格で購入させる**複数価格入札** (discriminate price, pay-your-bids auction) か、すべての落札者に同じ価格（最低落札価格、または最高の非落札価格）で購入させる**単一価格入札** (non-discriminate price, uniform price) かに分かれる。

以下、しばらくは単一財の入札について話を進めていく。

3　入札のモデル化

3.1　個人の財に対する価値

入札をモデル化する場合、入札者が財に対してどのような価値を持っているかでモデルを分類することができる。代表される2つのモデルとして、**個人独立価値** (Independent Private Value、以下 IPV) モデルと**共有価値** (Common Value、以下 CV) モデルがある。

IPV モデルでは、各入札者の財に対する価値（私的情報）は、他の入札者のそれに独立 (independent) した確率分布で生起し、財に対する価値は入札事前と事後で変化しない (private value)。言い換えると各入札者にとって、財の価値には不確実性はない。芸術品・収集品・骨董品などの競売では入札者によって財の価値が大きく異なり、IPV モデルに相当すると言われる。ただ解析が容易であるため、理論分析には入札の内容を問わず IPV モデルを用いる場合も多い。

これに対し石油・鉱山の採掘権、本の著作権、債券などは、入札者によって価値は相違せず同じであると考えられる。このような競売には CV モデルが用いられる。CV モデルでは各入札者の財に対する真の価値は同じであり、その価値はある事前の確率分布に従い発生するが、個人はこの値を直接観察できず、真の価値に依存したある確率分布に従って、各入札者ごとに異なった値として観察される。個人は自分の財に対する価値（私的情報）に基づき真の価値を推測する。

CV モデルでの財に対する価値は、入札前に対し入札後の情報を得た後に変化する。すなわち CV モデルでの落札者は、落札後に他者の入札価格が自分より小さかった情報を得て真の価値の推測を更新する。これにより CV モデルの落札者は、入札前に推測した財の価値より入札後に推測した財の価値の方が小さくなり、自分が財の価値を過大に見積もっていたことを公開する。この現象は**勝者の愚痴** (winner's curse) と呼ばれる。

3.2　財に対する価値の定式化

IPV モデル、CV モデルの違いは異なるいくつかの要因に依っている。大きな違いは「個人が財の真の価値を知っているか、不確実性があり自分の持つ情報から推測するか」であるが、個人が自分の財の価値を知っているとしても、その価値がすべての入札者に独立な確率分布で

生起するIPVである必要はなく、従属する場合も考えられる。また不確実性がある場合も、各入札者の持つ真の価値が全く同一なCVモデルではなく、入札者毎に真の価値が異なるモデルも考えられるであろう。Milgrom and Weberはその論文の中でこれらのモデルを包括したモデルを定式化した。ここではそれを紹介しよう。

まず入札モデルの基本的な設定として、入札者（ゲームのプレイヤー）を$1, \ldots, n$としよう。以下、簡単化のため財の価値は$[0,1]$に属するものとし、入札額も$[0,1]$に属するものとして考えよう。

入札者iの観察する私的情報をx_i、入札者iの財に関する真の価値をv_iとし、$z = (x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$とする。先の仮定より$z \in [0,1]^{2n}$である。$z$に対する確率分布関数を$F(z)$とし、その密度関数$f(z)$が存在しているものとする。このモデルはIPVとCVを含む一般的なモデルと考えられる。すなわちPIVでは$v_i = x_i$であり、CVでは$v_i = v$である。Milgrom and Weber [1] は確率分布に対して以下のような仮定をした。

仮定 1 (affiliation) $z, z' \in Z$に対し、$z \vee z'$ $(z \wedge z')$をz, z'の各成分の大きい方（小さい方）をとったベクトルとする。このとき、

$$\forall z, z' \in Z \quad f(z \vee z')f(z \wedge z') \geq f(z)f(z')$$

が成立すると仮定する。

この仮定はaffiliationと呼ばれる。

affiliationの仮定はどのような意味を持っているのだろうか。ここで$x^1, \ldots, x^n$は$x_1, \ldots, x_n$を大きい順に並べたものとしよう。$x^1 = s$という条件のもとでのx^2の条件付き確率分布を$\hat{F}(\cdot|s)$とし、その密度関数を$\hat{f}(\cdot|s)$で表す。

affiliationは$\hat{F}(\cdot|s)$や$\frac{\hat{f}(\cdot|s)}{\hat{F}(\cdot|s)}$が$s$に対して非減少である十分条件となるような仮定である。$\hat{F}(\cdot|s)$は入札者が自分の情報を観察したもとで、他の入札者の中で一番高い価値を推測する確率分布である。これが観察した情報に対し非減少であることは、均衡の存在の十分条件の一つとなる。

個人の価値をこのように定式化したモデルは**Affiliated Value**（**以下AV**）モデルと呼ばれ、入札モデルで個人の価値をもっとも一般的に扱ったモデルとされる。

4 均衡戦略とその分析結果

4.1 入札の戦略

さて個人の財に対する価値がモデル化できたところで、各入札の入札者の戦略がどのようなものになるか、考えてみよう。まず封印入札のみを考える。

第2価格入札はIPVモデルならば相手の入札額の如何にかかわらず、「各参加者iは自分の財に対する真の価値x_iを入札することが、他のどんな入札額を入札した時の利益より悪くはならない」という性質が成立する。

これに対し、第1価格入札やIPVモデル以外の第2価格入札の戦略を考察するのは少し難しい。初期の入札モデルではある入札者に注目し、他の入札者の入札額の分布を外生的に与えることで入札者の行動を分析した。しかし、このようなモデルでは所与とされた他の入札者の行動と、分析された入札者の行動とに相互関係がない。さらに他の入札者の入札額の分布を所与とすることは、その入札方法における入札者の行動を既に与えてしまっていることなり、入札者の行動を分析しようとする目的に最初から答を与えてしまっていることになる。

不完備情報ゲームによるモデル化は、均衡という概念によってすべての入札者の行動を同時決定し、すべての入札者の戦略を内生的に決定できる。不完備情報ゲームでは、入札者iの持つ私的情報x_iに依存して、入札額が決まるような関数$b_i : [0,1] \to [0,1]$を戦略と考える。入札者が危険回避的な時は、入札者の行動は期待利益の最大化ではなく期待効用の最大化を考える必要がある。そこで$u_i(\cdot)$を入札者iの効用関数

としよう。

この時戦略の組がベイジアンナッシュ均衡であるとは、任意の入札者 i の任意の私的情報 x_i に対して、他者の戦略が均衡での戦略を用いている条件のもとで、他のどんな入札額も $b(x_i)$ を用いた時の期待効用より高い期待効用を与えないことを言う。

不完備情報ゲームによるモデル化は、上記のような整合性で優れている反面、分析は複雑になる。特に上記のような一般的な状況のもとでは期待効用は明示的な式ではに表せないし、均衡も存在しないことがある。そこで多くのモデルでは以下のような仮定がおかれて分析されている。

仮定 2 (戦略の対称性) ベイジアンナッシュ均衡となる戦略は i に依存せず $b_1 \equiv \cdots \equiv b_n \equiv b$ とする。

このような対称なベイジアンナッシュ均衡での入札戦略 b を以降、単純に均衡戦略と呼ぶことにする。

仮定 3 (分布の対称性) $x^1 = x_i$であるとき$\hat{F}$は i に無関係であるとする。

x_iが独立で同一な分布に従えばこの仮定は満たされるが、独立であっても同一な分布でなければ一般的には満たされない。

仮定 4 (効用関数の対称性) 効用関数も i に依存せず、$u_i \equiv u$ であるものとする。

入札者が危険中立的な時は、この仮定は当然満たされる。

これらの仮定はすべて「入札者は対称的であり、入札者の行動の違いはすべて私的情報の違いのみに依存して起きる」という考え方で、大まかにはこれらの仮定を区別せず**入札者の対称性 (symmetry of bidders)** の仮定と呼ぶこともある。

ここで、

$$v(s,t) = E[v_i | x_i = x^1 = s \text{ and } x^2 = t]$$

としよう。対称性の仮定より v は i に依存せず定義される。この $v(s,t)$ は「自分が入札者の中で最大の価値（私的情報）s を持っており、かつ自分の次の最大の価値が t であるという条件のもとでの自分の真の価値の期待値」である。

さらに戦略 $b(x)$ が単調増加であるという仮定をおくと、入札者 i の事前価値が $x_i = x$ で、入札者 i 以外は均衡戦略に従い、入札者 i は y を入札する時の期待効用$\Pi(x,y)$ は以下のように表せる。

$$\Pi(x,y) = \int_0^{b^{-1}(y)} u(v(x,t) - p(y, b(t))) d\hat{F}(t|x) \tag{1}$$

ただし、$p(y_1, y_2)$ は入札方法に依存した落札価格を表し、第 1 価格入札では $p(y_1, y_2) = y_1$、第 2 価格入札では $p(y_1, y_2) = y_1$ である。

(1) において$\Pi(x,y)$ を最大にする y が $b(x)$ であるという条件によって、均衡戦略を求めることができる。もし、均衡戦略が微分可能であれば、この条件はいかのような微分方程式で書く事ができる。

$$\begin{aligned} & b'(x) \int_0^1 u'(v(x,t) - p(b(x), b(t))) p_1(b(x), b(t)) d\hat{F}(t|x) \\ & = u(v(x,x) - p(b(x), b(x))) \hat{f}(x|x) \end{aligned} \tag{2}$$

ただしここで p_1は $p(y_1, y_2)$ の第 1 変数での偏微分 $\frac{\partial p}{\partial y_1}$ を表す。

4.2 均衡戦略の特徴

分布関数 $F(z)$ が連続で狭義単調増加であり、戦略関数に $b(0) = 0$ という境界条件を仮定すると (2) は解けて、単調増加な均衡戦略が存在する。ここではその均衡戦略の特徴を示す。

第 1 価格入札のリスク中立的な場合は、

$$b(x) = v(x,x) - \frac{1}{\theta(x)} \int_0^1 \theta(t) \frac{dv(t,t)}{dt} dt$$

となる。ただし、

$$\theta(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\hat{f}(t|t)}{\hat{F}(t|t)} dt\right).$$

である。さらにIPVモデルでは
$\hat{f}(t)=\hat{f}(t|t),\hat{F}(t)=\hat{F}(t|t)$ とおくことにより、

$$b(x)=\frac{1}{\hat{F}(x)}\int_0^1 t\hat{f}(t)dt$$

となる。これは「自分の持つ価値が最大であるという条件のもとで、2番目に高い価値を持つ人の真の価値の期待値」に相当する。一方、リスク回避的な場合の均衡戦略は、リスク中立的な場合より高い入札額となる。

第2価格入札では $b(x)=v(x,x)$、すなわち「自分が一番高い事前価値を持っており、かつ次に高い事前価値を持つ人も自分と同じ価値を持つ」という条件のもとで「自分の財に対する価値の期待値」を入札することが均衡戦略となる。(リスク回避・中立の如何に依らない) 特にIPVモデルでは先に示したように、これは均衡戦略ではなく、他の入札者の行動に関わらず最適戦略となる。

4.3 競りと封印入札の同等性

ここまでは封印入札についてのみ見てきたわけだが、競りでの均衡戦略はどのようになるだろうか?基本的には、自分の入札額が落札価格そのものに反映するダッチオークションは第1価格入札に、相手が脱落した時点が購入価格になるイングリッシュオークションは第2価格入札に対応する。

特にダッチオークションでは、入札の時点まで他者の財の価値に対する情報が開示されるわけではないので、たとえ自分の価値の期待値が他者の情報によって更新されるようなAV,CVのようなモデルでも自分の価値の期待値は入札時点まで変化しない。したがって、ダッチオークションでの戦略は前節で示した第1価格入札と同じ戦略が均衡戦略になる。

これに対しイングリッシュオークションは競り上げていく過程で、他の入札者の価値に対する情報が入り、それによって自分の事後価値の推測値が更新される。したがってAV,CVモデルのイングリッシュオークションでは競り上げの過程で、自分の事後価値の推測値は上方に更新されるため、第2価格入札の戦略より高い入札額が均衡戦略になるこれに対しIPVモデルならば、相手の入札額の如何にかかわらずイングリッシュオークションも第2価格入札と同様他の入札者の任意の入札に対して、自分の財に対する真の価値を入札することが、他の入札額を入札した時の利潤より悪くはないという性質が成立し、IPVモデルではイングリッシュオークションでも自分の財に対する真の価値を入札することが、弱支配戦略である。

5 売り手の期待利益

ここまでの各入札者の入札戦略によって、入札の主催者である売り手の利益について考察することができる。

入札者がリスク中立的なIPVモデルの売り手の期待利益は、第1価格入札と第2価格入札が共に「入札者の財に対する価値の中で、2番目に高い者の持つ価値の期待値」となる。先のIPVでの競りの等価性と合わせると、IPVでリスク中立的な場合はイングリッシュオークション、ダッチオークション、第1価格入札、第2価格入札の4つの入札方式の売り手の期待利益はすべて同じである。これは**利潤等価定理(revenue equivalence theorem)** 等と呼ばれる。

IPVで入札者がリスク回避的な時はどうだろうか。IPVモデルでは第2価格入札は入札者のリスク回避度に関わらず戦略は同じであるから、入札者がリスク回避的な時も期待利益も同じである。しかし第1価格入札の入札額はリスク中立的な時より高くなるため、売り手の期待利益もリスク中立的のときより大きくなる。従って入札者がリスク回避的な時は第2価格入札(イングリッシュオークション)より第1価格入札(ダッチオークション)の方が期待利益は高い。

さらにIPV以外では他者の情報が示されて、入札者の落札事前価値が上昇して行くためリスク中立的でAffiliated Valueの場合は第2価格入

札より、イングリッシュオークションの方が売り手の期待利益は高い。しかしダッチオークションと第1価格入札ではCV,IPV, リスク態度に関わらず双方とも同じ戦略が均衡戦略になるため売り手の期待利益は同じである。なお第1価格入札と第2価格入札の比較では、入札者がリスク中立的でCVの場合は第2価格入札の方が第1価格入札より売り手の期待利益が高いことが分かるが、リスク回避的なCV,AVの場合の第2価格入札と第1価格入札の売り手の期待利益の比較は入札者の価値の確率分布と効用関数の形に依存するため一概には言えない。(Milgrom and Weber [1] 他)

6 複数財の入札

複数財の入札においては、複数価格入札が第1価格入札に、単一価格入札が第2価格入札に対応すると類推して、各入札に対する考察がなされてきた。実際、いくつかの債券入札の論文ではこのような考えのもとに双方の入札の特徴を述べているものも多い。しかし、本当にこれで良いのかどうか、理論的な分析による裏付けは完全には進んでいないのが実状である。。

複数財入札のモデルは様々なものがあり、以下の3点において相違が見られる。したがって複数財入札のモデルによって得られた結果と言っても、どのような仮定によって得られた結果かについて注意をしなければならない。モデルの第1のポイントは複数財に対する個人の価値をどう考えるか。複数財入札の初期の研究 Weber (1983) では入札者が1つの財のみ欲するとし、分析を行った。このような仮定のもとでは分析は単一財とほぼ同じであり、結果も同時入札では単一財入札からほぼ類推されるものとなる。しかし、複数の財に価値を感じるとなると分析が複雑になる。この状況設定は更に細かく分けられ、複数財の価値がすべてなんらかの確率分布によって発生する（私的情報が多次元）と仮定するか、1つめの財の価値のみ私的情報として確率分布によって発生し、2つめ以上の財の価値は所与のえられた限界効用によって表現されるモデルである。後者のモデルでは、線形効用（m個の財の効用は1個のm倍）であるか、限界効用逓増であるか、限界効用逓減であるかによって分析結果が異なる。一般には限界効用が逓増した時の方が分析も容易になる場合が多い。(均衡の存在が容易になるため）第2に何を入札させるかのルール（入札戦略）によっても分析は異なる。1つの価格のみを入札させ、すべての財をこの価格で（または単一価格で）買い取らせる場合には分析は容易であるが、各財の価格、または価格とその価格での購入数量を入札させる形式では分析は複雑である。第3に同時入札 (simultaneous) か逐次入札 (sequential) かの違いがある。

債券入札などの分析の場合、価値はCVに近く、複数の財に価値を感じ、限界効用が逓減し、入札も各価格に応じて購入数量を入札するような形になるが、このような形式の入札に対してする理論展開はまだ多くの課題が残っているといってよい。

参考文献

[1] Milgrom, P. and Weber, R. J. (1982) “The Theory of Auctions and Competitive Bidding”, *Econometrica*, vol.50, 1089–1122.

[2] Vickley, W. (1961), “Counter speculation, auctions and competitive sealed tenders”, *The Journal of Finance*, vol.16. 8–37.

[3] Weber, R. J. (1983), “Multi-object auctions”, in *Auctions, Bidding and Contracting*, Engelbrecht-Wiggans, R., Shubic, M. and Stark R. eds., New York University Press.

[4] Wilson, R. (1992), “Strategic analysis of auction”, in *Handbook of Game Theory vol. 1*, Aumann, R. and Hart, S. eds., North-Holland.