マンパワースケジューリング問題

由良　憲二（電気通信大学）

1．はじめに

マンパワースケジューリング問題は，組織を構成する人間の活動を時間軸上に適切に配置する問題で，典型的なものとしては，勤務スケジュールの作成が挙げられる．この種の問題に対する研究の歴史は古く，様々なアプローチがなされている．集合被覆（ないし分割）問題として定式化して解を得る方法がよく知られた方法であるが，その他にも解析的研究に基づく解法，問題固有の特徴を反映した効率的な近似解法，そして人工知能の手法がある．本稿ではこの中から解析的研究を取り上げ，ここ２０年余りの間に蓄積されてきた成果については纏める．

2．基礎問題

基礎問題として，１週あたり７日間オープンしているサービスシステムにおいて，各日の必要勤務者数を満足するために，何人の従業員を雇用し，従業員の出勤日をいつにするかを決める問題を取り上げる．Brownell and. Lowerre (1976)は，平日（月曜日～金曜日）１日当り必要な勤務者数（D），週末（土曜日と日曜日）１日当り必要な勤務者数（E）（ただし，$D \geqq E$）が与えられた場合に，様々な従業員への休日割当方策の基で勤務スケジューリング問題を解析した．以下にその結果を示す．

方策１：各従業員に１週間当り２日間の休日を与える．

必要最小従業員数（W）は，

$$W = D + \lfloor (2E+4)/5 \rfloor = \lceil (5D+2E)/5 \rceil \qquad (1)$$

ここで$\lfloor x \rfloor$はxより大きくない最大整数を，$\lceil x \rceil$はxより小さくない最小整数を示す．

勤務スケジュールを次の手順で作成すれば，各従業員は１週間当り２日間の休日を割当てられる．従業員には１からWの番号を付ける．

（手順１）従業員１から$W-E$に週末の休日を割当てる．休日が未割当のE人の内，$W-D$人に（月，火）の休日を割当てる．

（手順２）手順１を行った時点で，休日が未割当の従業員がいる場合は，$W-D$が偶数か奇数かで場合分けして，休日を割当てる．

（手順２－１）$W-D$が偶数の場合は，休日未割当の従業員に対して，順に，（水，木），（水，金），（木，金）の休日ペアを割当て，それでも残る場合は，再び，（水，木），（水，金），（木，金）の休日を割当てる．これを，休日未割当の従業員がなくなるまで繰り返す．

（手順２－２）$W-D$が奇数の場合は，休日未割当の従業員の内，一人に対して（水，木）の休日を割当て，残りの従業員に対しては，順に，（水，木），（水，金），（木，金）の休日を割当てる．それでも未割当の従業員が残る場合は，再び，（水，木），（水，金），（木，金）の休日を割当てる．このことを，休日未割当ての従業員がなくなるまで繰り返す．

証明）従業員数をwで表すと，週休２日なので，１週間当り利用可能延べ従業員数は$5w$である．それに対して，必要な延べ作業員数は，平日５日間で$5D$，週末２日間で$2E$であるので，$5D+2E$である．よって，必要最小従業員数（W）は式（１）で与えられる．

次に従業員数がWのときに上記の手順に従えば各従業員に１週間当り２日間の休日を与えられることを示す．

W行７列からなる行列（表１参照）を考える．行は従業員を示し，列は，月，火，水，木，金，土，日と曜日を示す．また，行i列jにXを入れることは，従業員iの曜日jを休日とすることを示す．

表１　$D=7$，$E=5$，方策１の場合

従業員	月	火	水	木	金	土	日
1						X	X
2						X	X
3						X	X
4						X	X
5	X	X					
6	X	X					
7			X	X			
8			X		X		
9				X	X		

手順１は，第１行から第 $W-E$ 行の（土，日）の列にXを入れることである．この時点で，休日未割当の人数は E 人で，それぞれに２日間の休日を割当てなければならない．

（月，火）という２日間の休日は，$W-D$ 人に割当て可能なので，$E \leqq W-D$ の場合は，E 人全員に休日（月，火）を割当てれば方策１を満たすスケジュールが得られる．$E > W-D$ の場合は，E 人中の $W-D$ 人に（月，火）という休日を割当てる．この時点で，$W-E+W-D$ 人に休日を割当てたことになり，休日未割当の従業員数は $W-(W-E+W-D)=E-(W-D)$ 人である．以下，$W-D$ が偶数か奇数かで場合分けして考える．

$W-D$ が偶数の場合は，（水，木），（水，金），（木，金）にそれぞれ $(W-D)／2$ 人ずつ休日を割当てることができる．これらの合計は，$3(W-D)／2$ である．式（1）より，$W-D \geqq 2E／5$ であり，$3(W-D)／2 \geqq 3E／5$ となる．一方，休日未割当の従業員数は，$E-(W-D) \leqq 3E／5$ である．よって，$W-D$ が偶数の場合は，手順２－１で従業員全員に休日を割当てることができる．

$W-D$ が奇数の場合は，（水，木），（水，金），（木，金）にそれぞれ $(W-D-1)／2$ 人ずつの休日を割当可能で，さらにもう一つ（水，木）という休日を割当可能である．これらの合計は，$1+3(W-D-1)／2=3(W-D)／2-1／2$ であり，式（1）より，$3(W-D)／2-1／2 \geqq 3E／5-1／2$ となる．ところで，式（1）より，$W-D=\lceil 2E／5 \rceil$ であり，これが奇数となるとき，$2E／5=2(i+j／5)$，$j=1$ or 2 である．このとき，$3E／5-1／2=3i+3j／5-1／2$ で，$j=1$ or 2 に対して $3i+\alpha$（$\alpha>0$）となる．つまり，$3(W-D)／2-1／2 \geqq 3i+\alpha$ であり，左辺は整数であることから，$3(W-D)／2-1／2 \geqq 3i+1$ である．他方，休日未割当の従業員数は，$E-(W-D) \leqq 3E／5=3i+3j／5$ であり，$j=1$ or 2 に対して $E-(W-D) \leqq 3i+6／5$ となる．そして，$E-(W-D)$ が整数であることから，$E-(W-D) \leqq 3i+1$ である．よって，$W-D$ が奇数の場合は，手順２－２で従業員全員に休日を割当てることができる．（証明終了）

例．$D=7$，$E=5$ の場合，式（1）より，$W=9$ となり，上記の手順を適用することで，表１のようなスケジュールが得られる．

方策２：各従業員に２週間当り２回の連続２日間の休日を与える．

この場合の必要従業員数は，方策１と同一である．従業員の勤務スケジュールは，期間を２週間として，次の手順で作成する．

（手順１）従業員１から $W-E$ に第２週末の休日を割当てる．従業員 $W-(D-E)+1$ から W に第１週末の休日を割当てる．

（手順２）従業員 $W-E+1$ から従業員番号の増加順に，$W-D$ 人ずつ，第１週の（月，火），（水，木），（金，土），（第１週の日曜日，第２週の月曜日），第２週の（火，水），（木，金）という休日を割当てる．ここで，従業員 $W+\alpha$（$\alpha>0$）は，従業員 α として取り扱う．また，１回目の休日割当の対象としてあがった従業員 $W-(D-E)+1$ から W には休日を割当てない．計算終了．

例．$D=7$，$E=5$ の場合，式（1）より，$W=9$ となり，上記の手順を適用することで，表２のようなスケジュールが得られる．

方策３：各従業員に１週間当り１回の連続２日間休日を与える．ただし，休日の２日間は平日と週末の曜日とを両方は含まない．

必要最小従業員数（W）は，次式で与えられる．

$$W=D+\lfloor (E+1)／2 \rfloor \qquad (2)$$

従業員の勤務スケジュールは，従業員１から $W-E$ に第１週末の休日を割当て，残りの従業員に，（木，金），（火，水）の連続休日を割当てる．

例．$D=7$，$E=5$ の場合，式（2）より，$W=10$ となり，上記の手順を適用することで，表３の勤務スケジュールが得られる．

方策４：各従業員に，２週間当り１回の週末休日を与え，この休日を含めて２週間当り４日間の休日を与える．

$8E／5D \geqq 1$ の場合，必要最小従業員数（W）は $2E$ である．従業員の勤務スケジュールは，従業員１から E に第１週末の休日を割当て，残りの従業員 $E+1$ から $2E$ に第２

表２　$D=7$，$E=5$，方策２の場合

従業員	第１週						
	月	火	水	木	金	土	日
1			X	X			
2					X	X	
3					X	X	
4							X
5	X	X					X
6	X	X					
7			X	X			
8						X	X
9						X	X

従業員	第２週						
	月	火	水	木	金	土	日
1						X	X
2						X	X
3						X	X
4	X					X	X
5	X						
6		X	X				
7		X	X				
8				X	X		
9				X	X		

表３　$D=7$，$E=5$，方策３の場合

従業員	月	火	水	木	金	土	日
1						X	X
2						X	X
3						X	X
4						X	X
5						X	X
6				X	X		
7				X	X		
8				X	X		
9		X	X				
１０		X	X				

週末の休日を割当てる．第１週について，従業員 $E+1$ から $2E$ に，月曜日から金曜日へ順に $2E-D$ 人ずつ休日を与え，第２週については従業員１から E に，月曜日から金曜日へ順に $2E-D$ 人ずつ休日を与える．

$8E/5D<1$ の場合，$W>2E$ となる．週末の勤務方策として次の二つが考えられる．

週末方策１：各週末には，E 人が働く．
週末方策２：各従業員は，２週末の内，１週末は休日で１週末は勤務とする．

このとき，それぞれの必要最小従業員数は，週末方策１で $2E+\lfloor(5D-8E+4)/5\rfloor$，週末方策２で $\lfloor(5D+3)/4\rfloor$ である．

方策５：各従業員に，２週間当り１回の週末休日を与え，別に連続２日間休日を与える．

$3E/2D\geqq 1$ の場合，必要最小従業員数（W）は $2E$ である．従業員の勤務スケジュールは，従業員１から E に第１週末の休日を割当て，残りの従業員 $E+1$ から $2E$ に第２週末の休日を割当てる．第１週について，従業員 $E+1$ から $2E$ に，(木，金)，(火，水）の連続休日を順に割当てる．第２週についても，従業員１から E に，(木，金)，(火，水）の連続休日を順に割当てる．

$3E/2D<1$ の場合，それぞれの必要最小従業員数は，方策４で示した週末方策１のとき $2E+\lfloor(2D-3E+1)/5\rfloor$，週末方策２のとき $\lfloor(4D+2)/3\rfloor$ である．

例．$D=7$，$E=5$ の場合，$3E/2D\geqq 1$ より，$W=10$ となり，第１週は表３，第２週は表４のようなスケジュールが得られる．

表４　$D=7$，$E=5$，方策５の場合（第２週のみ掲げる）

従業員	第２週						
	月	火	水	木	金	土	日
1				X	X		
2				X	X		
3				X	X		
4		X	X				
5		X	X				
6						X	X
7						X	X
8						X	X
9						X	X
１０						X	X

3．必要勤務者数と週末休日割当との一般化並びに連続勤務日数の考慮

Brownell and. Lowerre (1976)は，従業員の連続勤務日数について考慮を払っていない．そのため，連続勤務日数が長いスケジュールを結果として生成することがある．また，従業員の週末休日に関しても，２週中に１回だけ週末休日を割当てることは取り扱っているが，その他の場合を取り扱っていない．そこで，Baker, Burns and Carter (1979) は，これらのことを考慮したスケジューリング方法を分析した．その後，Burns and Carter (1985) は，各曜日の必要勤務者数が異なる場合を取り扱えるように一般化した．本節では，Burns and Carter (1985) のスケジューリング法を説明する．

各曜日の必要勤務者数を D_j (j=1, 2, . . . , 7) で表す．ここで j=１は日曜日を，j=２は月曜日を，j=７は土曜日を表す．また，従業員は，B週末中の少なくともA週末で休日を与えられる．そして，１週間（この場合は日曜日から土曜日までの７日間）に５日間だけ勤務し，２日間は休日とする．さらに，各従業員は，連続して６日間までしか勤務しないようにする．

以上の条件の基で，必要従業員数（W）と従業員の勤務スケジュールを決める問題を取り扱う．

必要従業員数（W）を決めるに当って，少なくとも必要な人数を表す制約として，次の３つがある．

①週末休日制約：従業員は，B週末中の少なくともA週末で休日を与えられることから，各従業員はB週間で，$B-A$週末は勤務する．各週末の必要な出勤者数は max {D_1, D_7}（これをEで表す）であることから，これをB倍した数よりも，$W(B-A)$ は大きくなければならない．したがって，

$$W \geqq \lceil BE / (B-A) \rceil \qquad (3)$$

②総必要従業員数制約：これは式（1），（2）を導出したのと同じ制約で，1 週間当りの総必要従業員数を，１週間当り５日間勤務する従業員が何人いれば充足できるかを示す制約である．つまり，$5W \geqq D_1+D_2+\cdots+D_7$より，

$$W \geqq \lceil (D_1+D_2+\cdots+D_7)/5 \rceil \qquad (4)$$

③最大必要従業員数制約：従業員数は，曜日の中で最も多く必要とする勤務者数より多くないといけない．これは，

$$W \geqq \max\{D_1, D_2, \cdots, D_7\} \qquad (5)$$

以上の式（３）～（５）を満足するWを必要従業員数とする．

次に，この必要従業員数Wで，勤務スケジュールを作成するアルゴリズムを示す．

（ステップ１）必要従業員数Wを式（３）～（５）で求める．

（ステップ２）週末休日を従業員に割当てる．週末にはE人の従業員が勤務するので，$W-E$人は休日とすることができる．そこで，第１週末（第１週の日曜日）では従業員１から$W-E$が休日，第２週末（第１週の土曜日と第２週の日曜日）では次の従業員 $W-E+1$から$2(W-E)$が休日，というように休日を割当てる．ただし，従業員 $W+\alpha$（$\alpha>0$）は，従業員αとして取り扱う．

（ステップ３）従業員に割当てる平日の休日ペアを決定する．曜日jにおける余分の従業員数S_jを求める．

$$S_j = W - D_j \quad (j=2, 3, \ldots, 6) \qquad (6)$$

$$S_j = E - D_j \quad (j=1, 7) \qquad (7)$$

次に，E個の休日ペアのリストを求める．

(1) $S_k = \max\{S_j\}$なる曜日kを選ぶ．

(2) $S_i>0$なる$i \neq k$を任意に選ぶ．すべての$i \neq k$について$S_i=0$の場合は，$i=k$とする．

(3) 休日ペア（i，k）をリストに加え，S_iとS_kから１を引く．

(4) この手続きをE回繰り返す．

（ステップ４）第１週の従業員の勤務スケジュールに休日ペアを割当てる．第１週では，従業員は週末休日の割当状況から，次の４つに分類できる．

①タイプ１：週末１，２ともに休日．このタイプには，第１週に休日ペアを割当てる必要はない．

②タイプ２：週末１が休日で，週末２が勤務．このタイプには，第１週に１日の休日が必要である．

③タイプ３：週末１が勤務で，週末２が休日．このタイプには，第１週に１日の休日が必要

である．

④タイプ4：週末1，2ともに勤務．このタイプには，第1週に2組の休日ペアを割当てる必要がある．

休日ペアのリストの最初から順に，休日ペアを従業員に割当てる．まず，タイプ4の従業員に割当てる．次にタイプ2，3の従業員に割当てる．そのとき，ペアの曜日の早い方をタイプ3に，残りをタイプ2に割当てる．

（ステップ5）第i週（$i \geqq 2$）の従業員の勤務スケジュールに休日ペアを割当てる．第$i-1$週までの スケジュールが決まると，各従業員が第i週でどのタイプに属するかが決まる．

（ケース 1）休日ペアリストに同一要素からなるペア（k，k）が存在する場合，第i週のスケジュールは，第1週と同じ方法で決定する．

（ケース 2）休日ペアリストにペア（k，k）が存在しない場合，第i週の各タイプのスケジュールは，第$i-1$週の各タイプのスケジュールと同じとする．

例．$D_j=7$（j=2，3，...，6），$D_1=D_2=5$，B=2，A=1の場合を取り上げる．このとき，E=5，W=10である．$S_1=S_7=0$，$S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=3$より，E個の休日ペアとしては，例えば，（月，火），（水，木），（月，金），（火，水），（木，金）と選ぶことができる．このとき，勤務スケジュールは表5のように得られる．

表5　D=7，E=5，連続勤務日数5日，2週末中1週末休日の場合

従業員	第1週						
	日	月	火	水	木	金	土
1	X		X				
2	X				X		
3	X					X	
4	X			X			
5	X					X	
6		X					X
7				X			X
8		X					X
9			X				X
10					X		X

従業員	第2週						
	日	月	火	水	木	金	土
1		X					X
2				X			X
3		X					X
4			X				X
5					X		X
6	X		X				
7	X				X		
8	X					X	
9	X			X			
10	X					X	

4．従業員能力（資格）の階層性

従業員の能力（資格）に階層性が存在し，上位ランクに位置する従業員が下位ランクに位置する従業員の代わりを果たすことができる場合を取り上げる．ここでは，異なるランクの従業員間に代替性を考慮した Emmons and Burns（1991）の分析を説明する．

対象とするシステムは，1週間に7日間稼動しているとする．各従業員には，すべての週おいて2日間の休日が割当てられ，B週末中の少なくともA週末で休日を与えられないといけない．従業員の連続労働日数は2～5日間とする．

従業員にはm種のタイプがあり，従業員は階層的にランク付けられている．ランクkの従業員はランク$k+1$の従業員の代わりをつとめることができる．各従業員タイプの必要人数は，曜日によって変化しないものとする．

平日1日当り必要なタイプ1～kの最小従業員数をD_kで，休日1日当り必要なタイプkの最小従業員数をd_kで表す．

D_kとd_kの条件，従業員の週当り休日が2日であること並びにB週末中のA週末で休日を得るという条件を満たすために必要な最小の総従業員数をWで表す．また，Wと$w_1, \ldots, w_{k-1}$（k=1，2，...，m）が決められたときに必要なタイプkの最小従業員数をw_kで表す．

1日当りの必要勤務者数がnのとき，休日条件を満たすための最小従業員数$f(n)$は，

$$f(n)=\max\{\lceil nB/(B-A)\rceil, \lceil 7n/5\rceil\} \quad (8)$$

このとき，$f(d_k)$はタイプkの従業員に対する固有の必要者数 d_k を満たすために必要なタイプkの従業員数を示し，$f(D_k)$はタイプ$1\sim k$の従業員の総数に対する制約 D_k だけがあるとしたときの総従業員数を示す．必要総従業員数（W）は，任意のkに対して，タイプ$1\sim k$の従業員数が D_k の制約を満足し，タイプ$k+1\sim m$の従業員数がそれぞれ固有の制約 d_k を満足するように，次式の関係を満たす．

$$W \geqq f(D_k)+f(d_{k+1})+\cdots+f(d_m)$$
$$(k=1, 2, \ldots, m) \quad (9)$$

ランクの高い（コストが高い）従業員の必要数を小さくする場合，次のように各タイプの従業員の必要人数が与えられる．

$$w_1=f(d_1) \quad (10)$$

$$w_k=\max\{f(d_k),\ f(D_k)-w_1-w_2-\cdots-w_{k-1}\}$$
$$(k=2, 3, \ldots, m) \quad (11)$$

各タイプの従業員数がこれらの式を満足する場合，勤務スケジュールを生成するアルゴリズムは以下のようになる．

このアルゴリズムは，週末休日を割当てる段階と，平日に休日を割当てる段階の2段階から構成される．

週末休日を割当てるアルゴリズムにおいて，次の記号を用いる．

$$x_k=A\,W_k/B \quad (12)$$

$$y_k=B(\lfloor x_k\rfloor+1-x_k) \quad (13)$$

このとき，週末休日を割当てるアルゴリズムは以下の通りである．

（ステップ1）与えられたm，$d=(d_1, d_2, \ldots, d_m)$，$D=(D_1, D_2, \ldots, D_m)$，$A$，$B$を基にして，式（10）～（13）により，$w_k$，$x_k$，$y_k$（$k=1, 2, \ldots, m$）を求める．

（ステップ2）従業員のタイプ別に，$k=1, 2, \ldots, m$ の順に，$\lfloor x_k\rfloor$人の従業員にy_k週末の休日を与える．そして，$\lceil x_k\rceil$人の従業員に残りの $B-y_k$週末の休日を与える．休日を割当てられる人数が少ないy_k週末は連続しないほうがよい．そこで，数列 S＝（1,3,5,..., B or $B-1$, 2, 4, 6,..., B or $B-1$）に従って，各タイプにまたがって，$\lfloor x_k\rfloor$並びに$\lceil x_k\rceil$人の従業員が週末休日を得る週末を順に決める．

（ステップ3）各週末に休日を割当てる従業員を選択するに当っては，タイプkの$\lfloor x_k\rfloor$人の従業員を先に割当て，その後で残りの従業員の週末休日割当を順番に行う．ただし，従業員$w_k+\alpha$（$\alpha>0$）は，従業員αとして取り扱う．

一方，平日の休日割当アルゴリズムは，次の通りである．ただし，アルゴリズムにおける(i/j)スロットは，週末休日が続けて割当てられていない週の数がjで，そのj週の内の第i週を示す．

（ステップ1）タイプ1，2，...，mの順に，そして各タイプkについては第1週から第B週まで週番号順に，以下のステップに従って，休日割当を行う．

（ステップ2）週末休日が割当てられていない週が3週間あるいは4週間にわたる最初の週（つまり（1/3）ないし(1/4)）に対して，1日の平日の休日を，次の順序で与える．

(1/4)に対しては，金曜日か木曜日

(1/3)に対しては，金曜日か木曜日

いずれの場合も，金曜日に休日を与える余裕があれば，金曜日に割当てる．

（ステップ3）残りの週に対して，次の順序で，休日を割当てる．

(3/3)と(4/4)に対して，月曜日か火曜日

(2/4)に対して，（水，木），（木，金），（火，水）あるいは（月，火）

(3/4)に対して，（火，水），（月，火），（水，木）あるいは（木，金）

(2/4)と(3/4)の週が複数個存在する場合は，ステップ5の方法に従う．

(2/3)に対して，（火，水）ないし（水，木）

(1/2)に対して，木曜日，金曜日あるいは水曜日

(2/2)に対して，火曜日，月曜日あるいは水曜日

（ステップ4）ステップ3で，各週に対して割当可能な日が複数個ある場合は，次のルールで決定する．

(a)　既に割当可能な休日が残っていない曜日と連続出勤日数が2より小さいあるいは5より大きくなるような曜日は避ける．それでも決まらない場合は，(b)を用いる．

(b)　5日間の平日におけるタイプkの従業員に割当てる休日ができるだけ均等になるように選択する．それでも決まらない場合は，各タイプの従業員全体の休日が均等になるように選択する．それでも決まらない場合は，(c)を用いる．

(c)　可能であれば，連続した休日が後の割当で使えるように残すことができる曜日を選択する．それでも決まらない場合は，(d)を用いる．

(d)　第2週から第B週に対して，以前に割当てた休日からの連続勤務日数が 4 日に近い曜日を選択する．それでも決まらない場合は，(e)を用いる．

(e)　リストの最初を選択する．

（ステップ 5）同じタイプのスロットが複数個ある場合は，ステップ4で示した(a)〜(e)のルールで選択する．なお，(3/3)と(4/4)，(2/4)と(3/4)は同じタイプのスロットとして取り扱う．

例.（Emmons and Burns（1991）より引用）
$m=3, A=2, B=7, d=(d_1, d_2, ..., d_m)=(2, 3, 3)$, $D=(D_1, D_2, ..., D_m)=(2, 6, 9)$とする．このとき，式（10），（11）より，$w_1=3$，$w_2=6$，$w_3=5$．また，式（12），（13）より，$\lfloor x_1 \rfloor=0$，$\lfloor x_2 \rfloor=1$，$\lfloor x_3 \rfloor=1$，$y_1=1$，$y_2=2$，$y_3=4$である．このときの勤務スケジュールを表6に示す．

表6　従業員能力の階層性を考慮した勤務スケジュール例
(Emmons and Burns（1991）より引用)

日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土
	x					X	X	x							x	x						x					X	X	x							x	x						x					X
		x	x						x				X	X			x						x	x						x				X	X			x						x	x			
				x	x					x	x							x		X	X				x						x	x							x		X	X				x		
	x	x										x	X	X					x			x				x			x				x							x	X	X	x					
			x	x				x	x						x					X	X		x							x	x					x					X	X		x				
X					x					x	x					x				X	X			x								x	x				x	x							x			X
X	x							x				x					x	x							x		X	X	x										x	x						x		X
		x				X	X		x						x				x			x				x				x				X	X	x							x				x	
			x			X	X			x						x	x						x	x							x			X	X		x							x	x			
				x	x						x		X	X				x							x	x						x	x					x			X	X				x		
X	x							x				x							x	X	X	x							x	x									x	x							x	X
X		x							x	x					x	x							x				X	X			x					x	x						x					X
			x			X	X				x						x	x						x			X	X				x						x	x					x	x			
				x	x							x	X	X					x						x	x							x	X	X					x						x	x	

5．パートタイム従業員を考慮した場合

多くのサービスシステムでは，通常のフルタイムの従業員以外に，パートタイムで働く従業員を雇用することがある．この場合について取り扱ったのが，Emmons and Fuh (1997)である．

パートタイム従業員としては，2種類の従業員を取り上げ，1種類は費用がフルタイム従業員より安いが従事可能日数に制限があるパートタイム従業員（タイプ1）で，もう1種類は費用がフルタイム従業員より高いが従事可能日数に制限がないパートタイム従業員（タイプ2）である．フルタイム従業員の1日当り費用をc_f，タイプ1パートタイム従業員の1日当り費用をc_{p1}，タイプ2パートタイム従業員の1日当り費用をc_{p2}で表す．

平日の必要勤務者数はDで，週末の必要勤務者数はEであり，フルタイム従業員はB週末中のA週末で休日を割当てられる．また，フルタイム従業員の連続勤務日数は6日以内となるような勤務スケジュールを作成する．

まず，費用が最も安くてすむようにフルタイム従業員の数（W）を求める．タイプ1パートタイム従業員のB週間における利用可能な日数をGで表す．また，表記上の簡単化の

ため，$E/(1-A/B)$ を be で，$5D/(3+2A/B)$ を bd で表す．このとき，次のようにWを求めることができる．

①$be<bd$ ないし $be \geqq bd$ で $G/B \geqq 2(1-A/B)(be-bd)$ のときは，

$$W=\max\{(2E+5D-G/B)/5,\ 0\} \qquad (14)$$

ただし，Wが整数でない場合は，$(2E+5D-5\lfloor W \rfloor-G/B)cp2+(G/B)cp1$ と，$(2E+5D-5\lceil W \rceil)cp1$ を比べ，前者が小さければ $W=\lfloor W \rfloor$，後者が小さければ $W=\lceil W \rceil$ とする．

②$be \geqq bd$ で $G/B<2(1-A/B)(be-bd)$ の場合は，$5cf \geqq 2(1-A/B)\times cp2$ ならば，

$$W=be \qquad (15)$$

ただし，Wが整数でない場合は，$5D-5\times\lfloor W \rfloor$ と，$2(1-A/B)\lceil W \rceil$ を比べ，前者が小さければ $W=\lfloor W \rfloor$，後者が小さければ $W=\lceil W \rceil$ とする．

一方，$5cf<2(1-A/B)\times cp2$ ならば，

$$W=(2E-G/B)/2(1-A/B) \qquad (16)$$

ただし，Wが整数でない場合は，$(2E-2(1-A/B)\lfloor W \rfloor-G/B)cp2+(G/B)cp1$ と，$(2E-2(1-A/B)\lceil W \rceil)\times cp1$ を比べ，前者が小さければ $W=\lfloor W \rfloor$，後者が小さければ $W=\lceil W \rceil$ とする．

以上のように，フルタイム従業員の人数が決定されると，フルタイム従業員に所定の休日を割当て，各日の必要勤務者数を確保するように，必要パートタイム従業員の数Pを決める．

そのために，フルタイム従業員数がWであるとき，週末の勤務する従業員数が週末の必要従業員数に比べてどれほど不足しているか（ue）を求める．

$$ue=2BE-2(B-A)W \qquad (17)$$

次に，平日に勤務する従業員数が必要従業員数に比べてどれほど不足しているか（ud）を求める．

$$ud=5BD-[5BW-2(B-A)W] \qquad (18)$$

$ue<0$ のとき，この余裕分の従業員は平日勤務にまわすことができる．他方，$ud<0$ のとき，この平日の余裕分の従業員を週末勤務にまわすことができない．したがって，必要なパートタイム従業員数（P）は，

$$P=\max\{0,\ ue+\max\{0,\ ud\}\} \qquad (19)$$

費用の関係から，PがGより大きい場合は，G人まではタイプ1パートタイム従業員を，残りはタイプ2パートタイム従業員を雇用する．

次に，以上のように決められた従業員の勤務スケジュールを作成する．**Emmons and Fuh (1997)**のアルゴリズムを以下に示す．

（ステップ1）初期化

A，B，D，E，cf，$cp1$，$cp2$ とGから，フルタイム従業員の人数Wを求める．そして，ue と ud を計算して，必要パートタイム従業員数Pを求める．パートタイム従業員数は，タイプ1が $\min(P,G)$で，タイプ2が$P-G$である．

（ステップ2）週末休日の割当て

フルタイム従業員に，B週末中の丁度A週末で休日を割当てる．ここで，XとYをそれぞれ次のように定める．

$$X=AW \bmod B,\ Y=\lceil AW/B \rceil \qquad (20)$$

そして，最初のX週末はY人ずつ休日を割当てる．ただし，従業員$W+\alpha$（$\alpha>0$）は，従業員αとして取り扱う．残りの週末に対しては，$Y-1$人ずつ休日を割当てる．

（ステップ3）平日への休日の割当て

従業員が1週間当り2日間の休日を得るように，平日の休日を割当てる．

① 第1週から第B週まで順番に休日を割当てる．第k週について示す．

② 第$k-1$週末に休日が割当てられ第k週末が勤務の従業員と，逆に第$k-1$週末が勤務で第k週末に休日が割当てられている従業員の組を作る．その最大組数を$n1$で表す．第k週と第$k-1$週の両方の週末に休日を割当てられていない従業員数を$n2$で表す．

③ $n1+n2 \leqq 5$ ならば，⑦へ．

④ $n_1 \leqq n_2/2$ならば，⑥へ．

⑤ 第$k-1$週末と第k週末が（勤務，休日）という従業員と，逆に（休日，勤務）という従業員に，（月，金），（月，木），（火，金）という休日ペアを割当て，休日ペアの最初の曜日を（勤務，休日）という従業員の休日とし，後の曜日を（休日，勤務）という従業員の休日とする．両週末ともに（勤務，勤務）である従業員には，（火，水），（水，木）という休日ペアを割当てる．もし（勤務，勤務）である従業員数が2より少ない場合は，（休日，勤務）および（勤務，休日）という従業員に余分の休日を割当てる．n_1とn_2を減らして，③へ．

⑥ （月，金）という休日ペアを（休日，勤務）および（勤務，休日）という従業員ペアに割当て，（火，水），（水，木），（月，木），（火，金）という休日ペアを（勤務，勤務）という従業員に割当てる．（休日，勤務）および（勤務，休日）という従業員ペアがない場合は，（月，金）という休日ペアも（勤務，勤務）の従業員に割当てる．n_1とn_2を減らして，③へ．

⑦ もし，$n_1=0$ならば，（火，水），（月，木），（火，金），（水，木），（月，金）という休日ペアを，残っている（勤務，勤務）の従業員に割当てる．

もし，$n_1 \geqq 1$かつ$n_2 \geqq 2$ならば，⑥と同じように，（月，金）という休日ペアを（休日，勤務）および（勤務，休日）という従業員ペアに，（火，水），（水，木），（月，木），（火，金）という休日ペアを（勤務，勤務）という従業員に割当てる．

もし，$n_1 \geqq 1$かつ$n_2 < 2$ならば，（火，水）の休日ペアを（勤務，勤務）の従業員に割当て，⑧へ．

⑧ 全ての残っている（休日，勤務）という従業員に対して月曜日，火曜日，ないし水曜日を，（勤務，休日）という従業員に対して金曜日，木曜日，ないし水曜日を割当てる．

例．（Emmons and Fuh（1997）より引用）
$A=2$，$B=5$，$D=E=6$，$c_f=7$，$c_{p1}=5$，$c_{p2}=9$，$G=9$とする．このとき，$W=8$，$P=12$であり．$P>G$より，タイプ1パートタイム従業員を9日分，タイプ2パートタイム従業員を3日分だけ雇用する．

このときの勤務スケジュールを表7に示す．

表7　パートタイム従業員を考慮した勤務スケジュール例
（Emmons and Fuh（1997）を参考に作成）

従業員	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土
1	X					x			x					X	X					x				x	x					x					X
2	X				x					x				X	X				x						x	x					x				X
3	X					x				x	x					x					X	X					x			x					X
4	X				x						x	x				x					X	X					x					x			X
5		x					X	X					x				x				X	X				x					x	x			
6			x				X	X					x				x	x					x					X	X					x	
7		x					X	X				x						x	x				x					X	X				x		
8			x	x					x					X	X					x				x				X	X					x	
パートタイム	2						1	1						1	1						1	1						1	1						2

6．マルチシフトスケジューリング

マルチシフトスケジューリングでは，1日のサービス時間が長時間にわたる場合に典型的に生じる問題で，1日24時間サービスの場合は，24時間を8時間ずつの3シフトに，あるいは12時間ずつの2シフトに分けることが多い．24時間サービスでない場合でも，1日のサービス時間が8時間を越える場合は，一般にマルチシフトで対応する．繁忙時間にシフトのサービス時間が重なるように設定し

て対応することもある．

Burns and Koop (1987)は，１日３シフト（１シフト８時間）で，平日のシフトiにおける必要勤務者数がD_i，週末のシフトiにおける必要勤務者数がE_iの場合に，次の４つの条件を満たすスケジューリング問題を分析した．

① 従業員は各週当り平均して２日間の休日を割当てられる．そして，連続して２週末勤務する従業員は，少なくともその間に１回の連続休日を割当てられる．
② 従業員はB週末中のA週末は少なくとも休日が割当てられる．
③ ２つの連続して勤務するシフト間には，少なくとも１６時間の間がなければならない．また，シフト変更時には，少なくと１日の休日が与えられる．
④ 従業員の最大連続勤務日数は６シフトまである．

このとき，$D=D_1+D_2+D_3$，$E=E_1+E_2+E_3$とすると，最低限必要な従業員数（W）は，次式で与えられる．

$$W=\max\{D+\lceil 2E/5\rceil,\ \lceil BE/(B-A)\rceil\} \qquad (21)$$

Burns and Koop (1987)は，この最小従業員数で，上記の４つの条件を満たす勤務スケジュールの作成法を示した．それは，予め部分的なスケジュール（モジュール）を用意しておいて，それを組み合わせてスケジュールを作成する方法である．

その他に，一般的なmシフトで週休休日数がnの場合の分析を試みたものもある（銭・由良，1997年度日本経営工学会秋季研究大会予稿集）．

７．今後の展望

勤務スケジュールの解析的研究については，今後もより複雑で，現実に近いモデルの分析へと進んでいくものと考える．しかし，現状では，実際（例えば，交代勤務については，酒井，新しい勤務編成の視点，労働の科学，５１巻１０号(1996年)，ナーススケジューリングについては，池上・丹羽・大倉，我が国におけるナース・スケジューリング問題，オペレーションズ・リサーチ(1996年８月)参照）との差が残っている．現在，理論的解析にとっての重大な問題点として挙げられるのは，どのような複雑さの問題まで解析的に解けるかがわかっていないことである．今後，研究が進み，この限界が明らかになってくるものと考える．

勤務スケジュールの作成は，現状では，複雑な場合は，近似解法，集合被覆問題として最適化，ないし人工知能が有望である．これらの手法が今後さらに発展・普及していくと考える．しかし，計算量の少ないアルゴリズムで解が得られる問題に対してまで，あえてそれらの方法を使用する必要はなかろう．その意味でも，理論的解析の限界が解明される必要がある．

参考文献

K. R. Baker, R. N. Burns and M. W. Carter, Staff scheduling with day-off and workstretch constraints, AIIE Transactions, 11, 4(1979), pp.286-292.

W. S. Brownell and J. M. Lowerre, Scheduling of work forces required in continuous operations under alternative labor policies, Management Science, 22, 5(1976), pp.597-605.

R. N. Burns and M. W. Carter, Work force size and single shift schedules with variable demands, Management Science, 31,5(1985), pp.599-607.

R. N. Burns and G. J. Koop, A modular approach to optimal multiple-shift manpower scheduling, Operations Research, 35,1(1987), pp.100-110.

H. Emmons and R. N. Burns, Off-day scheduling with hierarchical worker categories, Operations Research, 39, 3(1991), pp.484-495.

H. Emmons and D.-H. Fuh, Sizing and scheduling a full-time and part-time workforce with off-day and off-weekend constraints, Annals of Operations Research, 70(1997), pp.473-492.