情報エントロピーからみたAHPとロジットモデルの関係

関西新技術研究所　尾崎 都司正

1. はじめに

代表的な意思決定モデルの１つに Saaty が提唱したＡＨＰ法がある．一方，交通工学の経路選択などに多用されているロジットモデルも意思決定に関する代表的な手法である．このロジットモデルは効用関数および情報量を最大とすることにより誘導でき，情報の流れが意思決定に重要な役割を果たしているが，ＡＨＰ法については情報との関係が不明確である．

また，これらのモデルはそれぞれ独自に発展してきた経緯があり，両者の関係に言及した研究はみられない．本章では，意思決定におけるＡＨＰ法とロジットモデルの関係を情報エントロピーを介して検討する．

2. 意思決定と情報エントロピー

2.1 ＡＨＰと情報エントロピー

ＡＨＰ法は，criterion j と比べて criterion i がどのくらい重要であるかを $a_{ij} = V_i/V_j$,最終的なウエイトを $V' = (V_1\, V_2\, V_3 \quad \cdots\cdots V_n)$ とし，ペアマトリックスを $A = (a_{ij})$， $a_{ii} = 1, a_{ij} = 1/a_{ji}$ としたとき，最終的なウエイトを次式で示すことができる．

$$A\,V = \lambda V \tag{1}$$

上式から意思決定者は思考過程 $X_{(0)}$， $X_{(1)}, \cdots\cdots$， $X_{(n)}, \cdots$ を経て最終的なウエイトづけに至ると考えられる．式(1)の両辺を λ でわり，また，最終的に $|V| = 1$ とすることにより，推移行列 A' とした行列をつくることができる．

$$A'V = V \tag{2}$$

これは，意思決定における思考過程が Markov 過程であることを示しており，任意の推移行列 $\mathbf{A}'$ が与えられたとき，ウェイト V の定常分布あるいは平衡分布がつねに存在することを意味している．さて，各思考過程の不確かさ $H_{(i)}$ は，イエンゼンの不等式より，

$$H_{(0)} \le H_{(1)} \le \cdots\cdots \le H_{(n)} \le \cdots \tag{3}$$

となり，最大可能エントロピーに近づく．すなわち，意思決定においては，それだけの情報が付与されると，意思決定が行なえることになる．しかし，Saaty が示した最大固有値 λ に関して情報エントロピー的な意味はまだ明らかでないが，意思決定における思考過程が Markov 過程であり， criterion の比較を通じて，不確実性が解消していくことは指摘できる．

すなわち，ＡＨＰ法は，情報エントロピーが最大の状況から criterion の比較を通じて情報エントロピーをゼロにし，意思決定者に望ましい効用値を与える方法であるといえる．

2.2 ロジットモデルと情報エントロピー

代表的なロジットモデルの誘導法である McFadden の導出方法は，Thurstone の選択理論から出発したが，その確率密度関数 $\lambda(e)$ には疑問が呈せられている．この確率密度関数の累積分布関数 q のエントロピー関数 $H(q)$ は，

$$H(q) = -q\log q = \exp(-e)\exp\{-\exp(-e)\} = \lambda(e) \tag{4}$$

のように確率密度関数になるところから，McFadden の方法も情報エントロピーが介在していると考えられる．集団の中の，ある意思決定者が m 個の選択肢のなかで，いずれか１つの選択肢を選定する状況を考える．k 番目の意思決定者の選択肢 i に対する効用を V_{ik}，その選択確率を P_{ik} でそれぞれ表示すると，次式が成立する．

$$\mathrm{H}_k = -\sum_{i=1} P_{ik}\cdot\log P_{ik} \tag{5}$$

$$\mathrm{E}_k = \sum_{i=1} \mathrm{V}_{ik}\cdot P_{ik} \tag{6}$$

$$\sum_{i=1} P_{ik} = 1 \tag{7}$$

集団全体としてみた代替案 i の選択確率を X_i とすると，各個人の代替案 i に関する情報量の総和が集団全体の選択確率 X_i に関する情報量で代表されると考えられる．

$$-(1/N)\sum_{k=1}\sum_{i=1} P_{ik}\log P_{ik} = -\sum_{i=1} X_i\log X_i \tag{8}$$

それぞれの変分をとると，

$$-\sum_{k=1}^{N}\delta\mathrm{H}_k = -N\sum_{K=1}^{N}(\log X_i + 1)\cdot\delta X_i = 0 \tag{9}$$

となる．一方，各個人の平均期待効用値については，

$$\sum_{k=1} E_k = \sum_{k=1}\sum_{i=1} V_{ik}P_{ik} = N\sum_{i=1} U_i X_i \tag{10}$$

となる期待効用値 U_i（集団全体から見た効用値にあたる）を導入すると，式(10)は $X_i = (1/N)\sum_{k=1} P_{ik}$ と近似できるので，系全体における平均期待効用値の和の微小変化 $\delta\mathrm{E}_k$ は次式で表せる．

$$\sum_{k=1}\delta\mathrm{E}_k = N\sum_{i=1}\mathrm{U}_i\delta X_i = 0 \tag{11}$$

また，

$$\sum_{i=1}\delta X_i = 0 \tag{12}$$

であり，ラグランジュの未定乗数法を用いると，集団でもロジットモデルが成立することが明らかとなる．この集団での選択確率は，ロジットモデルによる意思決定者の選択確率を加算した集計値であり，集団の場合を集計ロジットモデルと呼ぶことにする．

3. ＡＨＰ法とロジットモデルの関係

3.1 基礎式

代替案あるいは選択肢iに関する集団の平均効用値は，その特性値Z_{ij}を用いて次のように表わすことが一般的である．

$$U_i = \sum_{j=1} \beta_j Z_{ij} \tag{13}$$

この効用値を対数変換すると形式的にロジットモデルが得られが，効用値に関する Weber-Fechner の精神物理法則の制約をクリアーできない．一方，ＡＨＰ法はカテゴリーに従って，複数人に判断させる意思決定手法であるが，この判断は一様でないからＡＨＰの評価値は，確率変数になる．

$$v_i = \frac{W_i}{\sum W_k} \tag{14}$$

$$W_i = \dot{\beta}_1 Z_{i1} + \dot{\beta}_2 Z_{i2} + \cdots = \sum_{j=1} \dot{\beta}_j Z_{ij} \tag{15}$$

したがって，ロジットモデルにおける選択確率とＡＨＰの評価値との関係が次のように規定できる．

$$Q = \exp \kappa v_i / \sum \exp \kappa v_i - v_i = 0 \tag{16}$$

この式から，ＡＨＰの評価値の比が選択確率となるだけでなく，Luce の定理と集計ロジットモデルとの関係も明らかにできる．

3.2 一致性の検証

16 個のアーズメント施設を代替案とする施設の集客評価に関して，両モデルの一致性を検証する．m個のＡＨＰ値をもとに式(11)のkを最大値および最小値をv_{min}, v_{max}と標準偏差σの４つの説明変数を用いた近似式を得た．この回帰式は決定係数 0.989630 であり，近似式として用いても支障がないと考えられる．

$$k = 2.72536 m^{0.0500832} \sigma^{0.672027} v_{max}{}^{-1.191172} v_{min}{}^{0.004791} \tag{17}$$

16個の選択肢(施設)に対するＡＨＰ値の最大値および最小値は$v_{max} = 0.1997$，$v_{min} = 0.0244$であり，16個のＡＨＰ値の標準偏差$\sigma = 0.0378$，$m = 16$から$k = 8.0879$を得る．このkから$U_i = kv_i$として集計ロジットモデルの効用値を推定して匿名性を仮定した集団の選択確率を求めた．

横軸にＡＨＰ値を，Inner Dependence ＡＨＰ値および推定効用値による集計ロジットモデルの計算値を縦軸にそれぞれ

表1. 要因間の一対比較

	時 間	入場料	レストラン	水族館	固有ベクトル
時 間	1	4	4	1/4	0.23383
入場料	1/4	1	3	1/6	0.09774
レストラン	1/4	1/3	1	1/9	0.05018
水族館	4	6	9	1	0.61846

λ=4.18977　CI=0.06326

$$\begin{array}{lcccc}
 & \text{影響度を表すベクトル} & & \text{従属性なしの固有ベクトル} & & \text{従属性を考慮した固有ベクトル} \\
\begin{array}{l}\text{交通時間}\\ \text{入場料}\\ \text{レストラン}\\ \text{水族館}\end{array} & \begin{bmatrix} 0.8333 & 0.1321 & 0.1677 & 0 \\ 0 & 0.6181 & 0 & 0 \\ 0.1667 & 0.0574 & 0.4836 & 0 \\ 0 & 0.1924 & 0.3487 & 1 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} 0.2338 \\ 0.0977 \\ 0.0501 \\ 0.6184 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0.2162 \\ 0.0604 \\ 0.0688 \\ 0.6545 \end{bmatrix}
\end{array}$$

●，▲で表示した．また，Inner Dependence AHP値から推定効用値による集計ロジットモデルの計算値を＋，比較のために個人のロジットモデルから求めた集計ロジットモデルの計算結果も○で示した． AHP値と，効用値を推定して求めた集計ロジットモデルでの計算値とは1つの施設を除いてほぼ45度の直線上に示されている．この45度の直線は式(17)をもとに効用値を推定した集計ロジットモデルでの計算値とAHP値を対応づけるものとなる．なお，AHP評価には絶対評価法とInner Dependence法を用いた．

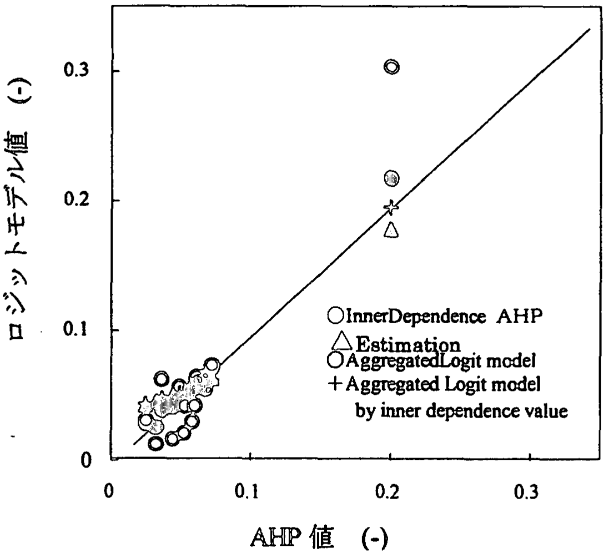

図1．AHPとロジットモデルの関係

4. まとめ

AHP法における一対比較による重みづけはMarkov過程に従うと考えられるから，一対比較の時点で情報エントロピーが最大となると考えられる．すなわち，最大の不確実性に対する情報量が与えられれば，不確実性が完全に解消される．ロジットモデルにおいても効用が最大，情報エントロピーが最大で意思決定がなされるが，AHPでは効用に該当するものが定義されていなかった．本研究では重みづけが効用値の大小関係を表すとすると，ロジットモデルもAHP法とも情報エントロピーの側面からみると同じモデルといえる．ただ，AHP法はロジットモデルと同型の線形効用関数式におけるパラメータの導出方法のみが違うといえる．

したがって，集団での意思決定法であるAHP法においては，そのプライオリティづけが選択確率を表すと考えられ，ロジットモデルの効用関数が線形である場合には，ロジットモデルにおけるパラメータ探索や選択確率の妥当性がチェックできるなど，その用途は広いと考えられる．

参考文献

1)木下，AHP手法と応用技術，総合技術センター，1993

2) McFadden,D.， *Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior*,Frontiers in Econometrics, New York, Academic Press

3) 尾崎，木下，AHPとロジットモデル，土木計画学研究論文集，14，157-166,1997

4) 尾崎，木下，情報エントロピーによる質的変量モデルについて－ロジットモデルの誘導と応用，システム制御情報学会誌，11，1998