整合性の評価とその改善に関する考察

01404360　日本大学　西澤一友　NISHIZAWA Kazutomo

1　はじめに

AHP(Analytic Hierarchy Process)で、ある評価基準に対する代替案の一対比較または評価基準同士の一対比較の整合性、すなわち一対比較結果の矛盾の有無は完全情報の場合、通常、$CI(Consistency\ Index) = (\lambda_{max} - n)/(n-1)$により$CI < 0.1$なら整合性は良い、と判定されている[1]。しかし、この0.1という値は経験的な数値であり、理論的根拠は無い。また、整合性が良くないと判定されてもCIの値だけでは一対比較の矛盾に対する情報は得られない。一方、一対比較が欠落している不完全情報の場合では、ウエイトを計算する方法[2][3]はあるものの、不完全情報だけで整合性を評価する方法はない。

整合性が良くない主な原因として、一対比較の優劣の逆転と、過大評価または過小評価の２つが考えられる。ここでは、この２項目について、整合性の評価と改善のための方法を示し、例をあげて説明する。

2　一対比較の優劣の逆転

まず、従来のCIに代わる評価基準として、一対比較行列に対応する有向グラフより整合性を判定する新しい基準を述べる。このアイディアはグラフ理論とネットワーク理論を基にしたもので、有向グラフの中のサイクルとその構成要素を見つけ、さらに、サイクルをなくすことにより、整合性を改善する方法である[4]。

2.1　一対比較の有向グラフでの表現

代替案iと代替案jの一対比較の結果は、対応する有向グラフでは、iがjよりも優れていれば点iと点jを矢印で結び“$i \rightarrow j$”と表し、アーク(i,j)とよぶ。不完全情報の場合は何も結ばない。たとえば、次のような式(1)に示す3×3一対比較行列を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/4 \\ 1/3 & 1 & 5 \\ 4 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

式(1)より、$\lambda_{max} = 5.17$が得られ、$CI = 1.08$となり、整合性が良くないことがわかる。対応する有向グラフは図1のようになりサイクルを形成している。このように、一対比較行列の整合性は対応する有向

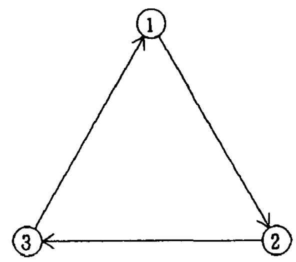

図 1: 一対比較の有向グラフ表現

グラフの中のサイクルに起因していることがわかる。

2.2　サイクルの発見

一対比較行列に対応する有向グラフにはいろいろな長さのサイクルが含まれる。サイクルを見つける方法としては、有向グラフに対する頂点行列$\boldsymbol{V}$を使う[5]。ここで、$i \rightarrow j$のみ、$\boldsymbol{V}(i,j) = 1$、その他は0である。たとえば、長さ３のサイクルの構成要素を見つけるには、$\boldsymbol{V}$と$\boldsymbol{V}^2$を使う。$\boldsymbol{V}(i,k) > 1, \boldsymbol{V}^2(k,i) > 0, \boldsymbol{V}(k,j) > 1, \boldsymbol{V}^2(j,k) > 0, \boldsymbol{V}(j,i) = 1$を満足する$(i,j,k)$がサイクルを形成する。そして、サイクルをなくすためには、発見されたサイクルを最小被覆するのアークの集合のうち、複数のサイクルに共通するアークを修正する。

2.3　完全情報の場合の評価例

完全情報の場合の評価例として示す例１は、スポーツのリーグ戦の結果の分析である。対戦結果を表１に示す。この例は整合性は良くない。分析によりその原因が指摘できる。

ＡＨＰにおいて、スポーツの勝ち負けのように２値で評価する場合をバイナリＡＨＰと呼ぶ。バイナリＡＨＰでは、代替案iが代替案jよりも優れていれば、$\boldsymbol{A}(i,j) = \theta$、$\boldsymbol{A}(j,i) = 1/\theta$とする。また、$i$と$j$

表 1: 例1の対戦結果

	①	②	③	④	⑤	⑥
①	＼	○	○	○	○	○
②	×	＼	×	○	○	○
③	×	○	＼	×	×	○
④	×	×	○	＼	○	×
⑤	×	×	○	×	＼	○
⑥	×	×	×	○	×	＼

が同等であれば、$\mathbb{A}(i,j) = \mathbb{A}(j,i) = 1$とする。もちろん$\mathbb{A}(i,i) = 1$である。ただし、$\theta$はパラメータで、1より大きい実数である。ウエイトを求めるとき、一対比較行列の要素の値を$\theta = 2$として計算する。表1に対応するバイナリAHPの一対比較行列を式(2)に示す。

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta & \theta & \theta & \theta \\ 1/\theta & 1 & 1/\theta & \theta & \theta & \theta \\ 1/\theta & \theta & 1 & 1/\theta & 1/\theta & \theta \\ 1/\theta & 1/\theta & \theta & 1 & \theta & 1/\theta \\ 1/\theta & 1/\theta & \theta & 1/\theta & 1 & \theta \\ 1/\theta & 1/\theta & 1/\theta & \theta & 1/\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(2)の一対比較行列$\mathbb{A}$について、θ=2として計算すると$\lambda_{max} = 6.744$が求められ、$CI = 0.149$となり、整合性は良くないと判断できる。そこで、表1に対応した有向グラフを図2に示し、整合性を再評価してみる。

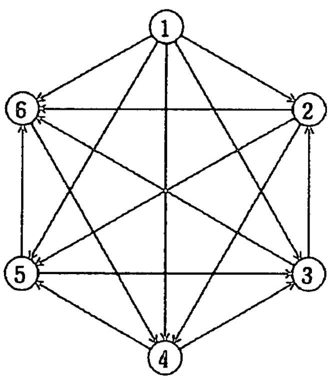

図 2: 例1の有向グラフ

完全情報の場合には、長さ3のサイクルだけを見つければ良い。なぜなら、もし、長さ4のサイクルがあっても、そこには必ず長さ3のサイクルが存在するからである。図2に含まれる長さ3のサイクルとその構成要素を求めてみると、4つのサイクル、(2 4 3)、(2 5 3)、(3 6 4)、(4 5 6)が得られた。したがって、この例では整合性は悪い。そこで、整合性が悪い原因を調べるため、発見できたサイクル関する二部グラフを図3に示す。

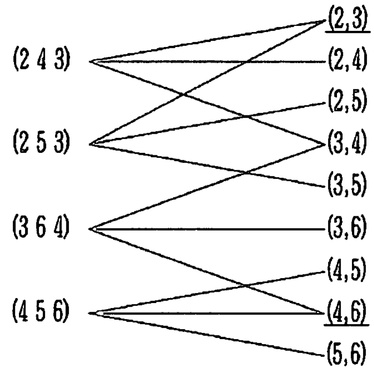

図 3: 例1の二部グラフ

図3より、アンダーラインを引いた最小被覆の集合、$\mathbb{M} = \{ (2,3),(4,6) \}$を得る。すなわち、アーク(2,3)と(4,6)の矢印の方向を逆にすれば、図2に含まれる4つのサイクルはすべて消える。したがって、式(2)の一対比較行列$\mathbb{A}$の整合性が悪いのは、a_{23}とa_{46}が誤っている、と指摘できる。

この例1では、2つのサイクルを被覆するアーク(2,3)、(3,4)、(4,6)の3つがあった。すなわち、修正する候補は3つである。これら3つの候補すべてを修正すれば、もちろんサイクルはすべて消えるが、図3より、すべての候補を修正する必要がないことがわかる。また、実際の対戦結果は修正できないが、仮にa_{23}とa_{46}を修正して計算した結果、$CI = 0.054$が得られた。

2.4 不完全情報の場合の評価例

不完全情報の場合の評価例として示す例2は、式(3)のバイナリAHPの6×6一対比較行列$\mathbb{A}$である。ここで、"ロ"は欠落を表す。式(3)では、欠落は7カ所である。不完全情報からウエイトを求める前に、

不完全情報の整合性を調べてみる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/\theta & \square & \square & \theta & 1/\theta \\ \theta & 1 & \theta & 1/\theta & \square & 1/\theta \\ \square & 1/\theta & 1 & \square & \square & \theta \\ \square & \theta & \square & 1 & 1/\theta & \square \\ 1/\theta & \square & \square & \theta & 1 & \square \\ \theta & \theta & 1/\theta & \square & \square & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3) に対応した有向グラフを図4に示す。

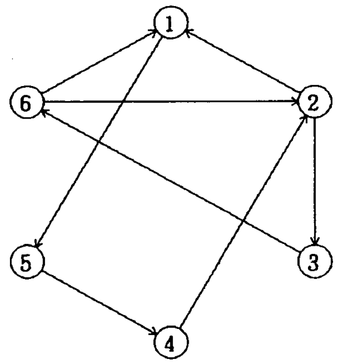

図 4: 例２の有向グラフ

不完全情報の場合はすべての長さのサイクルを見つけなくてはならない。図4から長さ６までのサイクルを見つけてみると、３つのサイクル、(2 3 6)、(1 5 4 2)、(1 5 4 2 3 6) が得られた。そして、整合性を悪くしている原因を指摘するため、サイクルに対する対応する二部グラフを求め、図5に示す。

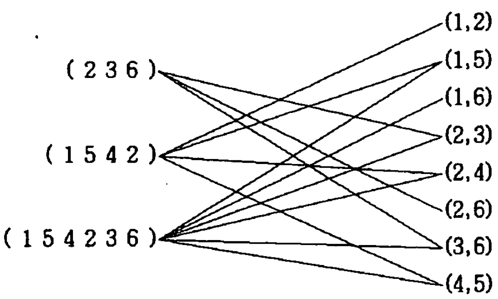

図 5: 例２の二部グラフ

図5では、すべてのサイクルを被覆するアークは見つからない。もう一度、図4をよく見ると、２つのサイクル、(2 3 6) と (1 5 4 2) は、②で接し(1 5 4 2 3 6) となっている。さらに、(2 3 6) と (1 5 4 2) は共通のアークを持っていない。したがって、この例２では、すべてのサイクルを被覆するアークのペアはいくつか存在するが、共通するアークの修正でサイクルをなくすことはできず、一対比較の誤りを特定することはできない。そこで、意思決定者に対するアドバイスは次のようになる。もし可能であれば、もう一度、(2 3 6) と (1 5 4 2) について、一対比較を慎重に行い修正することが望ましい。修正が不可能であれば、すでに整合性が悪いことを認識して算出されたウエイトを吟味しなければならない。

3　過大評価または過小評価

過大評価または過小評価の例として、式 (4) に示す４つの代替案に対する一対比較行列 [6] について考える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 8 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/8 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

図6に示す対応する有向グラフにはサイクルはなく、一見、整合性は良いように思われる。しかし、$CI = 0.15$ である。 その原因として次のことが考えられる。

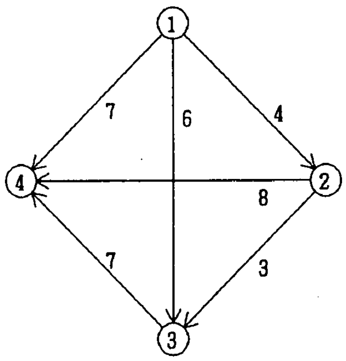

図 6: 例３の有向グラフ

たとえば、図6の中で、①と③、①と④の一対比較が正しければ、③と④の一対比較の結果はほぼ同等と考えられ、評価値としては２または３が妥当であり、７は過大評価であると思われる。

3.1　過大評価または過小評価の判定方法

一対比較の過大評価または過小評価を判定するアイディアは３つの代替案について評価値の関係から判定するものである。$n \times n$ 一対比較行列を $A = [a_{ij}], i = 1 \sim n,\ j = 1 \sim n$ とし、ウエイトを $w_i, i = 1 \sim n$ と

する。整合性が良い場合、Aは次式のようになる。

$$A=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

このように、$a_{ij}=w_i/w_j$より、任意のkについて

$$a_{ij}=(w_i/w_k)/(w_j/w_k)=a_{ik}/a_{jk}=a_{kj}/a_{ki} \quad (6)$$

となるはずである。したがって、a_{ij}とa_{kj}/a_{ki}が大きく異なっていれば過大評価または過小評価であると判定できる。

3.2 判定の適用例

過大評価または過小評価の判定を、式 (4) の一対比較行列Aに適用してみる。各$k(k=1\sim4)$について$a_{kj}, j=1\sim4$の一対比較は正しいと仮定し、式 (6) より、a'_{ij}を求めたA'より、CI、λ_{max}、ウエイト ($w_i, i=1\sim4$) を計算すると表2のようになる。表2において、$k=4$の場合、ウエイトの順位が逆転している。したがって$a_{4j}, j=1\sim4$の一対比較は正しいとした仮定はくずれる。そこで、$k=4$の計算過程を調べると次のようになる。

表 2: 結果の比較

	A	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
CI	0.15	0.0	0.0	0.0	0.0
λ_{max}	4.454	4.000	4.000	4.000	4.000
w_1	0.587	0.641	0.732	0.591	0.304
w_2	0.244	0.160	0.183	0.295	0.347
w_3	0.130	0.106	0.061	0.098	0.304
w_4	0.038	0.091	0.022	0.014	0.043

$$a'_{12}=a_{42}/a_{41}=(1/8)/(1/7)=0.875$$
$$a'_{13}=a_{43}/a_{41}=(1/7)/(1/7)=1.000$$
$$a'_{23}=a_{43}/a_{42}=(1/7)/(1/8)=1.142$$

この結果と式 (4) を比較すると、$a_{42}/a_{41}>1$、$a_{43}/a_{41}>1$でなければならないので、$a_{41}<a_{42}<a_{43}(a_{14}>a_{24}>a_{34})$となるはずである。このことから、$A$の$a_{14}$は過小評価であると思われる。

4 結論

一対比較行列を有向グラフに表現することにより、評価の逆転とその改善に関する情報が得られることを示した。さらに、過大評価または過小評価の判定方法を示したが、基準とする一対比較が正しいという仮定の下での方法であり、矛盾が含まれる場合についてはなお検討が必要である。

本方法と、一対比較行列が完全情報であるがために整合性を悪くしている応用例から、すべての一対比較を行わなくても整合性の良い一対比較行列を完成できることがわかる。代替案の数が増えるとともに一対比較の数が多くなる短所を補うためにも、積極的に、不完全情報からサイクルを作らないように整合性を保ちつつ欠落した一対比較結果の推定を行うことが望ましい。

参考文献

[1] Saaty,T.L.: The Analytic Hierarchy Process, McGrawHill, NewYork, (1980).

[2] 竹田英二：不完全一対比較行列におけるＡＨＰウエイトの計算法, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 34, No.4, (1989), 169-172.

[3] Takahashi, I and M. Fukuda : Comparisons of AHP with other methods in binary paired comparisons, Proceedings of the Second Conference of the Association of Asian-Pacific Operational Research Societies within IFORS, (1991), 325-331.

[4] Nishizawa, K : A Consistency Improving Method in Binary AHP, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol.38, No.1, (1995), 21-33.

[5] Nishizawa, K : A Method to Find Elements of Cycles in an Incomplete Directed Graph and Its Applications –Binary AHP and Petri Net –, An International Journal Computers & Mathematics with Applications, Vol.33, No.9,(1997), 33-46.

[6] 刀根薫： ゲーム感覚意思決定法, 日科技連, (1990), 38-40.