Saaty型Supermatrix法と木下・中西型一斉法の比較

01300450　日本大学　高橋磐郎　TAKAHASHI Iwaro

1　ANPと一斉法の考え方

AHPの典型はつぎのようにまとめられる：代替案の集合$A_1, \cdots, A_n$に対していくつかの評価基準$C_1, \cdots, C_m$があり、C_iの下での各代替案の良さ$u_{1i}, \cdots, u_{ni}$を評価する。一方全体目的Gからみた$C_1, \cdots, C_m$の重要度$w_1, \cdots, w_m$を求め、代替案A_jの総合評価y_j

$$y_j = u_{j1}w_1 + u_{j2}w_2 + \cdots + u_{jm}w_m \tag{1.1}$$

を与える。

これに対してSaaty氏の提案するANP(Analytic Network Process)の方法[1]（これは上記のような典型的AHPよりもっと広い形のものに応用可能であるが）を、上記のAHPの場合に適用してみると、各評価基準の重要度をAHPのように全体目的という観点からでなく、各代替案の観点から求めようという立場である。つまり、ANPは、評価基準C_iが代替案A_jの良さu_{ji}を決めると同時にA_jがC_iの重要度w_{ij}を決めるという相互評価的な構造を持つものであって、フィードバックの構造が含まれる。

したがってその解法には、AHP(1.1)のように単にウエイトをかけて加えるといった形でなく、超行列(supermatrix)を係数行列とする一種の方程式を解くという操作が必要となる。

ANPとは独立に、木下・中西による支配型法およびそれを拡張した一斉法という方法[2]が提案されていて、これは構造としてはANPのフィードバック構造と似ているが内容は異っている。

まず、支配型というのは代替案のどれか1つを代表者A_{j*}（いわゆる「たたき台」）とみて、これを中心にして評価基準の重要度を決めようというものである。すなわちまずこの代表者A_{j*}の観点から各評価基準C_iの重要度w_{i*}を決め、それと同時にその他の代替案A_jからみた重要度w_{ij}はw_{i*}とu_{ij}から一種の比例関係によって決めてしまおうという考え方である。つまりA_{j*}によって他の代替案の観点が支配されているという意味で「支配型」という言葉が使われたのだろう。

しかし、この方法では、どの代替案を代表者として選ぶかは、どうしても恣意的になって客観性を欠くことになる。そこで各代替案を代表者として選んで上記のように決められたウエイト全体を、一種の逐次近似法で、総合的にまとめて行こうというのが一斉法である。

一般に、AHPにおいてもANPにおいても、評価基準のウエイトw_iあるいはw_{ij}は、評価基準の下での代替案の良さの評価u_{ji}に比べて、誤差が大きい、つまり不安定である、という経験的事実がある。この一斉法は、この不安定さを、安定させるという意味で、従来にはない新しい立場であると思われる。

つまりANPでは、u_{ji}、$w_{ij} (i = 1 \sim m,\ j = 1 \sim n)$が与えられたという条件の下で、代替案$A_j (j = 1 \sim n)$の良さの総合評価$y_j$と、評価基準$C_i (i = 1 \sim m)$の総合重要度$x_i$を求めることを主な目的としているのに対して、一斉法はu_{ji}、w_{ij}からw_{ij}のより安定した値$\overline{w_{ij}}$を求めようとすることを主な目的としているとみればよいだろう。

2　ANPの例とその超行列

例1　アメリカでの例だが、車の評価をするのに、代替案に相当するものとして、アメリカ車(A)、ヨーロッパ車(E)、日本車(J)を考え、評価基準に相当するものとしてコスト(C)、修理システム(R)、耐久性(D)を考える。

普通のAHPのような各評価基準に対する車の評価をして、C、R、Dに対する評価値を列ベクトルとして並べてできる行列$\boldsymbol{U} = [u_{ij}]$を評価基準(C,R,D)の代替案(A,E,J)に対する評価行列と呼ぶ。

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0.637 & 0.582 & 0.105 \\ 0.105 & 0.109 & 0.637 \\ 0.258 & 0.309 & 0.258 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

しかしこれと同時に、各車から見たとき、CやRやDはどの程度重要かという見方もできる。

アメリカ車(A)から見たときの、C、R、Dの重要度、ヨーロッパ車(E)から見たとき、日本車(J)から見たときのものを列ベクトルとした評価行列を$\boldsymbol{W}$と

しておこう。

$$W = \begin{array}{c} \\ A \\ E \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{E} & \mathrm{J} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.634 & 0.250 & 0.400 \\ 0.192 & 0.250 & 0.200 \\ 0.174 & 0.500 & 0.400 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.2}$$

このとき、このANPに対する超行列Sを

$$S = \begin{bmatrix} 0 & W \\ U & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

と定義する。

WもUもその各列で要素の和は1であるから、Sの各列で要素の和は1である。各要素が非負で、その各列で要素の和が1である行列を確率行列というが、Sは確率行列となることがわかる。この例に対する超行列は次のようになる。

$S=$

$$\begin{array}{c|cccccc} & C & R & D & A & E & J \\ \hline C & 0 & 0 & 0 & .634 & .250 & .400 \\ R & 0 & 0 & 0 & .192 & .250 & .200 \\ D & 0 & 0 & 0 & .174 & .500 & .400 \\ A & .637 & .582 & .105 & 0 & 0 & 0 \\ E & .105 & .109 & .637 & 0 & 0 & 0 \\ J & .258 & .309 & .258 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{2.4}$$

3 ANPの解法

ANPの解法は、グラフ構造が強連結（どの点から他のどの点へも矢線をたどって到達できるグラフ）であればあるいは対応する超行列Sが既約行列であれば、そのグラフの各点の（点が代替案に対応するものならその良さの、点が評価基準に対応するものならその重要度の）総合評価値$x^T = [x_1, \cdots, x_n]$は

$$Sx = x \tag{3.1}$$

の解として求まることがわかる[3]。(Saaty氏はS^∞の各列ベクトルが同一のベクトルに収束し、それを総合評価とすることを提案しているが、これは(3.1)の解xと同一である。)

(3.1)は、$(S-I)x = 0$という同次方程式とみてもよいから、普通の掃出法によっても解ける。またSは確率行列だから、その最大固有値は1であり、(3.1)の解xはSの主固有ベクトルであるから、パワー法によって求めることができる。(3.1)をこのように固有値問題と考えれば、有名なフロベニウスの定理から、xが定数倍をのぞいて一意であり、その成分がすべて正であることもわかる。

(3.1)を§2の例1に適用してみよう。評価基準(C,R,D)に対する総合評価値を$x^T = [x_1, x_2, x_3]$、代替案(A,E,J)のそれを$y^T = [y_1, y_2, y_3]$とすると(2.3)より(3.1)は

$$\begin{bmatrix} 0 & W \\ U & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

となるから、これから$Wy=x$、$Ux=y$となり、xを消去すると

$$UWy = y \tag{3.3}$$

となる。

例1の数値から

$$\begin{aligned} UW &= \begin{bmatrix} .637 & .582 & .105 \\ .105 & .109 & .637 \\ .258 & .309 & .258 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .634 & .250 & .400 \\ .192 & .250 & .200 \\ .174 & .500 & .400 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} .534 & .357 & .413 \\ .198 & .372 & .319 \\ .268 & .271 & .269 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、UW自身も確率行列だから(3.3)の解はパワー法より

$$y^T = \begin{bmatrix} 0.452 & 0.279 & 0.269 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

となる。さらに$Wy=x$より

$$x^T = \begin{bmatrix} 0.464 & 0.210 & 0.326 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

((3.4)、(3.5)は成分の和が1になるように基準化してある)。

4 支配型による方法

§2の例1と同様なパターンである問題を考えてみよう。ここでたとえばA_1を代表者（支配代替案）として選ぶ場合は、A_1のC_iに対する重要度$w_{i1} (i = 1, 2)$を基準にして、その他の代替案$A_j (j = 2, 3)$のC_iに対する重要度w_{ij}の推定値$\widehat{w}_{ij}(1)$を次の原則によって定めようというのが支配型の考えである。

$$\frac{\widehat{w}_{ij}(1)}{w_{i1}} = \frac{u_{ji}}{u_{1i}} \tag{4.1}$$

これは代表者A_1とその他の被支配代替案A_jのC_iによる評価の比が、C_iからA_1、A_jに対する評価の比に一致するという原則である。

この原則が妥当なものか否かは議論を呼ぶところであるが、もしこの原則を認めさえすれば(4.1)より

$$\widehat{w}_{ij}(1)=\frac{u_{ji}}{u_{1i}}w_{i1}\ (i=1,2;j=2,3) \tag{4.2}$$

によって、A_jのC_iに対する重要度の評価値が推定される。

そこでたとえば、A_jのC_1、C_2に対する評価値の推定値は

$$\widehat{w}_{1j}(1)=\frac{u_{j1}}{u_{11}}w_{11},\ \widehat{w}_{2j}(1)=\frac{u_{j2}}{u_{12}}w_{21}$$

となるが、一般にこの和は1とならないから、1となるように基準化しなければならない。その結果は、

$$\begin{aligned}\widehat{w}_{1j}(1)&=\frac{u_{j1}}{u_{11}}w_{11}/(\frac{u_{j1}}{u_{11}}w_{11}+\frac{u_{j2}}{u_{12}}w_{21})\\ \widehat{w}_{2j}(1)&=\frac{u_{j2}}{u_{12}}w_{21}/(\frac{u_{j1}}{u_{11}}w_{11}+\frac{u_{j2}}{u_{12}}w_{21})\end{aligned} \tag{4.3}$$

となり、これがw_{1j}、w_{2j}の推定とみればよい。

例2　次の数値例に対してA_1を代表者とした場合の推定値を計算した結果は次のようになる。

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}\\u_{21}&u_{22}\\u_{31}&u_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/6&0.6\\1/3&0.3\\1/2&0.1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}w_{11}&w_{12}&w_{13}\\w_{21}&w_{22}&w_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4&0.7&0.2\\0.6&0.3&0.8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}w_{11}&\widehat{w}_{12}(1)&\widehat{w}_{13}(1)\\w_{21}&\widehat{w}_{22}(1)&\widehat{w}_{33}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4&0.723&0.923\\0.6&0.273&0.077\end{bmatrix}$$

一般に、推定値は、はじめに与えられた値とかなりの食い違いがおこる。これをいかにまとめるかが一斉法である。

なお支配代替案をkとした場合の(4.2)に対する一般式は

$$\widehat{w}_{ij}(k)=\frac{u_{ji}}{u_{ki}}w_{ik} \tag{4.4}$$

$$(k=1,2,3;i=1,2;j(\neq k)=1,2,3)$$

これを基準化すれば(4.3)に対応する式が得られる。

5　一斉法

§4で示した例2を通して一斉法の説明をしよう。

(i) まず各代替案のC_1、C_2に対する重要度の評価値w_{1j}、w_{2j}を初期値として設定する（表1の第1行)。

(ii) A_1を支配者とした場合のA_2、A_3のC_1、C_2に対する評価値の推定を§4の(4.3)式で求める（これを表1の第2行A_2、A_3の欄に示す)。

(iii) 次にA_2を支配者とした場合のA_1、A_3のC_1、C_2に対する評価値の推定を§4の(4.4)式で求める（これを表1の第3行A_1、A_3の欄に示す)。

(iv) 次にA_3を支配者とした場合のA_1、A_2のC_1、C_2に対する評価値の推定を求める（これを表1の第4行A_1、A_2の欄に示す)。

(v) 表1のA_1、A_2、A_3の各欄における各列の3つの値を平均して、w_{ij}の新たな推定値w'_{ij}を求め、これを新たな初期値として以上の手順を繰り返す。

表 1:

A_1		A_2		A_3	
w_{11}	w_{21}	w_{12}	w_{22}	w_{13}	w_{23}
		$\widehat{w}_{12}(1)$	$\widehat{w}_{22}(1)$	$\widehat{w}_{13}(1)$	$\widehat{w}_{23}(1)$
$\widehat{w}_{11}(2)$	$\widehat{w}_{21}(2)$			$\widehat{w}_{13}(2)$	$\widehat{w}_{23}(2)$
$\widehat{w}_{11}(3)$	$\widehat{w}_{21}(3)$	$\widehat{w}_{12}(3)$	$\widehat{w}_{22}(3)$		
w'_{11}	w'_{21}	w'_{12}	w'_{22}	w'_{13}	w'_{23}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例2に示した数値例に対して以上の方法をほどこしたものが表2である。この場合は4ステップでほぼ収束している。この収束値を$\overline{w_{ij}}$としておこう。$\overline{w_{ij}}$は不安定なw_{ij}を安定した値に統合化したものとみることができる。これが一斉法の主目的である。

表 2:

step1	.400	.600	.700	.300	.200	.800
			.727	.273	.923	.077
	.368	.632			.913	.087
	.014	.986	.053	.947		
step2	.261	.739	.493	.507	.679	.321
			.585	.415	.864	.136
	.196	.804			.814	.186
	.105	.895	.319	.681		
step3	.187	.813	.466	.534	.786	.214
			.479	.521	.806	.194
	.179	.821			.797	.203
	.169	.831	.449	.551		
step4	.178	.822	.465	.535	.796	.204
	$\overline{w_{11}}$	$\overline{w_{21}}$	$\overline{w_{12}}$	$\overline{w_{22}}$	$\overline{w_{13}}$	$\overline{w_{23}}$

一般にこの方法による収束性の証明は数学的にはまだできていないが、多くの数値例に当たってみて収束しなかった場合はない、とのことである。

6 ANPと一斉法との関連

さきに述べたように、ANPと一斉法は、ともに同一構造の相互評価問題を対象とはするが、目的の方向が異っているから、どちらが良いとか悪いとかの比較はできないが両者の関係を述べておこう。

まず例2に示したU、Wに対して、§3の方法でANPの解を求めてみると、

$$\begin{aligned} UW &= \begin{bmatrix} 1/6 & 0.6 \\ 1/3 & 0.3 \\ 1/2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.427 & 0.297 & 0.513 \\ 0.313 & 0.323 & 0.307 \\ 0.260 & 0.380 & 0.180 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、(3.3)より代替案および評価基準の総合評価値は

$$\begin{aligned} y^T &= \begin{bmatrix} 0.410 & 0.316 & 0.275 \end{bmatrix} \\ x^T &= \begin{bmatrix} 0.438 & 0.562 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.1)$$

となる。

これに対して一斉法で$W=[w_{ij}]$の各要素を推定して$\overline{W}=[\overline{w}_{ij}]$を$W$の代りに用いて、$x$、$y$を求めてみると

$$\begin{aligned} U\overline{W} &= \begin{bmatrix} 1/6 & 0.6 \\ 1/3 & 0.3 \\ 1/2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.178 & 0.465 & 0.796 \\ 0.822 & 0.535 & 0.204 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.523 & 0.399 & 0.255 \\ 0.306 & 0.316 & 0.327 \\ 0.171 & 0.286 & 0.418 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3.3)より、

$$\begin{aligned} y^T &= \begin{bmatrix} 0.410 & 0.315 & 0.275 \end{bmatrix} \\ x^T &= \begin{bmatrix} 0.438 & 0.562 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.2)$$

となって、この例ではUWと$U\overline{W}$とはかなり異っているが、x、yは少数3桁まではほぼ一致している。

しかし、同じUに対してWを

$$W = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.6 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

とした場合、ANP直接の方法では

$$\begin{aligned} y^T &= \begin{bmatrix} 0.373 & 0.317 & 0.310 \end{bmatrix} \\ x^T &= \begin{bmatrix} 0.525 & 0.475 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.3)$$

となる。

一斉法でWを推定した$\overline{W}$は

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} 0.216 & 0.524 & 0.832 \\ 0.784 & 0.476 & 0.168 \end{bmatrix}$$

となり、これをWの代りに用いたときのANPの解は

$$\begin{aligned} y^T &= \begin{bmatrix} 0.398 & 0.317 & 0.299 \end{bmatrix} \\ x^T &= \begin{bmatrix} 0.498 & 0.502 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.4)$$

(6.3)、(6.4)はむろん一致はしないが、かなり近い値となっている。

7 今後の課題

(i) 例に示したような型のANP問題に対して、代替案から評価基準の重要度に対する評価$W=[w_{ij}]$の統合推定$\overline{W}$を求める方法が一斉法であるが、これが良い推定になっているか否かを確かめるための何らかの方法を見出す。

(ii) 一斉法の基になっている支配型の原則(4.1)の理論的根拠の解明、あるいは他の原則の提案。

(iii) 一斉法の収束証明。

(iv) 例に示した型より一般なANP問題に対して一斉法を拡張する。

参考文献

[1] T.L.Saaty: The Analytic Network Process, RWS,(1996).

[2] 木下栄蔵、中西昌武：AHPにおける新しい視点の提案、土木学会論文集、No.569、IV-36、1~8、(1997).

[3] 高橋磐郎：AHPからANPへの諸問題I~VI、オペレーションズ・リサーチ、vol.43、1月~6月、(1998).