資本市場の効率性とＤＥＡ
(Data Envelopment Analysis) 分析

清水康司　　高森寛
青山学院大学

１．はじめに

ＤＥＡ（Data Envelopment Analysis）の評価は、投入される資源に対して産出される量を比べての効率性という観点からなされる。本シンポジウムでは、投資資産が取り引きされる市場に対しても、ＤＥＡ分析の枠組みにおいて、評価できることを示す。また、ファイナンス分野における重要な概念である危険中立確率や利子率のスポット・イールド曲線推定の問題とＤＥＡ分析の関連について明らかにする。

２．ＤＥＡの枠組みと資本市場の効率性

ここでの意思決定の実体とは、いくつかの種類の入力（投入、INPUT）をいくつかの出力（産出、OUTPUT）に変換することに携わる活動体と見なされるもののことであり、DMU(Decision Making Unit)と呼ばれる。ここで、各DMUのデータが次のように与えられたとしよう：

x_{rj} = DMU_j が利用する入力の量
y_{ij} = DMU_j が生成する出力の量

ただし、r = 1, 2,..., s ； i = 1, 2,...,m ；j =1,2,..., nとする。また、便宜上、すべての投入と産出は正の値であると仮定する。

DMU j	DMU1	DMU2	・・・・・・	DMUn	
投入 X j	x_{11} ⋮ x_{s1}	x_{12} ⋮ x_{s2}	・・・・・・	x_{1n} ⋮ x_{sn}	ν_1 ⋮ ν_s
産出 Y j	y_{11} ⋮ y_{m1}	y_{12} ⋮ y_{m2}	・・・・・・	y_{1n} ⋮ y_{mn}	μ_1 ⋮ μ_m
	λ_1	λ_2	・・・・・・	λ_n	

ファイナンスにおける資本市場の効率性を、ＤＥＡの枠組みで評価するに際しては、市場で取引きされる各投資資産ｊを、ＤＭＵｊとして取り扱うことになる。各資産ｊの市場価格p_jを投入と見なし、産出は、m-ベクトルC_jとすると、各投資資産の投入産出ベクトルは以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} p_j \\ C_j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} p_j \\ C_{1j} \\ C_{2j} \\ \vdots \\ C_{mj} \end{bmatrix}$$

危険資産の場合は、自然の状態（State of Nature）に依存して、産出はC_{1j}からC_{mj}までの可能な値が考えられる。また、リスク資産として扱わない債券資産の場合は、C_{ij}は現時点からｉ期先の将来において、この資産がもたらすキャッシュ・フロー（産出）である。

さて、ＤＥＡ分析において、ある特定のＤＭＵをＤＭＵｏとする。この時、その投入に対する産出の効率性という点を考えると、効率性を評価する典型的なモデルとして次のような線形計画問題を設定する。

投入指向ＤＥＡモデル
（Input Oriented Model）：

目的関数　min θ_0　　（１）

制約：
$$\theta_0 X_0 \geq \sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j$$
$$Y_0 \leq \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j$$
$$\lambda_j \geq 0 \quad , \ j = 1,\ldots,n$$

この問題で、$\theta_o < 1$であるような解が得られたら、ＤＭＵｏは効率的ではないと判定される。上の投入指向ＤＥＡモデルに対して、次のモデルも考えられる。

産出指向ＤＥＡモデル
（*Output Oriented Model*）：

$$\text{目的関数} \quad \max \ \theta_0 \qquad (2)$$

$$\text{制約：} \quad X_0 \ge \sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j$$

$$\theta_0 Y_0 \le \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j$$

$$\lambda_j \ge 0 \quad , \ j=1,\dots,n$$

この問題で、$\theta_o > 1$ であるような解が得られたら、ＤＭＵoは効率的ではない、といえる。

<数値例：債券とその将来キャッシュ・フロー>

	債券1	債券2	債券3	債券4
価格　Ｐｊ	100	100	100	100
第1期　Ｃ１ｊ	20	110	80	6
第2期　Ｃ２ｊ	70	0	40	104

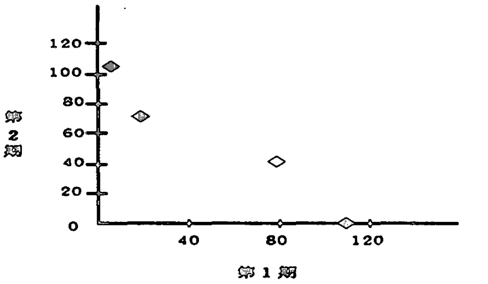

図１：債券とその将来キャッシュ・フロー

図１に示すのは、４つの債券が取り引きされている市場の各債券の市場価格、すなわち、投入量と、各債券が将来にもたらすキャッシュ・フロー、すなわち、リターンのデータであるが、この市場において、債券１の効率性を評価する産出指向 DEA モデルは次のようになる。

$$\text{目的関数} \quad \max \ \theta_0 \qquad (3)$$

$$\text{制約：} 100 \ge 100\lambda_1 + 100\lambda_2 + 100\lambda_3 + 100\lambda_4$$

$$\theta_0 \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} 6 \\ 104 \end{bmatrix} \lambda_4$$

$$\lambda_j \ge 0 \quad , \ j=1,\dots,n$$

解：　$\theta o = 1.25, \ \lambda 3 = 0.257,$
$\lambda 4 = 0.743, \ \lambda 1 = \lambda 2 = 0$

この解の意味として、債券３と債券４を合成するポートフォリオ

$$\begin{bmatrix} 80 \\ 40 \end{bmatrix} (.257) + \begin{bmatrix} 6 \\ 104 \end{bmatrix} (.743) = \begin{bmatrix} 25.0 \\ 87.6 \end{bmatrix}$$

は、同じ１００円の投資で、債券１の約 1.25 倍のリターンをもたらす。あるいは、債券１と同じリターンを第１、第２期にもたらす合成ポートフォリオを作ることが可能であり、その初期投資として必要なのは、$\frac{100}{1.25}$ 円で十分である。このことは、一物一価の関係が成り立っていないことを示しており、この合成ポートフォリオと債券１の間で、裁定の利益をあげる機会があることを意味している。裁定の機会が存在する市場は、効率的ではない。裁定の機会が存在しない市場は、効率的な市場と呼ばれ、そこで成立している各資産の価格を均衡価格と呼ぶ[1]。

産出指向ＤＥＡモデルの双対問題：

$$\text{目的関数} \quad \min \ \sum_{r=1}^{s} x_{r0} v_r \qquad (4)$$

$$\text{制約：} \quad \sum_{i=1}^{m} y_{i0} \mu_i = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} x_{rj} v_r - \sum_{i=1}^{m} y_{ij} \mu_i \ge 0 \quad , \ j=1,\dots,n$$

$$-v_r, -\mu_i \le 0 \quad , r=1,\dots,s \ ; \ i=1,\dots,m$$

各 v_r は投入要素ｒに付与される価値(ウエイト)であり、また各 μ_i は、産出要素ｉに付与される価値である。ある特定のＤＭＵoの効率性を評価するにあたっては、そのＤＭＵにとって、最も有利なウエイトが決められる。そして、それらウエイトは、すべてのＤＭＵの投入、産出要素に適用される。

図１の例で、（３）式の双対問題は、

[1] 一般には、裁定の機会がないということだけで、その市場が均衡しているとか、効率的であるとは、言いきれない。市場の均衡と効率性は、もっと広い概念である。しかし、裁定の機会があるようでは、市場は、均衡しているとは言えないし、効率的であるとも言えない。本報告では、裁定の機会がない条件を満たす状態での各資産価格を、便宜的に、均衡価格と定義している。

目的関数　　min　100 ν　　　　(5)

制約：　　$20\mu_1 + 70\mu_2 = 100$

$$100\nu - 110\mu_1 \geq 0$$

$$100\nu - 80\mu_1 - 40\mu_2 \geq 0$$

$$100\nu - 6\mu_1 - 104\mu_2 \geq 0$$

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \nu \geq 0$$

解：μ_1=.99, μ_2=1.15, ν=1.25

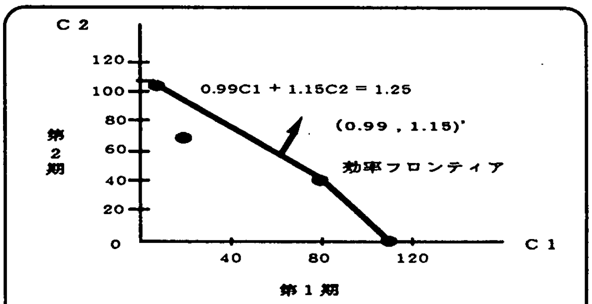

図2：DEA双対問題の幾何学的解釈

双対問題（5）の解は、空間（平面）(x1,x2)内での超平面（直線）の方程式

.99 C1 + 1.15 C2 = 1.25

を決めている。また、ベクトル (μ_1,μ_2) = (.99 , 1.15) は、この直線の法線ベクトルであり、また、産出要素（この例では、第1期、第2期のキャッシュ・フロー）の価値評価を与えている。すべてのDMU $(p_j,C_{1j},C_{2j})'$は、この直線が規定する半空間

.99 C1 + 1.15 C2 ≤ 1.25

の中にある（図2参照）。すなわち、双対問題 (5) は、すべてのDMU (p_j,C_{1j},C_{2j})が、半空間 $\mu_1C_1+\mu_2C_2\leq p_1\nu$ の内側に入るような超平面 $\mu_1C_1+\mu_2C_2=p_1\nu$ を求める問題であり、その際に ν の値を最小にしている。よって、得られた超平面は、すべてのDMUデータを包絡 (Envelope) している。

一般のDEA双対問題（4）の場合も、s+m次元の投入産出空間 $(x_1,x_2,\ldots,x_s,y_1,y_2,\ldots,y_m)$における超平面

$$\sum_{r=1}^{s}\nu_r x_r - \sum_{i=1}^{m}\mu_i y_i = 0$$

を求める問題であり、すべてのDMUデータ$(X_j,Y_j)'$は、この平面が規定する半空間の片側（原点側）に包むかたちで包絡される。評価の対象とされてるDMUoの効率性は、求められた包絡超平面からの乖離の尺度（距離）で評価される。もし、DMUoが、この包絡平面上にあれば、それは効率的なDMUであると評価される。

一般のDEA分析では、あるDMUo、$\begin{bmatrix}X_0\\Y_0\end{bmatrix}$の評価は、他のDMUデータの非負線形結合 $\sum\begin{bmatrix}X_j\\Y_j\end{bmatrix}\lambda_j$, $(\lambda_j\geq 0)$ との比較でなされるが、金融市場でのある資産、$\begin{bmatrix}p_1\\C_1\end{bmatrix}$の評価は、その市場で取引されているあらゆる資産の線形結合からなるポートフォリオ、$\sum\begin{bmatrix}p_j\\C_j\end{bmatrix}\lambda_j$, $(\lambda_j: free)$ との比較でなされる。

すなわち、

$$p_0 \geq \sum_{j=1}^{n} p_j\lambda_j \qquad (6)$$

$$C_0 < \sum_{j=1}^{n} C_j\lambda_j$$

ならば、この資産$\begin{bmatrix}p_0\\C_0\end{bmatrix}$と合成ポートフォリオとの間で、裁定の機会があり、ここに市場の非効率性が示される。

3. 裁定の機会がないための条件

資本市場に裁定の機会があるようでは、それは効率的ではない。その評価を、DEAの枠組みで行うとなると、それは、次のような評価作業を進めることになる。

特定の投資資産、資産1を対象として、市場において資産1以外の資産でポートフォリオを組む。そのポートフォリオ価格が資産1の価格を超えなくて、しかも危険資産の場合は、どの自然の状態iが実現しても、また、債券資産の場合はどの将来時点iにおいてもポートフォリオのリターンが資産1のそれを下回らない。しかも、少なくとも、どれか一つのiにおいて、ポートフォリオのリターンが資産1のそれを上回る。このことをDEAモデルで表現すると次のようになる。

資産$\begin{bmatrix}p_j\\C_j\end{bmatrix}$, j = 1,2,...,n，からなる市場において、ある資産$\begin{bmatrix}p_1\\C_1\end{bmatrix}$を採用して裁定の利益を得られるのは、次のシステム1に解が存在するときである：

システム１：

$$p_1 \geq \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j \qquad (7)$$

$$\theta C_1 \leq \sum_{j=1}^{n} C_j \lambda_j$$

$$\theta > 1 \ , \ \lambda_j \ : \ \text{free}$$

DEAの考えに立つと、一つ一つの資産kについて、このシステム１に解があるかどうかが問題とされる。そして、市場にN個の投資資産があれば、基本的には、N個のシステム１の問題を解くことが想定される。本節では、線形計画問題を１回だけ解くことにより、「裁定の機会があるかないか、あれば、それはどのようなポートフォリオを組めばよいか」に解答が得られることを明らかにする。これに関連して、決定的に重要な点は、上のシステム１では、変数λ_jは、符号が自由な変数であることである。通常の、DEAモデルでは、変数λ_jについては、非負であるという条件が与えられる。ファイナンスの領域では、空売り、すなわち、ショート・ポジション (short position) をとるという投資アクションが可能であるため、λ_jは負の値をとることが許される。さて、システム１は、次のシステム２と等価である：

システム２：

$$p_1 \geq \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j \qquad (8)$$

$$C_1 < \sum_{j=1}^{n} C_j \lambda_j$$

$$\lambda_j \ : \ \text{free}$$

これは、さらに、次のシステム３に書きかえられる：

システム３：

$$p_1(\lambda_1 - 1) + \sum_{j=2}^{n} p_j \lambda_j \leq 0 \qquad (9)$$

$$C_1(\lambda_1 - 1) + \sum_{j=2}^{n} C_j \lambda_j > 0$$

$$\lambda_j \ : \ \text{free}$$

補題１：資産$\begin{bmatrix} p_j \\ C_j \end{bmatrix}$,j = 1,2,...,n , からなる市場において、次のシステム４に解が存在しないとき、また、そのときに限りこの市場には、どの資産 j を使っても、裁定の機会が存在しない、すなわち、どの資産に関しても、システム１、２、３に解は存在しない。

システム４：

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq 0 \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j > 0$$

$$x_j \ : \ \text{free}$$

与えられた市場においての裁定ポートフォリオ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)'$ を見つけるには、次の問題を解けばよい。

$$\text{目的関数} \quad \max \quad \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\text{制約} \ : \ \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j \leq 0 \qquad (11)$$

$$t = \sum_{j=1}^{n} C_j \lambda_j \quad t \geq o \ , \ \lambda_j \ : \ \text{free}$$

一般の DEA 分析では、ひとつひとつの DMU の効率性を評価するために、それぞれひとつの線形計画問題が設定されるが、この補題から明らかなように、金融市場における効率性評価では、市場全体を対象として、ひとつの線形計画(11) を扱うだけで十分である。また、次の定理[2] が知られている。

定理１：市場において、

$$p_j = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} u_i \ , \ j = 1,2,\ldots,n \qquad (12)$$

$$u_i > 0 \ , \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

を満たすベクトル u が存在するとき、また、そのときに限り、裁定の機会がない

このベクトル u は、市場を支持する価格ベクトルと呼ばれる。危険資産が取引される市場の場合は、このベクトル u は、危険中立確率を与えるものであり、また、債券市場の場合は、 u は、スポット・イールド曲線[3]（期間構造）を与えるものである。

[2] この定理は、よく知られているもので、Farkas の補題を使って示すことができる。参照：Ingersoll [2]

[3] スポット・イールドとは、純粋割引債（ゼロ・クーポン債）の最終利回りであり、この利回りは、それら純粋割引債の満期までの残存期間に依存することが知られている。期間構造とは、スポット・イールドを残存期間の関数として表現したものである。

● 危険資産が取引される市場の場合

いま、(11) 式を満たすベクトル $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)'$ に関して、$\pi=(du_1,du_2,\ldots,du_m)'$, ただし,

$$d=\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}u_i} \qquad (13)$$

とする。

このとき $\sum_{i=1}^{m}\pi_i=1$ である。さらに、この市場で無危険の資産、または、無危険ポートフォリオがひとつ存在すると想定して、その価格とリターンのベクトルを $(p_o,c_o,c_o,\ldots,c_m)'$ とすれば、それにも (12) 式が成立するから、

$$p_o=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m}c_o d u_i=\frac{1}{d}c_o\sum_{i=1}^{m}\pi_i$$
$$=\frac{1}{d}c_o \qquad (14)$$

すなわち、$d=\frac{c_o}{p_o}$ であり、d = 1 + r とおけば、r は、この市場におけるリスク・フリー投資の投資収益率である。

市場の各資産 j については、

$$p_j=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}\pi_i\equiv\frac{1}{d}E_\pi(C_j) \qquad (15)$$

が成立する。このベクトル π は、危険中立確率、または、マルチンゲール確率測度と呼ばれている。記号 $E_\pi(C_j)$ は、確率 π に関する資産 j のリターン C_{ij} の期待値を表す。

● 債券市場の場合

市場で取引される資産が債券の場合は、資産 j のベクトル $C_j=(C_{1j},C_{2j},\ldots,C_{mj})'$ の要素 C_{ij} は、現時点から i 期先の将来時点においてこの債券 j がもたらすキャッシュ・フロー、すなわち、クーポンである。(12) 式の u_i は i 期先のキャッシュ・リターン C_{ij} に u_i をかけて現在価値に割り引いている。(12)式は、そのような将来のすべての期にもたらされるキャッシュ・フローの現在価値の総和が、資産 j の現在の価格 p_j に等しいことを示している。u_i はディスカウント・ファクターであるから、$u_i=\frac{1}{(1+r)^i}$ と書ける。ここで、r は、現時点から i 期先のキャッシュに適用されるスポット・レートである。さらに、u_i は i 期先の貨幣 1 単位（1 円）の現在における価値に相当する。さらに、第 i 期から第 i+1 期にかけてのフォワード・レートを f_i とすると、

$$u_i\frac{1}{(1+f_i)}=u_{i+1} \qquad (16)$$

が成立するから、ディスカウント・ベクトル u が決まれば、フォワード・ベクトル $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m)'$ が決まる。

4. 裁定ポートフォリオの特定とスポット・イールド曲線

ある λ がシステム(10) の解であるとき、すなわち、裁定ポートフォリオであるとき、任意の正の実数 α について、$\alpha\lambda$ のシステム(10) を満たし、裁定ポートフォリオとなる。線形計画(11) に目的関数値が正の解があるときは、無限大の解(unbounded solution) となる。よって、次のように λ_j に上、下限をつけて解くことにする。

$$\text{目的関数　最大化}\quad \sum_{i=1}^{m}t_i \qquad (17)$$

$$\text{制約}:\quad \sum_{j=1}^{n}p_j\lambda_j\le 0$$
$$It-\sum_{j=1}^{n}C_j\lambda_j=o$$
$$-1\le\lambda_j\le 1,\quad j=1,\ldots,n$$
$$t\ge o,\quad \lambda_i:free$$

数値例：裁定機会を見つける

債券 j	債券 1	債券 2	債券 3
価格 p_j	92.7	78	84.8
第 1 期 C_{1j}	103	5	2
第 2 期 C_{2j}		105	2
第 3 期 C_{3j}			102

$$\text{最大化}\quad t_1+t_2+t_3 \qquad (18)$$

$$\text{制約}:\ 92.7\lambda_1+78\lambda_2+84.8\lambda_3=0$$
$$103\lambda_1+5\lambda_2+2\lambda_3-t_1=0$$
$$105\lambda_2+2\lambda_3-t_2=0$$
$$102\lambda_3-t_3=0$$
$$-1\le\lambda_j\le1, j=1,2,3$$
$$\lambda_j:\text{符号自由}、j=1,2,3\ ;$$
$$t_i\ge0, i=1,2,3$$

最適解： 目的関数値 = 0,

双対解： $u_1=0.9$, $u_2=0.7$, $u_3=0.8$

ここで、目的関数値がゼロであるから、これまでの議論からすれば、裁定の機会がないことになる。すなわち、この3個の債券から価格が正にならないポートフォリオを合成することでは、将来のどこかの期で、正のキャッシュ・フローを生み出すことはできない。ところが、双対変数の値を見ると、$u_2=0.7<u_3=0.8$ となっており、2期先の1円の現在価値よりも、3期先の1円の現在価値の方が大きくなり、(16) 式の関係

$$u_2\frac{1}{1+f_2}=u_3 \quad \text{から} \quad f_2=-.125$$

が得られる。すなわち、フォワード・レートが負になり、期間と期間との間で、時間的な裁定の機会が存在していることが分かる。

(17) 式の双対問題は、

$$\text{目的関数} \quad : \min \quad \sum_{j=1}^{n}(\delta_j^-+\delta_j^+) \qquad (19)$$

$$\text{制約} \quad : -p_j\mu_0+\sum_{i=1}^{m}C_{ij}\mu_i-\delta_j^-+\delta_j^+=0 \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$\delta_j^-,\delta_j^+\geq 0 \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$\mu_0\geq 0 \quad , \quad \mu_i \ :\text{符号自由} \quad , \quad i=1,\dots,m$$

となる。ここで、将来のキャッシュ・フローの現在価値に関する制約：

$$s_i^+ \quad : \quad -\mu_i+d_i^l\mu_{i+1}\leq 0 \qquad (20)$$

$$s_i^- \quad : \quad \mu_i-d_i^u\mu_{i+1}\leq 0$$

$$i=1,\dots,m-1$$

を付け加える。ただし、

$$d_i^l=1+f_i^l\leq d_i^u=1+f_i^u$$

ここで、f_i^l,f_i^u は第 i 期から次期への予想されるフォワード・レートの上、下限（外生パラメータ）である。これを解いて得られるベクトル $(u_1,u_2,\dots,u_m)$ は、スポット・イールド曲線の推定値を与える。また、この問題の双対問題を求めて、裁定債券ポートフォリオ問題（主問題）に戻すと、

$$\text{目的関数} \quad : \max \quad \sum_{i=1}^{m}t_i \qquad (21)$$

制約 ：

$$\mu_0 \quad : \quad \sum_{j=1}^{n}p_j\lambda_j \leq 0$$

$$\begin{matrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_m\end{matrix} \qquad \sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix}C_{1j}\\ C_{2j}\\ \vdots\\ C_{mj}\end{bmatrix}\lambda_j+\sum_{i=1}^{m-1}u_i^l s_i^+ +\sum_{i=1}^{m-1}u_i^u s_i^- -t=o$$

$$\delta_j^-,\delta_j^+ \quad : \quad -1\leq\lambda_j\leq 1 \ , \quad j=1,\dots,n$$

$$\lambda_j \ :\text{符号自由} \ , \quad j=1,\dots,n \quad ;$$

$$s_i^+,s_i^-,t_i\geq 0 \ , \quad i=1,\dots,m$$

ただし、

$$u_1^l=\begin{bmatrix}-1\\ d_1^l\\ 0\\ \vdots\\ \\ 0\end{bmatrix}, u_1^u=\begin{bmatrix}1\\ -d_1^u\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \dots, u_{m-1}^l=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \\ 0\\ -1\\ d_{m-1}^l\end{bmatrix}, u_{m-1}^u=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \\ 0\\ 1\\ -d_{m-1}^u\end{bmatrix}$$

となる。

5．おわりに

本シンポジウム報告では、「データ包絡分析の手法」をファイナンスに適応させた場合を考え、投入・産出指向モデルの主問題・双対問題より、資本市場における効率性評価へ適応できることを述べた。「裁定機会が存在する市場」は、「効率的な状態ではない」と考え、主問題では裁定ポートフォリオを特定化し、同時に双対問題ではスポット・イールド曲線を観察できるモデルを研究した。今後は、実際の市場データを用いて資本市場の効率性評価を行ない、具体的に諸債券の売買をどのように組み合わせて裁定が行なえるかを検証していきたい。また、厳密な意味での裁定取引モデルでは、この他に取引コストを考慮しなければならないし、外生パラメータのフォワード・レート値の与え方に課題が残る。

参考文献

[1] Charnes A.,W.W.Cooper, and E.Rhodes (1978), "Measuring the Efficiency of Decision Making Units, "*European Journal of Operational Research* 3 : 429-444

[2] Ingersoll,Jr.Jonathan E. (1987), Theory of Financial Decision Making. Chap.2. "Arbitrage and Pricing : The Basics", Rowman & Littlefield : 45-64

[3] 刀根 薫、高森 寛、末吉俊幸、W.W. Cooper (1994),「DEAの解釈と展望」『オペレーションズ・リサーチ』第 39 号 : 419-425

[4] 刀根 薫 (1993),『経営効率性の測定と改善』日科技連