対数型DEAモデルを用いたウェイト付けの方法

平瀬　啓太、　山口　俊和

1. はじめに

DEA (Data Envelopment Analysis) は，企業体などの多入力多出力システムの相対的な効率性を総合的に評価する手法である．DEA では分析対象の評価が最も高くなるようにウェイト付けされた入力値と出力値の比をD効率値として効率の評価に用いる．D効率値によって，効率のよいシステム（D効率的）と効率の悪いシステム（D非効率的）に分析対象を区別する．

DEA では，分析対象に最も有利にウェイトをつけることができるため，不利な項目はウェイトの値を小さくして，無視する傾向がある．しかし，DEA では多入力多出力システムを総合的に評価する手法であるから，全ての入出力項目を評価に加えることが望ましい．そこで，本研究では DEA のモデルの一つである対数型 DEA モデルを用いて，D効率的，D非効率的という分析対象に対する評価を維持しながら，全ての入出力項目に対するウェイトが0にならないような方法を提案する．これにより全ての入出力項目を評価に加えることが可能になる．また，このモデルの双対問題から，提案するモデルが等質（スラックレス [4]）なD効率値を与えていることを示す．

2. 線形型 DEA モデル

DEA では，評価対象を DMU （ Decision Making Unit ）と呼ぶ．いま，n 個の DMU があり，各 DMU は m 種類の入力値と，s 種類の出力値を持っているものとする．DMU_j の i 番目の入力値を x_{ij}，i 番目の出力値を y_{ij} とする．DEA では各 DMU について，次の分数計画問題を解くことによって，D効率値を得る．

【DEA-F 】 $(o = 1, 2, \ldots, n)$
最大化

$$\sum_{i=1}^{k} u_{ro} y_{io} / \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} \tag{1}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^{k} u_{ro} y_{ij} / \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} \leq 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

$$v_{io} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

$$u_{ro} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{4}$$

なお，v_{io} は i 番目の入力項目にかかるウェイト，u_{io} は i 番目の出力項目にかかるウェイトである．この分数計画問題は，ウェイトを適用した入力項目と出力項目の加重和の比が 1 以下という制約のもとで，分析対象である o 番目の DMU の評価値（比の値）を最大にするようなウェイトの値を求めることを意味している．

こうして得られた最適目的関数値が D 効率値になる．D 効率値が 1 の DMU は D 効率的な DMU と呼ばれ，全ての DMU の中で自身の比の値が最も高くなるようなウェイトの組み合わせを持っている DMU である．また，D 効率値が 1 未満になるような DMU は D 非効率的な DMU と呼ばれ，自身の比の値を最も高くできるようなウェイトの組み合わせが存在しない DMU である．D 非効率的な DMU には，どのようにウェイトをつけてもその DMU より比の値が高くなってしまう DMU が存在する．このかなわない DMU のことをその DMU の参照集合と呼ぶ．参照集合は，【DEA-F 】の解である v^*_{io}, u^*_{io} を (2) 式の右辺に代入したとき，その値が 1 になる DMU の集合を示す．

このモデルは，CCR(Charnes, Cooper, Rhodes) モデル [1] と呼ばれているが，ウェイトを線形の形で与

ひらせ　けいた　ソニー（株）
やまぐち　としかず　東京理科大学
〒 162 新宿区神楽坂 1-3

えているので，線形型DEAモデルと以後呼ぶことにする．

この分数計画問題は，目的関数の分母を1に固定し，分子の最大化とし，制約条件の分母を移項することによって，次のような線形計画問題に置き換えることができる．

【DEA-P/I】$(o=1,2,\ldots,n)$
最大化

$$\sum_{i=1}^{s} u_{io} y_{io} \tag{5}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} = 1 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_{io} y_{ij} - \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{ij} \le 0 \ (j=1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

$$v_{io} \ge 0 \ (i=1,2,\ldots,m) \tag{8}$$

$$u_{io} \ge 0 \ (i=1,2,\ldots,s) \tag{9}$$

この問題の最適目的関数値はD効率値と等しい．

3. 対数型DEAモデル

線形型DEAモデルに対して，次に示すような対数型DEAモデル[2]がある．

【LDEA-F】
最大化

$$\prod_{i=1}^{s} y_{io}^{u_{io}} \eta_o / \prod_{i=1}^{m} x_{io}^{v_{io}} \tag{10}$$

制約条件

$$\prod_{i=1}^{s} y_{ij}^{u_{io}} \eta_o / \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{v_{io}} \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} = 1 \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_{io} = 1 \tag{13}$$

$$v_{io}, u_{io}, \eta_o \ge 0 \tag{14}$$

この対数型DEAモデルはウェイトを累乗で与えている．なおη_oは入出力項目のデータの単位・桁数の違いを吸収し，D効率値の最大値を1にそろえる標準化の役割を持つ変数である．なお対数型DEAモデルでも，最適目的関数値の値（この場合，(10)式の値）がD効率値となる．この分数計画問題は，全体の対数値を取ることによって，線形計画問題に置き換えることができる．そのため対数型DEAモデルと呼ばれている．なお簡略化のため，以後対数値は元の数に対して $\hat{}$ をつけて表すものとする．

【LDEA-P】
最大化

$$\sum_{i=1}^{s} u_{io} \hat{Y}_{io} + \hat{\eta}_o - \sum_{i=1}^{m} v_{io} \hat{X}_{io} \tag{15}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^{s} u_{io} \hat{Y}_{ij} + \hat{\eta}_o - \sum_{i=1}^{m} v_{io} \hat{X}_{ij} \le 0 \tag{16}$$

$$(j=1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} = 1 \tag{17}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{io} = 1 \tag{18}$$

$$v_{io}, u_{io} \ge 0, \hat{\eta_o}\text{は符号無制約} \tag{19}$$

対数型DEAモデルは，Cobb-Douglas型の生産関数を用いたモデルである．得られたウェイトはCobb-Douglas型生産関数のパラメータと考えることができる．また【LDEA-P】から得られた最適目的関数値は，0以下の値を取り，対数値を元に戻せばD効率値になる．

4. 対数型DEAモデルのウェイト

線形型DEAモデルのウェイトは，入出力項目に対して重要度の違いを与える役割以外に，データの桁数を標準化する意味を持っている．線形型DEAモデルではこの標準化の役割により，入出力項目の単位・桁数に依存しないD効率値を得ることができる．したがって，そのウェイトの値は評価における各入出力項目の重要度のみを表してはいない．

線形型DEAモデルでは，ウェイトに関する制約条件を与えることが困難である．単純にウェイトに対して制約条件を与えると，D効率値は入出力項目の単位・桁数に依存したものになる．つまり，入出力項目を測定する単位によって各DMUの評価が変わってしまう．

これに対して対数型DEAモデルでは，(20)式のように重要度と標準化の意味を持つ変数を分けて取り扱う．実際の定式化では，v_{io}, u_{io}が重要度を表す変数で，それぞれの和が1になるという制約がある．η_oは標準化の変数で，単位・桁数の差違を吸収する．

$$\frac{\prod_{i=1}^{s} \left(\frac{y_{ij}}{\eta_{yro}}\right)^{u_{io}}}{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{x_{ij}}{\eta_{xio}}\right)^{v_{io}}} = \frac{\prod_{i=1}^{s} y_{ij}^{u_{io}} \prod_{i=1}^{m} \eta_{xio}^{v_{io}}}{\prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{v_{io}} \prod_{i=1}^{s} \eta_{yio}^{u_{io}}} = \frac{\prod_{i=1}^{s} y_{ij}^{u_{io}}}{\prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{v_{io}}} \eta_o \tag{20}$$

対数型DEAモデルでは，重要度のみに制約条件を与えても，入出力項目のデータの単位・桁数に依存しないD効率値を得ることができる．

5. ウェイトの提示に関する問題点

DEAでは，ウェイトが一意に定まらないことが多い．特にD効率的なDMUは，D効率値が1になるようなウェイトの組み合わせが一般的に一つだけであることはない．そのため，実際に線形計画問題を解いて一つのウェイトの組み合わせが得られたとしても，その値は，DMUのD効率値が1になるウェイトの数多くの組み合わせの中の一つにすぎない．したがって，そのウェイトの組み合わせをそのDMUのウェイトの代表値であるとすることはできない．そのため，DEAでは得られたウェイトを示すことはあまり意味がないといわれている．

しかし，評価を行うにあたって，用いたウェイトの値を示すことは重要である．分析対象にとっては，評価上他に比べて有利あるいは不利な入出力項目を知ることができれば，評価の基準を知ることができ，かつ分析対象の今後の活動の指針にもなる．

また，従来のDEAモデルでは，ウェイトの値を0にして評価上無視する入出力項目が存在することが多い．これはDEAが分析対象に対して評価上最も有利なウェイト付けをし，逆に不利な項目はウェイトを0において評価上その項目を無視するためである．しかし，全ての入出力項目を評価に加えないと，多入力多出力システムを総合的に評価したとはいえない．

本研究では，ウェイトが入出力項目の単位･桁数に左右されない特徴を持つ対数型DEAモデルを用いて，全てのウェイトが値を持つようなウェイトの組み合わせを得る方法を提案する．これにより従来のD効率的，D非効率的といった関係を維持しながら，全ての入出力項目を評価に加えたD効率値とウェイトの組み合わせを提示することが可能となる．実際には，参照集合のウェイトの中で，全てのウェイトが値を持つようなウェイトの組み合わせをそのDMUのウェイトとし，これよりそのDMUのD効率値を求め，ウェイトを提示する．

6. 提案する方法

本研究では，まず，次の定式化によってD効率的なDMUとD非効率的なDMUを区別する．

【LDEA-Fw1】 $(a = 1, 2, \ldots, n)$
最大化

$$P_1 \left(\prod_{i=1}^{s} y_{io}^{u_{io}} \eta_o / \prod_{i=1}^{m} x_{io}^{v_{io}} \right) + P_2 \mu_o \tag{21}$$

制約条件

$$\prod_{r=1}^{s} y_{ij}^{u_{io}} \eta_o / \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{v_{io}} \leq 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} = 1 \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_{io} = 1 \tag{24}$$

$$v_{io} \geq \mu_o \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{25}$$

$$u_{io} \geq \mu_o \quad (r = 1, \ldots, s) \tag{26}$$

$$\eta_a \geq 0 \tag{27}$$

ただし，P_1, P_2は絶対順位係数で，$P_1 \gg P_2$である．

この問題は「なるべく全ての入出力項目を評価に加える」という考え方で，入出力項目を無視することのないD効率値を求める問題である．実際には，従来の定式化に加え，第2順位の目的関数として，ウェイトの最小値を最大化することを考えている．このウェイトの最小値を表す変数がμ_oである．従来非負条件であるウェイトの変数の制約条件を，μ_o以上という制約条件に変更し，このμ_oの最大化を第2順位の目的関数としている．この定式化も，【LDEA-P】のように線形計画問題に変換することができる．

この問題の第1順位の目的関数の値が0で，かつ最適解であるμ_o^*が0でないときに，そのDMUはD効率的と評価する．それ以外のDMUは全てD非効率的と評価する．

【LDEA-Fw1】では，D非効率的なDMUのウェイトが依然として0になることがある．ウェイトが0の項目を含んでD効率値を求めるのは，全ての入出力項目を加味して評価したとは言いがたい．そこで，参照集合のウェイトから値が0をとらない組み合わせを選ぶことを考える．そうして得られたウェイトから改めてD非効率的なDMUのD効率値を得ることを考える．そこで，【LDEA-Fw1】を解いた上で，分析対象のDMUの参照集合のD効率値を1に維持できるウェイトの範囲内で，ウェイトの最小値を最大化することをまず優先して，その上で分析対象のDMUの効率値が最も高くなるようなウェイトを選択することにする．具体的にはD非効率的なDMUについて次のような問題を解く．

【LDEA-Fw2】
最大化

$$P_1\mu_o + P_2\left(\prod_{i=1}^{s} y_{io}^{u_{io}}\eta_o / \prod_{i=1}^{m} x_{io}^{v_{io}}\right) \tag{28}$$

制約条件

$$\prod_{i=1}^{s} y_{ij}^{u_{io}}\eta_o / \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{v_{io}} = 1 \quad (j \in R) \tag{29}$$

$$\prod_{r=1}^{s} y_{ij}^{u_{io}}\eta_o / \prod_{i=1}^{m} x_{ij}^{v_{io}} \leq 1 \quad (j \in E, j \notin R) \tag{30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} = 1 \tag{31}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_{io} = 1 \tag{32}$$

$$v_{io} - \mu_o \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{33}$$

$$u_{io} - \mu_o \geq 0 \quad (r = 1, \ldots, k) \tag{34}$$

$$\eta_o \geq 0 \tag{35}$$

なお，EはD効率的なDMUの添字集合であり，Rは分析対象のDMUの参照集合である．この問題は，参照集合のウェイトを維持するために，参照集合に属するDMUの効率値を1に維持するウェイトの組み合わせのみを実行可能とする．具体的には，参照集合のDMUの式に関しては従来の定式化の不等号条件を等号条件にする((29)式)．その上で，はじめの問題の目的関数の順位を入れ替えている．

この問題の第2順位の最適目的関数値の対数を元に戻した値がD効率値となる．この場合には第1順位の目的関数がウェイトの最小値の最大化なので，ウェイトの値が0になることはなくなる．これにより，全てのウェイトがなんらかの値を持つことができる．そのウェイトを用いてD効率値を第2順位の目的関数で得る．

7. 双対問題の解釈

本研究で提案するモデルの双対問題について議論する．【LDEA-Fw2】を，得られた解μ_a^*を用いて，第2順位の目的関数であるD効率値を求める問題に書き換え，両辺の対数値をとって線形計画問題にすると次のようになる．ただし，【LDEA-Fw2】を解いた後に参照集合が増えた場合には，その増えた参照集合を含めたDMUが分析対象の参照集合であるとする．

【LDEA-Fw3】
最大化

$$\sum_{i=1}^{s} \hat{y}_{io}u_{io} - \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{io}v_{io} + \hat{\eta}_o \tag{36}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^{s} \hat{y}_{ij}u_{io} - \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{ij}v_{io} + \hat{\eta}_o = 0 \ (j \in R) \tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \hat{y}_{ij}u_{io} - \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{ij}v_{io} + \hat{\eta}_o \leq 0 \ (j \in E, j \notin R) \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} = 1 \tag{39}$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_{io} = 1 \tag{40}$$

$$v_{io} \geq \mu_o^*(i = 1, \cdots, m) \tag{41}$$

$$u_{io} \geq \mu_o^*(i = 1, \cdots, s) \tag{42}$$

$$\eta_o \geq 0 \tag{43}$$

この問題の双対問題は次のようになる．

【LDEA-Dw3】
最大化

$$\hat{\gamma}_o + \mu_o^*\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_{xi} + \sum_{i=1}^{s} \hat{s}_{yi}\right) \tag{44}$$

制約条件

$$\hat{\alpha}_o + \sum_{j \in E} \hat{y}_{ij}\lambda_{jo} - \hat{s}_{yi} = \hat{y}_{io}(i = 1, \cdots, s) \tag{45}$$

$$\hat{\alpha}_o + \sum_{j \in E} \hat{x}_{ij}\lambda_{jo} + \hat{s}_{xi} = \hat{x}_{io} - \hat{\gamma}_o(i = 1, \cdots, m) \tag{46}$$

$$\sum_{j \in E} \lambda_{jo} = 1 \tag{47}$$

$$\lambda_{jo} \geq 0 \ (j \in E, j \notin R) \tag{48}$$

$$\hat{s}_{xi}, \hat{s}_{yi} \geq 0 \tag{49}$$

$$\lambda_{jo} \text{は符号無制約} \ (j \in R) \tag{50}$$

$$\hat{\gamma}_o, \hat{\alpha}_o \text{は符号無制約} \tag{51}$$

この問題の最適目的関数値は対数値をもとに戻した値の逆数がD効率値になる．ここで得られたD効率値は，次のような式で表すことができる．

$$D\text{効率値} \ : \ \frac{1}{\gamma_o^*\left(\prod_{i=1}^{m} s_{xi}^* \prod_{r=1}^{k} s_{yi}^*\right)^{\mu_o^*}} \tag{52}$$

この双対問題は，次のように解釈することができる．制約条件によって，効率的な入出力値の集合（効率的フロンティア）を構築し，分析対象のDMUが現状の出力値を維持しながら，効率的フロンティアまで，どれだけ入力を一律縮小しているかを求めている．$-\gamma_o$はその縮小率に相当する．もし，一律に縮小することができず，入力値も現状のままであるならば，そのDMUは効率的フロンティア上にあるので，

D 効率的と評価し，一律に縮小が可能であるならば，そのDMUは効率的フロンティア上にはないので，D非効率的と評価される．

従来の対数型DEAモデルでは，効率的フロンティアは限られた領域にしか存在せず，それ以外の領域にある点は，スラック変数により限られた効率的フロンティアの上に移動させられる．よって，同じD効率値であっても，スラック変数が大きい方が効率が悪い．このように，従来のDEAモデルではスラック変数の問題があり，D効率値が効率の評価を等質に与えているとはいえなかった．

本研究で提案するモデルでは，目的関数で縮小率の最小化とウェイトによるスラックの加重和の最大化を同時に行っている．延長すべき効率的フロンティアが存在する場合には，縮小率の最大化の変数γ_o^*のみ値を持ち，この値がD効率値になる．この場合，延長される効率的フロンティアはDMUの外分点になる．この外分点を構成する参照集合のDMUに相当するλの値は1以上や負の値を取ることもある．そのため，参照集合のDMUに関しては従来の定式化のような非負条件ではなく，自由変数としている．

しかし，実際には延長すべき効率的フロンティアが存在しない場合が多々ある．このような場合には，存在しているフロンティアを延長する方法（CFAを用いた方法[3]等）を適用することはできない．これに対して，本研究で提案するモデルでは，スラック変数であるsとウェイトの最小値であるμ_o^*によって，各方向に対して平等に広がる効率的フロンティアを生成する．この新たに生成されたフロンティアまでの一律縮小率を目的関数値が表している．

8. 数値例

ここでは，簡単な入力項目2つ（In1,In2），出力項目が1つ（Out）でDMUが3つ（A,B,C）の場合の例を用いて説明を行う．まず，入出力値を表1に示す．なお，L-In1,L-In2,L-Outはそれぞれ入出力項目値に対して底が2の対数を取った値である．

表 1: 数値例（2入力1出力）

DMU	In1	In2	Out	L-In1	L-In2	L-Out
A	4	4	2	2	2	1
B	16	2	2	4	1	1
C	64	2	2	6	1	1

この数値例では，従来の線形型，あるいは対数型のDEAモデルでは，DMU A,BがD効率的と評価される．しかし，DMU Cについては，従来のDEAモデルを用いれば，D効率値は1になるが，In1に関してスラック変数に値を持つことがわかって初めてD非効率的と評価される．しかし，どの程度D非効率的なのかはわからない．また，ウェイトに関しても，DMU A,Bに関しては一定に定まらず，DMU Cに関してはIn1のウェイトが0になり，ウェイトの最小値は0になる．そこで，本研究で提案するモデルを用いて，DMU A,Bに関してはウェイトを求め，DMU Cに関しては，参照集合であるDMU Bに関する制約条件の不等式を等式に置き換え，目的関数の順位を入れ替えて，DMU Cについては改めて解き直すことにする．すると，次のような分析結果が得られる．なお，W-In1,2,Outはそれぞれ入出力項目に対応するウェイトである．

表 2: 数値例（分析結果）

DMU	D効率値	W-In1	W-In2	W-Out
A	1.000	0.500	0.500	1
B	1.000	0.333	0.667	1
C	0.630	0.333	0.667	1

このように全てのDMUに関して0でないウェイトを提示することが可能となる．効率性の評価に関しては，スラック変数の値の影響を考慮せずに，D効率値が1であるDMUは必ずD非効率的であり，そうでないDMUはすべてD非効率的であると判断できる．また，この値を用いて改善目標値を得る場合には，出力項目の値はそのままで，入力項目の値をD効率値倍に一律縮小した値もしくは，入力項目の値はそのままで，出力項目をD効率値の逆数倍に一律拡大した値を用いる．（実際にはCの改善目標は入力項目の一律縮小で，$In1 = 64 \times 0.630 = 40.32, In2 = 2 \times 0.630 = 1.26, Out = 2$となる．）

次に，同じ数値例の双対問題の解を示す．

表 3: 数値例（分析結果 2）

DMU	$\hat{\gamma_o}$	λ_A	λ_B	λ_C
A	0.000	1.000	0.000	0.000
B	0.000	0.000	1.000	0.000
C	-1.333	-0.333	1.333	0.000

このように，DMU Cに関してはDMU AとDMU Bの外分点上の値を示しており，効率的フロンティアが延長されていることがわかる．

従来のDEAモデルでは，スラック変数の問題があり，ただ単にD効率値倍しただけでD効率的な値を得ることができない場合が多い．しかし本研究で提案したモデルから得られるD効率値を用いれば，改善目標を求める際にスラック変数の値は不要である．また，入出力項目に制御不能な固定項目がある場合に，本研究で提案したモデルでは，従来のDEAモデルと異なり，スラック変数が不要なので，制御不能な固定項目が存在する場合でも改善目標を必ず提示することが可能である．

図1は，先ほどの数値例を入力項目の平面上で示している．対数型DEAでは，2次元上では曲線で効率的フロンティアが表される．従来のDEAモデルでは，効率的フロンティアは限られた領域（この図では点線の線分AB部分）にしか存在しないが，本研究で提案する方法では，図1に示されているように無限に効率的フロンティアを延長することができる．そして作られた効率的フロンティアと原点との交点 (C') を改善目標として提示できる．

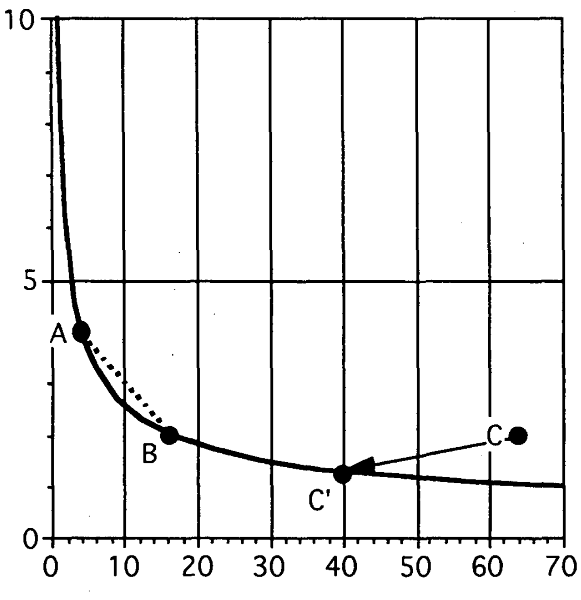

図 1: 効率的フロンティア（数値例）

また，効率的フロンティアが存在しない場合でも，(例えば数値例でB,Cの2つのDMUのみしか存在しない場合）図1にあるような効率的フロンティアを構築することも本研究では可能である．このモデルを用いれば，D効率的なDMUがたとえ1つの場合でも参照集合のDMUのウェイトに対して最小値を最大化するという新たな基準を設けてウェイトの値を決定し，その方向にフロンティアを延長することができるためである．

9. おわりに

本研究では，入出力項目の単位・桁数に依存しないという特徴を持つ対数型DEAモデルのウェイトを用いて，全ての入出力項目を評価に加えたD効率値を得る手法を提案した．得られたD効率値は，従来のDEAモデルのD効率的，D非効率的なDMUの関係を維持した上で，用いたウエイトを提示する事ができる．また，提示されたウェイトは全ての入出力項目に関して値を持ち，多入力多出力システムの総合的な効率の評価とみなすことができ，分析対象者に重みが0になる違和感を抱かせることがない．

また，提案したDEAモデルの双対問題から，このモデルが，効率的フロンティアを延長してD効率値を求めているモデルであり，得られるD効率値がスラックレスなものであることが示された．これは，従来提案されていた，連立方程式を用いた複雑な手法を用いて効率的フロンティアを延長するという，CFAを用いたモデルに対して，ウェイトのmax-minという非常に簡単なモデルを用いて，効率的フロンティアの延長を可能にしていることにもなる．さらに，本研究で提案したモデルは，CFAを用いたモデルとは異なり，延長すべき効率的フロンティアが存在しない場合にも，各入出力項目に対して平等に広がる効率的フロンティアを生成し，そのフロンティアを用いてスラックレスなD効率値を得ることが可能となる．

参考文献

[1] Charnes, A., W.W.Cooper, E.Rhodes : "Measuring the Efficiency of Decision Making Units", European Journal of Operational Research, pp.429-444, Vol.2(1978).

[2] 平瀬啓太, 合田充利, 山口俊和, 福川忠昭："対数型DEAモデルの応用"，日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集, pp279-280, (1994).

[3] 平瀬啓太, 合田充利, 山口俊和, 福川忠昭 : "CFAを用いた対数型DEAモデル", オペレーションズ・リサーチ誌, pp.613-618, Vol.39, No.11(1994)

[4] 刀根　薫：「経営効率性の測定と改善-包絡分析法DEAによる-」，日科技連出版社 (1993).