包絡分析と回帰分析を含む性能評価法DEARA

篠　原　正　明

1．はじめに

データ包絡分析(DEA)は優れ者をベースに，さらに入出力の間に特定のモデルを想定する必要がないという意味で，ノンパラメトリック，一方，回帰分析(Regression Analysis, 略してRA)は平均像に基づき，入出力の間にモデルを規定するという意味でパラメトリックなDMUあるいは標本の性能評価法と言われ[1,2]，従来は個別の評価法として位置づけられている．本論文では，DEAとRAを包含した新しい性能評価法DEARAを提案する．DEARAではパラメータを連続的に変化することによりRA的な評価からDEA的な評価にわたる広範囲の性能評価が可能となる．

実際のDMUの性能評価に際しては，DEAとRAを個別に適用して総合的な評価を行うアプローチ[2,3]が従来の研究として挙げられるが，これらの研究では，DEAとRAを個別の評価法として位置づけており，DEAとRAの融合アプローチという視点には立っておらず，本研究のスタンスとは異なっている．すなわち，冒頭にも述べたように，DEAは優れ者をベースに，RAは平均像をベースにした性能評価法と言われているが，これらの表現自体が曖昧であり，さらに優れ者ベースあるいは平均像ベースのどちらか一方の極端な評価スタンスではなく，人間の思考方法が連続的に変化しうると考えれば，DEAとRAの中間に位置する評価が存在し，それに対応した性能評価法が存在して当然と考えられる．

このような立場からは，同一の枠組で優れ者ベースならびに平均像ベースの比重を任意に重み付けた中間的な性能評価を行うアルゴリズムを確立する必要がある．アルゴリズムが確立されれば，実際の性能評価に際してある２つのDMUのDEAとRAによる評価結果が大きく異なり逆転する場合に，どの程度中間的な評価を行えばこの２つのDMUは同程度に評価されるかといった疑問に対しても定量的な答が得られる．

最初に，DEAとRAの関係を明らかにするために，RAの概念を一般化した誤差最小化モデル適合分析(Error Minimization Analysis, 略してEMA)を考え，EMAにおける誤差関数の選定によりEMAをRAあるいはDEAに帰着できることを示す．次に，この考察結果に基づき，EMAの具体的なアルゴリズムとして線形計画法を用いた性能評価法DEARAを提案する．最後に，例題によりDEARAの物理的意味ならびに，実際の性能評価問題での効果を説明する．

2．DEAとRAの関係

被説明変数ベクトル$\mathbb{y}(s\times 1)$と説明変数ベクトル$\mathbb{x}(m\times 1)$の間に次式のモデル関係式が成り立つことを想定し，

$$f(\mathbb{x},\ \mathbb{y},\mathbb{p})=0 \qquad (1)$$

n個の標本からなる観測データがなるべくこのモデルに適合するようにモデルのパラメータ$\mathbb{p}$を決定する分析法の枠組「誤差最小化モデル適合分析(EMA)」を考える．観測データの標本 i のデータ $\mathbb{x}_i$, $\mathbb{y}_i$ に対してモデル関係式で等号が成り立つとは限らず，その残差を z_i とする．

$$z_i=f(\mathbb{x}_i,\ \mathbb{y}_i,\mathbb{p}) \qquad (2)$$

残差z_iに対する誤差関数を $e_i(z_i)$ とすると，標本１～nに対する総合誤差Eは一般に$e_i(z_i)$(i=1～n)の関数で与えられる．

$$E=E(e_1(z_1),\ e_2(z_2),\ \cdots,\ e_n(z_n)) \qquad (3)$$

従って，EMAでは観測データ($\mathbb{x}_i$, $\mathbb{y}_i$)(i=1～n) が与えられたもとで，(3)式の総合誤差Eを最小化するようにモデルのパラメータ$\mathbb{p}$を決定する．

単一の被説明変数の場合を考え，モデル関係式として線形関係式 $y=\mathbb{p}^T\mathbb{x}$ (あるいは $f(\mathbb{x},\ \mathbb{y},\mathbb{p})=y-\mathbb{p}^T\mathbb{x}$),

しのはら　まさあき
ＮＴＴ通信網研究所　〒180 武蔵野市緑町3-9-11

誤差関数としては2乗関数 $e(z) = z^2$，総合誤差としては総和 $E = \Sigma e_i(z_i)$ を採用したEMAが最小二乗・線形回帰分析に相当する．

次に，モデル関係式として(4)式の内積形の線形関係式を考える．

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} \tag{4}$$

すなわち，$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}$で，モデルのパラメータはこの場合$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$である．今，ここで$i=1\sim n$ のDMU（標本）の中で注目しているDMUを＃ 0とし，誤差関数$e_i(z_i)$ を次式で与える．

$$e_i(z_i) = \begin{cases} \infty & z_i > 0 \\ 0 & z_i \leq 0 \quad (i \neq 0) \end{cases} \tag{5}$$

$$e_0(z_0) = \begin{cases} \infty & z_0 > 0 \\ -z_0 & z_0 \leq 0 \end{cases} \tag{6}$$

総合誤差は総和$E = \Sigma e_i(z_i)$ で与える．さらに，(4)式の内積形の線形関係ではパラメータ$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$に定数倍の自由度が存在するので，線形制約 $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_0 = 1$ を課す．

式(5), (6) において，$z_i = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_i > 0$ で誤差関数$e_i(z_i)$ が罰金値$(+\infty)$をとっており$(i = 1\sim n)$，従って次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_i \leq 0 \qquad (i = 1\sim n) \tag{7}$$

又，目的関数Eの最小化は$e_0(z_0)$の項のみが残るため，線形制約$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_0 = 1$ を考慮して，

$$E = e_0(z_0) = -(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_0) = 1 - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_0 \tag{8}$$

となる．すなわち，Eの最小化は$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_0$の最大化と等価である．従って，パラメータの非負条件 $\boldsymbol{u} \geqq 0$, $\boldsymbol{v} \geqq 0$ を追加すれば，この場合のEMAは入力・CCR形DEAのLP定式化（[1]のp.33のCCR_0）に一致する．

なお，ここでDEAにおいては，$\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i$ はDMU$_i$の入力データベクトル，出力データベクトル，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$は出力評価ウェイトベクトル（s×1），入力項目評価ウェイトベクトル（m×1）と解釈される．

以上まとめると，EMAという枠組でとらえると，DEAとRAの関係は，個々の標本の総合誤差への寄与に関する誤差関数e(z)の形状の差が大きな違いであり，その他の制約条件の有無などは本質的な違いではないといえる（図1参照）．

なお，以上ではRA的な状況では「標本」，DEA的な状況では「DMU」という用語を使用したが，両表現は互換可能であり，次章のDEARAで両者の区別は特に行わないで使用する．

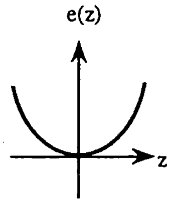
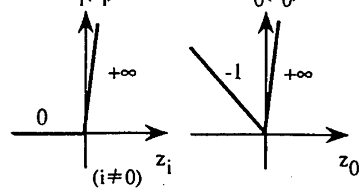
	最小2乗和形 線形回帰分析	CCR形データ包絡分析
モデル	$y = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}$
誤差関数		
制約	有／無	$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}_0=1$

図1　回帰分析と包絡分析の比較

3．新しい性能評価法DEARA

前節のDEAとRAをEMAの視点から統一的にとらえた考察に基づき，DEA的評価からRA的評価までを同一の枠組のモデルでカバーする新しい性能評価法DEARAを提案する．すなわち，図2に示すようにモデルとしては，内積形の線形関係$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}$ を，誤差関数$e_i(z_i)$ としては，正の残差$(z_i>0)$に対しては比例係数a_i，負の残差$(z_i \leqq 0)$に対しては比例係数$-b_i$の区分的線形関数を，制約式としては注目する標本 ＃0に関する入力評価値総和の正規化条件「$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_0 = 1$」を考える．以上の条件のもとでのEMAは正の残差$\rho_i(\geqq 0)$と負の残差$\eta_i(\geqq 0)$の変数を導入することにより以下の線形計画法により定式化される．

【DEARAの線形計画定式化】

目的関数：$E = \sum_{i=1}^{n}(a_i\rho_i + b_i\eta_i) \rightarrow$ 最小化　(9)

制約条件：
$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_i = \rho_i - \eta_i \quad (i = 1\sim n) \tag{10}$$
$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_0 = 1 \tag{11}$$
$$\boldsymbol{u} \geqq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v} \geqq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\rho} \geqq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\eta} \geqq \boldsymbol{0} \tag{12}$$

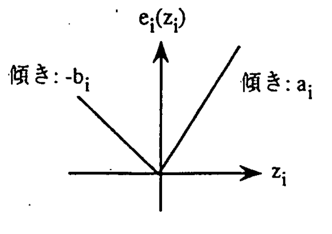
モデル	$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}$
誤差関数	
制約	$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_0=1$

図2　性能評価法DEARA

図１と図２を比較してわかるように，DEARAは $a_i=b_i=1$ (i=1～n) とすれば最小絶対値和形の線形回帰分析に，$a_i \to +\infty$, $b_i \to 0$ $(i\neq0)$, $b_0=1$ とすればCCR形データ包絡分析に帰着される．ここで，式(9)～(12)の線形計画問題の解に対応して得られるDMU#0の出力評価値総和

$$\mathbb{u}^T\mathbb{y}_0 = \rho_0 - \eta_0 + \mathbb{v}^T\mathbb{x}_0 = 1 + \rho_0 - \eta_0 \qquad (13)$$

をDMU#0の一般化効率値と呼ぶ．DMU#0の入出力データ($\mathbb{x}_0$, $\mathbb{y}_0$)がモデル関係式「$\mathbb{u}^T\mathbb{y} = \mathbb{v}^T\mathbb{x}$」上に存在する場合には，$\rho_0 = \eta_0 = 0$で，一般化効率値は１になる．データがモデル関係式よりも上側，あるいは下側に存在する場合($\rho_0>0, \eta_0=0$ あるいは$\rho_0=0, \eta_0>0$)には，一般化効率値 ($=1+\rho_0>1$, あるいは $=1-\eta_0<1$) は入力評価値総和を１に正規化したもとでの出力評価値総和の相対的な値を与える．従って，DEAでは最良な区分的に線形な生産関数との相対的比較なので，効率値は必ず１以下となるが，DEARAでは最良とは限らない生産関数との相対的比較なので，１より大きい(一般化)効率値を持つDMUも存在しうる．

通常の回帰分析においては，１つの出力変数yと複数の入力変数（すなわち，入力変数ベクトル$\mathbb{x}$)の間に，例えば線形関係 $y=\mathbb{v}^T\mathbb{x}$ を想定し，n個の標本データ集合$\{(y_i, \mathbb{x}_i);\ i=1\sim n\}$を最も良く説明するように，パラメータ$\mathbb{v}$ を決定しているが，提案するDEARAでは，複数の出力変数（出力変数ベクトル$\mathbb{y}$）を扱っており，$\mathbb{x}$と$\mathbb{y}$の間に「$\mathbb{u}^T\mathbb{y} = \mathbb{v}^T\mathbb{x}$」なるモデル関係式を想定し，n個の標本データ集合$\{(\mathbb{y}_i, \mathbb{x}_i);\ i=1\sim n\}$を最も良く説明するようにパラメータ$\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ を決定する．具体的には，標本 i のモデル関係式からの残差 $z_i = \mathbb{u}^T\mathbb{y}_i - \mathbb{v}^T\mathbb{x}_i$ の関数として定まる総合誤差を最小化するわけだが，$\mathbb{u}\to\mathbb{0}$, $\mathbb{v}\to\mathbb{0}$ とすれば，残差も０に近づき，総合誤差も０になり，無意味な解が得られてしまう．モデル関係式「$\mathbb{u}^T\mathbb{y} = \mathbb{v}^T\mathbb{x}$」からわかるように，パラメータ$\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ には定数倍の自由度が存在し，従って何らかの$\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$に関する１次制約式の導入により，パラメータ$\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$を一意に決める必要が生じる．そこで，注目する標本（あるいはDMU#0）に関して，入力評価値総和の正規化条件「$\mathbb{v}^T\mathbb{x}_0 = 1$」を課すことにより，パラメータ$\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$が定数倍の自由度がなくなるという意味で一意に決まる．例題１で図説するが，DMU#0の入力評価値総和=1の条件下でのDMU#0の出力評価値総和は，「入力評価値総和＝出力評価値総和」を想定したモデルのもとにおいて，１を基準とした相対的な性能評価の尺度を与えている．

議論を単純化するために係数a_i(i=1～n)とb_i $(i\neq0)$ を変化パラメータ t を導入して以下の様に連動して変化させる．

$$a_i = 2^t \quad (i=1\sim n) \qquad (14)$$

$$b_i = 2^{-t} \quad (i\neq0),\quad b_0 = 1 \qquad (15)$$

パラメータ t に対するDEARAをDEARA(t)と表記すると，DEARA(0)が最小絶対値和形線形回帰分析，DEARA(∞)がCCR形データ包絡分析に対応する．従って，DEARA(t)を t=0～∞と連続的に変化することにより，平均像に基づいたRA的評価から優れ者をベースにしたDEA的評価に至る広範囲の性能評価が同一の性能評価枠組のもとで行うことができる．

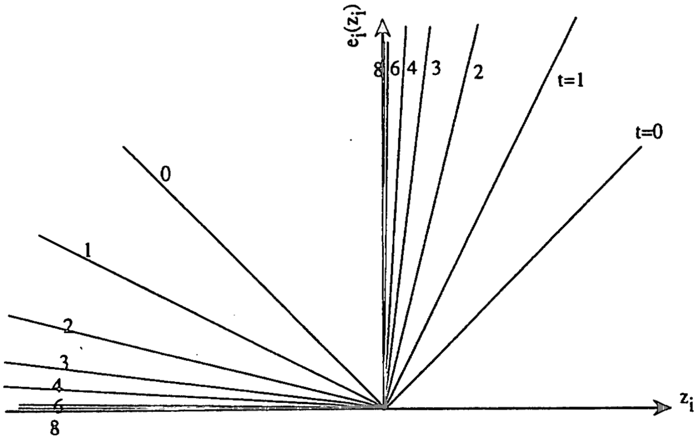


図３．ﾊﾟﾗﾒｰﾀt変化時の誤差関数$e_i(z_i)$$(i\neq0)$の形状

図３にパラメータt=0, 1, 2, 3, 4, 6, 8 に対応する誤差関数$e_i(z_i)$$(i\neq0)$の形状を示す．DEARA(0)では，注目する標本(i=0)に対する誤差関数もそれ以外の標本に対する誤差関数も同じ形状をしており，注目する標本についての正規化条件を変化したもとで，n回の線形計画問題を解くことにより，n個の標本に対して１回の評価を行う．正の残差，負の残差は平等に扱い，その総和である総合誤差を最小化するようにパラメータ$\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$を決定している．パラメータtの増加と共に，注目する標本については，負の残差は絶対値のまま不変で，正の残差に対しては，誤差への寄与度合を強める．それ以外の標本については，負の残差に対しては誤差への寄与度合を弱め，正の残差に対しては誤差への寄与度合を強める．DEARA(t)$(t\neq0)$ では，注目する標本とそれ以外の標本の誤差関数は異なっており，注目する標本についての正規化条件を変化したもとで，n回の線形計画問題を解くことにより1回の評価を行う．ここで，寄与度合を強めたり，弱めることにより，基準

となるモデルからの正の残差，負の残差に対する許容度合が均等でなくなる．例えば，DEARA（∞）（すなわちDEA）では，正の残差は全く許容せず，注目する標本（DMU）の負の残差の絶対値のみを最小化するような基準となるモデルを想定している．

4．例題

3つの例題を通して，DEARA(t)の物理的意味ならびに有効性を説明する．例題1は1入力，1出力の場合（[1]の例題2.1）を扱い，DEARA(t)における一般化効率値の物理的意味を説明する．例題2は1入力，2出力の場合であり，2科目の評点に関する評価問題を扱った．例題3は2入力，2出力の場合であり，ある企業の支店の営業成績評価問題を扱った．例題2，3によりRA 的評価からDEA的評価までの多角的評価を同一の枠組で行うDEARA(t)の効果を説明する．

【例題1】営業所の評価問題（[1] の例題2.1）

図4にA～Hの8つの営業所の座標とDEARA(0)とDEARA(8)に対応するモデル直線「uy=vx」を示す．営業所Aを基準とすると，DEARA(0)ではu=0.75，v=0.5となり，モデル直線は $y=\frac{2}{3}x$ となる．他の営業所B～Hのいずれを基準としても得られるモデル直線は同じである．Aを基準とした場合は，正規化条件「$\mathbf{u}^T\mathbf{x}_0=1$」により，モデル直線「0.75y = 0.5x」において，Aの入力データx=2に対応する縦軸の値が1に正規化されている（図4の破線参照）．この正規化条件のもとでのAの高さ0.75がAの一般化効率値で，モデル直線を基準としたときのAの相対的評価値を与えている．

同様に，DEARA(8)についてもモデル直線y=xが得られ，一般化効率値が計算できる．この例では，1入力，1出力なので，得られたモデル直線はいずれの営業所を基準にしても同じである．表1に全ての営業所A～Hに対するDEARA(0)，DEARA(8)での一般化効率値を示す．営業所A, F, G, Hのt=0に対応する一般化効率値は1未満であり，従って，モデル直線より下に存在する．営業所B，D，Eの一般化効率値は1より大きく，モデル直線より上に存在することがわかる．営業所Cはモデル直線上に存在し，従って平均的な営業所と考えられる．一方，t=8に対応する一般化効率値は，DEAの効率値（[1]の表1.2あるいは表2.2）に一致しており，DEARA(8)では十分にDEA的な評価が行われていることがわかる．

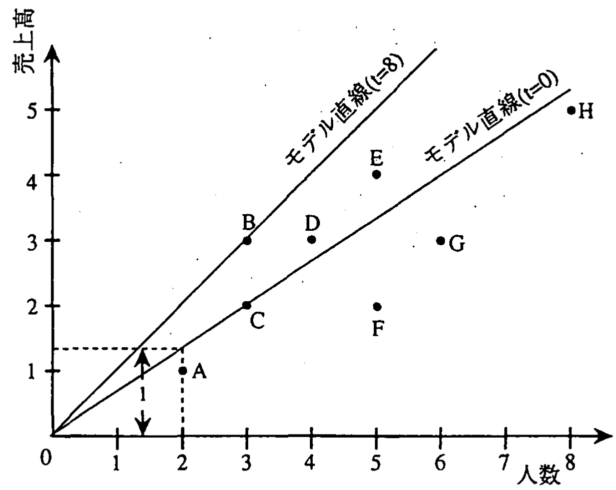


図4．例題1の営業所の比較とモデル直線

一般化効率値＼営業所	A	B	C	D	E	F	G	H
DEARA(0)	0.75	1.5	1.0	1.125	1.2	0.6	0.75	0.94
DEARA(8)	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625

表1．例題1における各営業所の一般化効率値

【例題2】学生の2科目の評点の評価問題

8人の学生A～Hの数学と国語の0～10点までの11段階評価点が表2で与えられた場合の1入力，2出力の性能評価問題にDEARA(t)を適用する．入力データ値は全ての学生に関して1である．

図5にパラメータtを0から8まで1刻みに変化した時の学生A～Dの一般化効率値を示す．学生AはRA的評価(t=0)では一般化効率値0.71と最低であるが，tの増加と供にDEA的評価の重みが増すと，一般化効率値が1となり，優れ者集団の仲間入りを達成する．学生Bはt=0～8の全域にわたって常に最高位の一般化効率値を達成しており，RA的評価とDEA的評価の両面からトップクラスに属する優等生である．

学生CはRA的評価の一般化効率値はちょうど1であり，平均レベルであるが，tの増加と共に一般化効率値は徐々に低下し，DEA的評価では学生A, Bより劣る．

学生DはRA的評価の一般化効率値は0.78とAの次に低いが，tの増加と共に徐々に増加し，t=8では0.85まで増加し，Cの一般化効率値0.9(t=8)に近づく．DEA的評価(t=8)では学生C, Dの一般化効率値は0.9，0.85と大きな差はないが，RA的評価(t=0)では一般化効率値は1.0，0.78と明らかに学生Cの方がDより優位であるこ

とがわかる．

次に，学生AとCを比較すると，DEARA(0)の平均像ベースでは，学生Cの方が優位であり，DEARA(8)の優れ者ベースでは学生Aの方が優位といえる．従って，学生AとCの対比較では，平均像から優れ者ベースの全域に渡って一方が優位とは断言できない．別の言い方をすれば，パラメータ値t＝2～3付近の中間的評価において，学生AとCの評価がほぼ等しくなるといえる．一方，学生BとCの対比較では，t＝0～8の全域に渡ってBの方が常に優位に立っていることがわかる．

学生	A	B	C	D	E	F	G	H
入力 x	1	1	1	1	1	1	1	1
出力1 y_1（数学の評点）	10	9	8	5	7	6	8	4
出力2 y_2（国語の評点）	0	6	6	6	7	7	7	7

表2　例題2の入出力データ

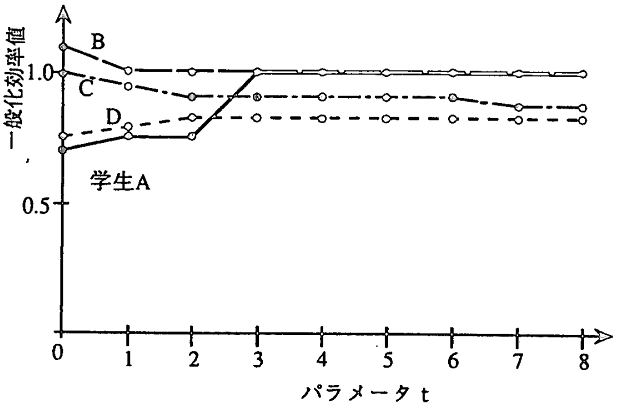


図5．例題2の一般化効率値の推移

【例題3】ある企業の支店の営業成績評価問題

8つの支店A～Hの営業成績評価を2入力，2出力の性能評価問題としてとらえ，DEARA(t)を適用する．表3に8つの支店の入出力データを示す（データには係数を乗じた）．

図6にパラメータtを0から8まで1刻みに変化したときの支店A～Hの一般化効率値を示す．支店AとC，支店BとHがRA的評価からDEA的評価に及ぶ全域で非常に酷似した性能を示すことがわかる．又，支店EとGにみられるように，一般化効率値はパラメータの増加と共に必ずしも単調に変化するとは限らない．特に，支店GはRA的評価では最低であるが，tの増加と共に一般化効率値で支店A，C，E，Fを逆転しており，DEA的評価では8支店中，上から4番目に位置している．

支店A，C，Fを比較すると，この3支店はパラメータtの変化に対して同傾向の変化を示している．さらに，t＝0～8の全域で常に「Fの一般化効率値＞Cの一般化効率値＞Aの一般化効率値」の関係が成立している．従って，平均像から優れ者ベースの全域に渡ってF，C，Aの順に優位であるといえる．

次に，支店AとGを比較すると，t ＝ 0～1 の途中で両者の上下関係が入れ替わっており，RA的評価からDEA的評価への移行過程の初期段階の中間的評価で，

支店	A	B	C	D	E	F	G	H
入力1 x_1（労務費用）	4.0	2.9	4.9	4.1	6.5	10.6	4.8	4.0
入力2 x_2（物件費用）	2.1	1.5	2.6	2.3	4.1	5.6	3.3	2.4
出力1 y_1（収入1）	2.6	2.2	3.2	2.9	5.1	7.0	3.6	3.3
出力2 y_2（収入2）	4.1	3.5	5.1	5.7	7.4	11.8	6.1	5.0

表3．例題3の入出力データ

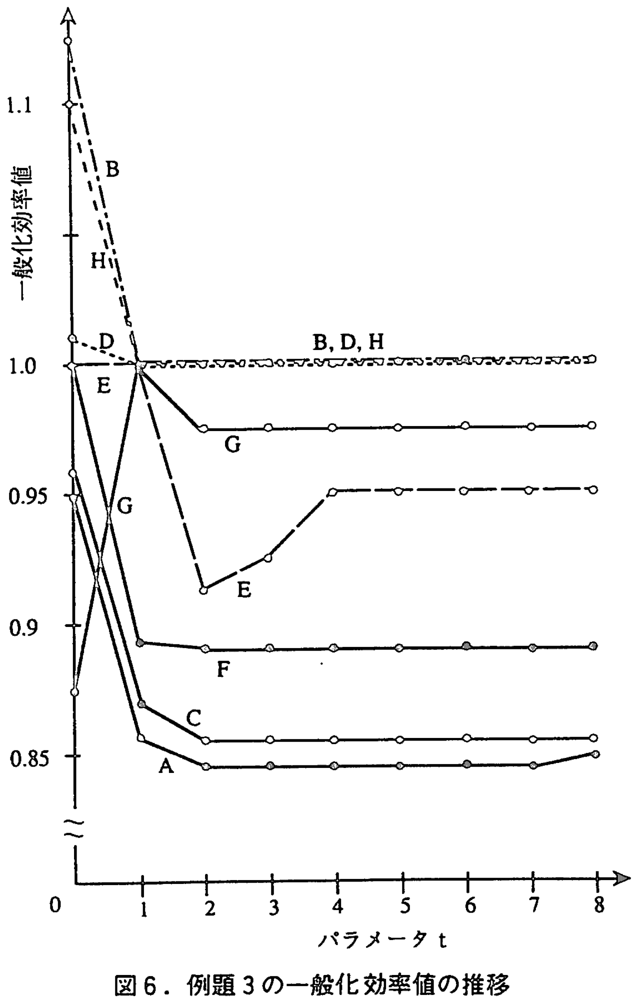


図6．例題3の一般化効率値の推移

GがAより優位に立つことがわかる．さらに，支店B, D, Hを比較すると，この3支店は$t \geqq 1$で，全て一般化効率値は1をとり，DEARA(0)のみにおいて一般化効率値を異にする．すなわち，平均像ベースでは支店B, Hが支店Dより優位にあると考えられる．

5．おわりに

データ包絡分析(DEA)と回帰分析(RA)を1つの枠組で行う新しい性能評価法DEARAを提案し，例題を通してその適用効果を示した．DEARA(t)によりRAとDEAの中間に位置する一連の性能評価法が生まれたわけであるが，これらはモデル関係式と各標本の正の残差と負の残差に対する係数a_i, b_iが各々中間的な値をとる性能評価法と解釈できる．本文中の例題2，3からは，パラメータ値$t=4$以上では一般化効率値は一部を除いて殆ど変化しておらず，一般化効率値の大局的な変化は$t=0$～3の範囲において限定されている．従って，$t=4$程度位からDEA的評価にかなり近い評価法になっていると考えられるので，パラメータ値$t=0$, 1, 2, 3, 4（あるいは∞）により代表した5段階のDEARA(t)によりRA的評価からDEA的評価までをほぼカバーできていると結論できる．

RAでは，各標本の入出力データ値に統計的な測定誤差が含まれており，全ての標本に関する総合誤差が最小となるように，背景に存在する特定モデルのパラメータ値を最適に決定するという立場に立っており，一方，DEAでは，各DMUの入出力データ値には背景に存在する区分的に線形な最良の生産関数からの個々のDMUの非効率性に由来する非効率な方向のみへの誤差が存在するという立場に立っている．DEARAにおいては，統計的な誤差あるいは（非）効率性の誤差かどうかの区別は問題にせず，DMUの入出力データ値の総合誤差を最小とする背景に存在する区分的に線形な生産関数を基準にした時の各DMUの相対的な効率性を評価する．すなわち，DEARAでは効率値の確率的変動(時の運)も実力の内と考えることができる．別の言い方をすれば，DEARAは，基準となるモデルから実データが乖離する原因である確率的変動と非効率性の両方をパラメータtを介して同時に直接考慮した性能評価アプローチとして位置づけられる．

本来，DEAは多入力，多出力のシステムの多角的性能評価法として位置づけられるが，DEARAにより平均像ベースから優れ者ベースに至るより広範囲の多角的性能評価が可能となった．又，DEARA(0)はRA的評価に対応する性能評価法であり，単出力の場合は従来の絶対値偏差和最小・線形重回帰分析に帰着されるが，一般の多入力，多出力の場合には，入力評価値総和と出力評価値総和を等しくするという新しいモデル関係式に対応した回帰分析法を新たに提起しており，既存の回帰分析法との比較研究などが今後の課題の1つである．なお，本論文では，同一パラメータを用いて$a_i = 2^t$, $b_i = 2^{-t}$を連動して変化するアプローチを採用したが，a_iとb_iを別個に変化するアプローチ，標本(DMU)毎に変化するアプローチ等との比較研究も今後の課題である．

参考文献

[1] 刀根：経営効率性の測定と改善，日科技連 (1993).

[2] E. Thanassoulis: A Comparison of Regression Analysis and Data Envelopment Analysis as Alternative Methods for Performance Assessments, J. Opl. Res. Soc., 44,11, pp.1129-1144 (1993).

[3] M. Norman and B. Stoker: Data Envelopment Analysis, John Wiley and Sons (1991).