不変埋没によるファジィ動的計画法

岩本 誠一 (Seiichi IWAMOTO)
九州大学 経済学部 経済工学科

1 はじめに

ファジィ動的計画法は Bellman and Zadeh (以下 B&Z) [4] の『ファジィ環境下の意志決定』に遡る。この論文で彼らは多段決定過程において (1) 確定的、(2) 確率的、(3) ファジィの三つのシステムを導入している。その後、(1) 確定システム、(2) 確率システムについては幾つかの研究・報告 ([5], [11], [13], [14] , [16]) が見られるが、いずれも B&Z 同様、確率システムをもつ決定過程の最適解は「逐次最適化≠同時最適化」になっている。この非整合性を指摘して Iwamoto and Fujita (以下 I&F) [8] は不変埋没による動的計画によって「逐次最適化＝同時最適化」を保証する最適解を与えている。[1] のファジィシステムは、ダイナミックスにファジィ状態上のファジィオートマトンを用いるなどの点で、(3) と異なっている。また、B&Z は (3) ファジィシステムをもつ決定過程の解析には触れていない。

他方、Iwamoto [9] はファジィ環境下の (2) 確率的決定過程は結合型利得系をもつ確率的動的計画として一般的に不変埋没原理による動的計画法で解けるとこを示した。ここではいわゆる確率測度による（積和の意味での）期待値が用いられれている。また、Iwamoto and Sniedovich [10] は (3) ファジィ推移法則に従うシステムにおいてミニ・マックスの意味での期待値概念を導入してファジィ環境下のファジィ決定過程を動的計画法で解析している。一般にファジィ環境下での決定過程においては期待値の概念には幾つかの多様性が考えられる。

本報告では、第 2 節でミニ・マックス期待値による多段決定過程を考える。ここではシステム全体の結合型ファジィ利得のミニ・マックス期待値を最適化する。さらに、代数的加法、代数的乗法、最小、最大などの結合的二項演算を考える。

第 3 節では、B&Z [4] の意味での最小型関数を共通の目的関数にもつ決定過程を、上述の三つのシステムを比較対照しながら解析する。

2 ファジィ動的計画

本節では, 有限段確率的動的計画に対応するファジィ動的計画をミニ・マックス期待値をもつ場合について導入する。この動的計画は B&Z [4] では未解決の『ファジィ環境下のファジィ推移法則をもつ意志決定過程』を特別な場合として含む定式化になっている。

結合型メンバーシップ系をもつファジィ動的計画 (FDP) は 5 つ組:

$$\mathbf{A} = (\ \mathrm{Opt},\ \{S_n\}_1^{N+1},\ \{A_n\}_1^N,\ (\{\nu_n\}_1^N,\ \circ,\ \xi),\ \{\mu_n\}_1^N\ )$$

で与えられる。ただし

(i) N は段の総数を表す正整数。現在の段を示す n は $1 \leq n \leq N$(または N+1) を動く。

(ii) S_n は空でない有限集合で、第 n 状態空間という。 $s_n \in S_n$ を 第 n 状態 という。 s_1 は初期状態で、s_{N+1} は終端状態である。

(iii) A_n は空でない有限集合で、第 n 決定空間という。空でない集合 $A_n(s_n) \subset A_n$ を状態

s_n における第 n 可能決定空間という。$a_n \in A_n(s_n)$ を状態 s_n における第 n 決定という。
(iv) $\nu_n : S_n \times A_n \to [0,1]$ は $S_n \times A_n$ 上のファジィ集合 R_n のメンバーシップ関数である：

$$\nu_n(s_n, a_n) = \mu_{R_n}(s_n, a_n). \tag{1}$$

R_nを第 n 利得、ν_n を第 n 利得メンバーシップ関数という。
(v) $\circ : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ は結合的二項関係：

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \tag{2}$$

である。この共通な値を $x \circ y \circ z$ で表す。以下、記号 $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$ などを用いる。
(vi) $\xi : S_{N+1} \to [0,1]$ は S_{N+1} 上のファジィ集合 T のメンバーシップ関数である：

$$\xi(s_{N+1}) = \mu_T(s_{N+1}). \tag{3}$$

T を終端利得、ξ を終端利得メンバーシップ関数という。3 つ組 $(\{\nu_n\}_1^N, \circ, \xi)$ を結合型メンバーシップ系という。これはシステム全体を通じて、直積（履歴）空間 $H = S_1 \times A_1 \times S_2 \times A_2 \times \cdots \times A_N \times S_{N+1}$ 上の利得（ファジィ）集合 $R_1 \circledcirc R_2 \circledcirc \cdots \circledcirc R_N \circledcirc T$ のメンバーシップ関数

$$\begin{aligned} & \nu_1(s_1, a_1) \circ \nu_2(s_2, a_2) \circ \cdots \circ \nu_N(s_N, a_N) \circ \xi(s_{N+1}) \\ = \; & \mu_{R_1 \circ \cdots \circ R_N \circ T}(s_1, a_1, s_2, a_2, \cdots, s_N, a_N, s_{N+1}) \end{aligned} \tag{4}$$

を導いている。ここで、ファジィ集合間の演算 $\circledcirc$ がメンバーシップ間の演算 $\circ$ に対応しているものとする ：

$$\mu_{R_m \circ R_{m+1}} = \mu_{R_m} \circ \mu_{R_{m+1}} \qquad (R_{N+1} = T, \; \mu_{R_{N+1}} = \mu_T) \qquad 1 \leq m \leq N. \tag{5}$$

(vii) $\mu_n = \mu_n(s_{n+1} | s_n, a_n)$ は現在の決定 a_n に依存して定まる s_n から S_{n+1} 上への第 n ファジィ推移法則である。すなわち、各 $(s_n, a_n) \in S_n \times A_n$ に対して $\mu_n(\cdot | s_n, a_n)$ は S_{n+1} 上のファジィ集合 $S_{n+1}(s_n, a_n)$ のメンバーシップ関数である。第 n 段でシステムが状態 s_n にあって決定 a_n をとると、次の状態が s_{n+1} になるメンバーシップ（帰属度）が $0 \leq \mu_n(s_{n+1} | s_n, a_n) \leq 1$ である。この状態推移を以下記号 $s_{n+1} \simeq \mu_n(\cdot | s_n, a_n)$ で表す。
(viii) Opt は Max または min を示す最適子である。これは FDP $\mathbb{A}$ が次のファジィ最適化問題を表していることを意味する：

$$\begin{aligned} &\text{Optimize} && F[\, \nu_1(s_1, a_1) \circ \nu_2(s_2, a_2) \circ \cdots \circ \nu_N(s_N, a_N) \circ \xi(s_{N+1}) \,] \\ &\text{subject to} && (\mathrm{i})_n \quad s_{n+1} \simeq \mu_n(\cdot | s_n, a_n) \quad 1 \leq n \leq N \\ & && (\mathrm{ii})_n \quad a_n \in A_n(s_n) \quad 1 \leq n \leq N \end{aligned} \tag{6}$$

ただし F は、条件付きメンバーシップ関数列 $\mu_n(s_{n+1} | s_n, a_n)$ $1 \leq n \leq N$, 政策 $\pi = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N\}$ および初期状態 $s_1 \in S_1$ から定まる履歴空間 H 上のミニ◦マックス期待値作用素である。すなわち、

$$\begin{aligned} & F[\, \nu_1(s_1, a_1) \circ \nu_2(s_2, a_2) \circ \cdots \circ \nu_N(s_N, a_N) \circ \xi(s_{N+1}) \,] \\ = \; & \bigvee_{s \in S^N} \{ [\, \nu_1(s_1, a_1) \circ \nu_2(s_2, a_2) \circ \cdots \circ \nu_N(s_N, a_N) \circ \xi(s_{N+1}) \,] \\ & \bigwedge [\, \mu_1(s_2 | s_1, a_1) \wedge \mu_2(s_3 | s_2, a_2) \wedge \cdots \wedge \mu_N(s_{N+1} | s_N, a_N) \,] \} \end{aligned} \tag{7}$$

ここに

$$s = (s_2, \cdots, s_{N+1}), \qquad S^N = S_2 \times \cdots \times S_{N+1}.$$

本報告では“ファジィ”変数 $\nu_n(s_n,a_n)\circ\cdots\circ\nu_N(s_N,a_N)\circ\xi(s_{N+1})$ に対して簡略記号 $\nu_n\circ\cdots\circ\nu_N\circ\xi$ を用いる：

$$\nu_n=\nu_n(s_n,a_n)\qquad 1\le n\le N,\qquad \xi=\xi(s_{N+1}).$$

このようにすると、問題 (6) は次のように簡単に表される：

$$\mathrm{Opt}\quad F[\,\nu_1\circ\nu_2\circ\cdots\circ\nu_N\circ\xi\,]\quad \text{s.t. (i)}_{\mathrm{n}},\ \text{(ii)}_{\mathrm{n}}\quad 1\le n\le N.$$

さて、任意の $s_n\in S_n,\ 1\le n\le N+1$ に対して部分問題：

$$v^{N-n+1}(s_n)=\mathrm{Opt}\ F[\,\nu_n\circ\cdots\circ\nu_N\circ\xi\,|\,\text{(i)}_{\mathrm{m}},\ \text{(ii)}_{\mathrm{m}}\quad n\le m\le N\,] \tag{8}$$

を導入しよう。このとき、値 $v^{N-n+1}(s)$ と相隣る関数 $v^{N-n}(\cdot)$ の間の再帰式としては

$$v^{N-n+1}(s)=\mathop{\mathrm{Opt}}_{a}\bigvee_{t}[\,(\,\nu_n(s,a)\circ v^{N-n}(t)\,)\wedge\mu_n(t|s,a)\quad s\in S_n,\quad 1\le n\le N \tag{9}$$

$$v^0(s)=\xi(s)\qquad s\in S_{N+1} \tag{10}$$

がある。ただし、a についての最適化は可能決定集合 $A_n(s)$ 上であり、また t についての最大（演算）は集合 S_{n+1} 上である：

$$\mathop{\mathrm{Opt}}_{a}=\mathop{\mathrm{Opt}}_{a\in A_n(s)},\qquad \bigvee_{t}=\bigvee_{t\in S_{n+1}}.$$

本報告では以下この二つの簡略記号を用いる。

もう一つの再帰式としては

$$v^{N-n+1}(s)=\mathop{\mathrm{Opt}}_{a}[\,\nu_n(s,a)\circ\bigvee_{t}(v^{N-n}(t)\wedge\mu_n(t|s,a)\,)\,]\quad s\in S_n,\quad 1\le n\le N \tag{11}$$

$$v^0(s)=\xi(s)\qquad s\in S_{N+1} \tag{12}$$

も考えられる。再帰式 (9),(11) の成立可能性については演算 $\circ$ の個々の型に応じて後述するとして、以下では結合（律）演算 $\circ$ について一般に成立する再帰式を述べる。この再帰式を成立せしめている基本的な考え方は不変埋没原理 [3],[12] であることを指摘しておこう。

さて、ここでは本来の結合型ファジィ動的計画 **A** が表現している最適化問題 (6) を実パラメータ λ を含む問題群：

$$u^{N-n+1}(s_n;\lambda)=\mathrm{Opt}\ F[\,\lambda\circ\nu_n\circ\cdots\circ\nu_N\circ\xi\,|\,\text{(i)}_{\mathrm{m}},\ \text{(ii)}_{\mathrm{m}}\quad n\le m\le N\,] \tag{13}$$
$$s_n\in S_n,\quad \lambda\in[0,1],\quad 1\le n\le N+1$$

に埋め込む。このとき、最適値 $u^{N-n+1}(s;\lambda)$ と 2 変数最適値関数 $u^{N-n}(t;\mu)$ の間には次の再帰式が成立する：

定理 2.1

$$u^{N-n+1}(s;\lambda)=\mathop{\mathrm{Opt}}_{a}\bigvee_{t}[\,u^{N-n}(t;\lambda\circ\nu_n(s,a))\wedge\mu_n(t|s,a)\,] \tag{14}$$
$$s\in S_n\qquad \lambda\in[0,1]\qquad n=1,2,\cdots,N$$

$$u^0(s;\lambda)=\lambda\circ\xi(s)\qquad s\in S_{N+1}\qquad \lambda\in[0,1]. \tag{15}$$

ここで二つの最適値関数 (8),(13) の間に等式

$$u^{N-n+1}(s;\lambda)=\lambda\circ v^{N-n+1}(s) \tag{16}$$

が成立するか、否かの問題も考えられる。これについても $\circ$ の型に応じて後述する。

2.1 代数的加法型ファジィ動的計画

代数的加法型（メンバーシップ系をもつ）ファジィ動的計画 (FDP) は5つ組：

$$\mathbb{AAd} = (\ \mathrm{Opt},\ \{S_n\}_1^{N+1},\ \{A_n\}_1^N,\ (\{\nu_n\}_1^N,\ \oplus,\ \xi\ ),\ \{\mu_n\}_1^N\ )$$

で与えられる。ただし、結合型 FDP $\mathbb{A}$ において二項演算 $\circ$ を代数的加法演算 $\oplus$ に置き替えたものである ([4, pp.B145])：

$$a \oplus b = a + b - ab : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]. \tag{17}$$

ここで等式

$$a \oplus b = \overline{\bar{a}\bar{b}} \tag{18}$$

に注意しよう。ただし、 $\bar{x} = 1 - x$.

このとき、FDP $\mathbb{AAd}$ は最適化問題：

$$\begin{array}{lll} \text{Optimize} & F[\,\nu_1 \oplus \nu_2 \oplus \cdots \oplus \nu_N \oplus \xi\,] & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n} \quad s_{n+1} \simeq \mu_n(\cdot \mid s_n, a_n) & 1 \le n \le N \\ & (\mathrm{ii})_\mathrm{n} \quad a_n \in A_n(s_n) & 1 \le n \le N \end{array} \tag{19}$$

を表現している。任意の $s_n \in S_n$, $\lambda \in [0,1]$, $1 \le n \le N{+}1$ に対して部分問題の最適値を

$$u^{N-n+1}(s_n;\lambda) = \mathrm{Opt}\ \ F[\,\lambda \oplus \nu_n \oplus \cdots \oplus \nu_N \oplus \xi \mid (\mathrm{i})_\mathrm{m},\ (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad n \le m \le N\,] \tag{20}$$

で定義すると、再帰式

系 2.1

$$u^{N-n+1}(s;\lambda) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a} \bigvee_{t} [u^{N-n}(t;\lambda \oplus \nu_n(s,a)) \wedge \mu_n(t|s,a)] \tag{21}$$

$$s \in S_n \qquad \lambda \in [0,1] \qquad n = 1,2,\cdots,N$$

$$u^0(s;\lambda) = \lambda \oplus \xi(s) \qquad s \in S_{N+1} \qquad \lambda \in [0,1] \tag{22}$$

が成立する。このとき、問題 (19) の最適値は $u^N(s_1;0)$ で与えられる。

さて、パラメータ λ を含まない部分問題：

$$v^{N-n+1}(s_n) = \mathrm{Opt}\ \ F[\,\nu_n \oplus \cdots \oplus \nu_N \oplus \xi \mid (\mathrm{i})_\mathrm{m},\ (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad n \le m \le N\,] \tag{23}$$

に対しては再帰式

$$v^{N-n+1}(s) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a} \bigvee_{t} [\,(\,\nu_n(s,a) \oplus v^{N-n}(t)\,) \wedge \mu_n(t|s,a)\,] \tag{24}$$

$$v^{N-n+1}(s) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a} [\,\nu_n(s,a) \oplus \bigvee_{t} (\,v^{N-n}(t) \wedge \mu_n(t|s,a)\,)\,] \tag{25}$$

はともに成立しない。さらに、等式

$$u^{N-n+1}(s;\lambda) = v^{N-n+1}(s) \oplus \lambda \tag{26}$$

も成り立たない。

また、結合型 FDP $\mathbb{A}$ の二項演算 $\circ$ を代数的乗法演算 $\times$ に置き替えると ([4, pp.B145])、代数的乗法型 FDP $\mathbb{AM}$ が得られる。$\mathbb{AM}$ についても上述の代数的加法型 FDP $\mathbb{AAd}$ と同様な結果が得られる。

2.2 最小型ファジィ動的計画

最小型（メンバーシップ系をもつ）ファジィ動的計画 (FDP) は 5 つ組：

$$\mathbf{Mi} = (\ \mathrm{Opt},\ \{S_n\}_1^{N+1},\ \{A_n\}_1^N,\ (\{\nu_n\}_1^N,\ \wedge,\ \xi),\ \{\mu_n\}_1^N\ )$$

で与えられる。これは結合型 FDP **A** の $\circ$ を最小演算 $\wedge$ に置き替えたものである ([4],[8],[9])。FDP **Mi** は最適化問題：

$$\begin{array}{lll} \text{Optimize} & F[\,\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \cdots \wedge \nu_N \wedge \xi\,] & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n}\quad s_{n+1} \simeq \mu_n(\cdot \mid s_n, a_n) & 1 \le n \le N \\ & (\mathrm{ii})_\mathrm{n}\quad a_n \in A_n(s_n) & 1 \le n \le N \end{array} \tag{27}$$

を表現している。パラメータ λ を含む部分問題：

$$u^{N-n+1}(s_n;\lambda) = \mathrm{Opt}\ \ F[\,\lambda \wedge \nu_n \wedge \cdots \wedge \nu_N \wedge \xi \mid (\mathrm{i})_\mathrm{m},\ (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad n \le m \le N\,] \tag{28}$$

に対しては再帰式

系 2.2

$$u^{N-n+1}(s;\lambda) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a} \bigvee_t [\,u^{N-n}(t;\lambda \wedge \nu_n(s,a)) \wedge \mu_n(t|s,a)\,] \tag{29}$$

$$s \in S_n \qquad \lambda \in [0,1] \qquad n = 1,2,\cdots,N$$

$$u^0(s;\lambda) = \lambda \wedge \xi(s) \qquad s \in S_{N+1} \qquad \lambda \in [0,1] \tag{30}$$

が成り立つ。特に $\lambda = 1$ のとき、$u^N(s_1;1)$ は問題 (27) の最適値になる。また、パラメータを含まない部分問題：

$$v^{N-n+1}(s_n) = \mathrm{Opt}\ \ F[\,\nu_n \wedge \cdots \wedge \nu_N \wedge \xi \mid (\mathrm{i})_\mathrm{m},\ (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad n \le m \le N\,] \tag{31}$$

については、二つの再帰式

$$v^{N-n+1}(s) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a} \bigvee_t [\,(\,\nu_n(s,a) \wedge v^{N-n}(t)\,) \wedge \mu_n(t|s,a)\,] \tag{32}$$

$$v^{N-n+1}(s) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a} [\,\nu_n(s,a) \wedge \bigvee_t (\,v^{N-n}(t) \wedge \mu_n(t|s,a)\,)\,] \tag{33}$$

が成立する。さらに、今度は関係式

$$u^{N-n+1}(s;\lambda) = \lambda \wedge v^{N-n+1}(s) \tag{34}$$

も成り立つ ([8])。([4],[5],[11] も参照)。

他方、最小演算 $\wedge$ を最大演算 $\vee$ に置き換えて得られる最大型 FDP **Ma** については、代数的加法型および代数的乗法型の両 FDP 同様、上述の (32),(33),(34) に対応する等式は三つとも成立しない。

3 ファジィ環境下の多段決定過程

この節では B&Z [4] が導入したファジィ環境下の三つの多段決定過程についてまとめる。すなわち、システムの運動法則の応じて (1) 確定的、(2) 確率的、(3) ファジィ の三つの多段決定過程についてである。(1) 確定的システムについては B&Z [4, §4]、(2) 確率的シ

ステムについては B&Z [4, §5], I&F [8]、(3) ファジィシステムについては Iwamoto and Sniedovich [10] に、それぞれ依る。(3) は第 2.2 節の最小型ファジィ動的計画になっている。なお、(1) 確定的システムは (2) 確率的システム および (3) ファジィシステムのともに特別なシステムとして考えられている。

以下の 3 小節では共通に次の B&Z [4, pp. B151-B155] の記号を用いるが、幾分簡略した表現にしている。

有限集合 X は状態空間、有限集合 U は決定空間で、$\mu_n : U \to [0, 1],\ 0 \le n \le N-1$ は時刻 n におけるファジィ制約 C^n から導かれたメンバーシップ関数とする。また、$\mu_{G^N} : X \to [0, 1]$ は X 上のファジィゴール G^N のメンバーシップ関数である。

3.1 確定的決定過程

ファジィ環境下の確定的多段決定過程として B&Z [4, §4] は最大化問題：

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & \mu_0(u_0) \wedge \mu_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(x_N) & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n} \quad x_{n+1} = f(x_n, u_n) \quad 0 \le n \le N-1 & \\ & (\mathrm{ii})_\mathrm{n} \quad u_n \in U \quad 0 \le n \le N-1 & \end{array} \tag{35}$$

を導入している。ここに、システムは確定的ダイナミックス $f : X{\times}U \to X$ に従っている。問題 (35) に対して彼らは最大値関数列$\mu_{G^0}(\cdot),\ \mu_{G^1}(\cdot),\ \cdots,\ \mu_{G^{N-1}}(\cdot)$ を

$$\begin{aligned} \mu_{G^n}(x_n) = \mathrm{Max}\ [\,\mu_n(u_n) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(x_N) & \\ |\,(\mathrm{i})_\mathrm{m},\ (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad n \le m \le N-1\,] & \\ x_n \in X, \quad 0 \le n \le N-1 & \end{aligned} \tag{36}$$

によって定義して、いわゆる動的計画法 ([2],[15]) を用いて確定的再帰式：

定理 3.1

$$\mu_{G^n}(x_n) = \mathop{\mathrm{Max}}_{u_n} (\mu_n(u_n) \wedge \mu_{G^{n+1}}(x_{n+1})) \tag{37}$$

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{38}$$

を導いている。式 (37),(38) は一つの式：

$$\mu_{G^n}(x) = \mathop{\mathrm{Max}}_{u \in U} [\mu_n(u) \wedge \mu_{G^{n+1}}(f(x, u))] \quad x \in X, \quad 0 \le n \le N-1 \tag{39}$$

にまとめられる ([8])。

3.2 確率的決定過程

B&Z が導入したファジィ環境下の確率的多段決定過程の最適解は「逐次最適化≠同時最適化」になっている [4, §5]。この点を考慮して、最近 I&F [8] は最小型利得系をもつ確率制御問題として B&Z の確率的決定過程を次のように定式化している：

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & E^\pi[\,\mu_0(u_0) \wedge \mu_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(x_N)\,] \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n} \quad x_{n+1} \sim p(\cdot \,|\, x_n, u_n) \quad 0 \le n \le N-1 \\ & (\mathrm{ii})_\mathrm{n} \quad u_n \in U \quad 0 \le n \le N-1 \end{array} \tag{40}$$

ここではシステムはマルコフ推移法則 $p(x_{t+1}|x_t, u_t)$ に従っている。E^π は条件つき確率関数 $p(x_{n+1} \,|\, x_n, u_n)$, 政策 $\pi = \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{N-1}\}$ および初期状態 x_0 によって一意に定まる、

直積（履歴）空間 $H = X \times U \times X \times U \times X \times \cdots \times U \times X$ 上の確率測度による期待値である。また、最大化はすべての政策 π に及び、その第 n 決定関数は（従来の動的計画の立場からすれば）$\pi_n : X \to U$ である。

まず、マルコフ推移法則は条件：

$$p(y|x,u) \ge 0 \quad \forall(x,u,y) \in X \times U \times X, \quad \sum_{y \in X} p(y|x,u) = 1 \quad \forall(x,u) \in X \times U \tag{41}$$

を満たしいることに注意しよう。I&F [8] は問題 (40) を 1 次元パラメータ λ を含む部分問題群：

$$\mu_{G^n}(x_n;\lambda) = \mathrm{Max}\ E^{\pi}[\,\lambda \wedge \mu_n(u_n) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(x_N) \,|\, (\mathrm{i})_m,\ (\mathrm{ii})_m \quad n \le m \le N-1\,] \tag{42}$$

$$x_n \in X, \quad 0 \le \lambda \le 1, \quad 0 \le n \le N-1$$

$$\mu_{G^N}(x_N;\lambda) = \lambda \wedge \mu_{G^N}(x_N) \qquad x_N \in X, \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{43}$$

に埋め込んでいる。ただし、式 (42) では第 m 決定関数が (x,λ) の 2 変数関数 $\pi_m : X \times [0,1] \to U$ であるような政策 $\pi = \{\pi_n, \cdots, \pi_{N-1}\}$ 全体について最大化が行われる。彼らは確率的再帰式：

定理 3.2

$$\mu_{G^n}(x;\lambda) = \mathop{\mathrm{Max}}_{u \in U} \sum_{y \in X} \mu_{G^{n+1}}(y;\lambda \wedge \mu_n(u))p(y|x,u) \tag{44}$$

$$x \in X, \quad 0 \le \lambda \le 1 \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$

$$\mu_{G^N}(x;\lambda) = \lambda \wedge \mu_{G^N}(x) \qquad x \in X, \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{45}$$

を導いている。また、問題 (40) の最大期待値は $\mu_{G^0}(x_0;1)$ で与えられる。

ここでは、たとえ（線形）期待値作用素：

$$(Ef)(x,u) = \sum_{y \in X} f(y)p(y|x,u) \qquad (\, f : X \to R^1\,) \tag{46}$$

を用いても、再帰式：

$$\mu_{G^n}(x) = \mathop{\mathrm{Max}}_{u \in U} [\mu_n(u) \wedge (E\mu_{G^{n+1}})(x,u)] \quad x \in X, \quad 0 \le n \le N-1 \tag{47}$$

は成り立たないことに注意すべきである [6],[7],[8],[9]。([4, §5],[5],[11],[13],[14],[16] 参照)。

さらに、確定的システムを確率的システムの特別なケースとみなすことによって、埋没問題の 2 変数間の確率的再帰式 (44) から B&Z の確定的再帰式 (37),(38) を演繹的に導くことができる. しかし, 逆に確定的再帰式の単なる類推（B&Z の意味でのアナロジー）で確率的システムの結果 (47) を導くのは危険であり、理論的であるとは言い難い。

3.3 ファジィ決定過程

B&Z の論文 [4] はファジィ（システムをもつ）決定過程については具体的にその結果には言及していない。ただ、僅かに次のように触れているだけである [4, pp. B151]：

> ……確定システム……。……確率システム……。同様に、もし状態方程式 $x_{t+1} = f(x_t, u_t)$ がファジィ関数ならば、対象となるシステム A はファジィシステムになる*。その時刻 $t+1$ での状態は、状態 x_t および決定 u_t で条件付けられたファジィ集合である。すなわち、このファジィシステムは $\mu(x_{t+1}|x_t, u_t)$ なる型のメンバーシップ関数で特徴付けられる。以下ではこのような（ファジィ）システムは議論しないので、特に断わらない限り f は非ファジィ関数とする。

脚註* 本論文でファジィ環境とは、ゴールまたは・かつ制約がファジィであるものとする。対象となるシステムは必ずしもファジィとは限らない。

Iwamoto and Sniedovich [10] はファジィ決定過程として、第2.2節の最小型 FDPMi を提唱している。Mi が表現している最適化問題 (27) は本節の B&Z 流の記号で表すと

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & F^{\pi}[\,\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)\,] & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_n \quad x_{n+1}\simeq\mu(\cdot|\,x_n,u_n) \quad 0\le n\le N-1 & \\ & (\mathrm{ii})_n \quad u_n\in U \quad 0\le n\le N-1 & \end{array} \tag{48}$$

になる。ただし $\mu(x_{n+1}|x_n,u_n)$ は定常（時刻 n に依存しない）ファジィ推移法則である：

$$0\le\mu(y|x,u)\le 1 \qquad \forall(x,u,y)\in X{\times}U{\times}X. \tag{49}$$

すなわち、各 $(x,u)\in X{\times}U$ に対して$\mu(\cdot|\,x,u)$ は状態空間 X 上のファジィ集合 $X(x,u)$ のメンバーシップ関数である [4, pp.B146, pp.B151]。また、問題 (48) の目的関数は（第2節の意味での）ミニ・マックス期待値である：

$$\begin{aligned} & F^{\pi}[\,\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)\,] \\ = & \bigvee_{x\in X^N}\{\,[\,\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)\,] \\ & \bigwedge[\,\mu(x_1|x_0,u_0)\wedge\mu(x_2|x_1,u_1)\wedge\cdots\wedge\mu(x_N|x_{N-1},u_{N-1})\,]\,\} \end{aligned} \tag{50}$$

ただし

$$u_n=\pi_n(x_n)\ \ 0\le n\le N-1, \quad x=(x_1,\cdots,x_N), \qquad X^N=X{\times}\cdots{\times}X.$$

さて、任意の '帰属度値' 関数 $g:X\to[0,1]$ に対してミニ・マックス期待値作用素 F を

$$(Fg)(x,u)=\bigvee_{y\in X}[\,g(y)\wedge\mu(y|x,u)\,] \tag{51}$$

で定義しよう。値 $(Fg)(x,u)$ は、（ミニ・マックスの意味での）ファジィ環境下で状態 x において決定 u をとって次期期待状態 y の帰属度が $g(y)$ であるときの直接期待帰属度を表していると考えられる。すなわち、g をメンバーシップ関数にもつ（状態空間 X 上の）ファジィ利得 G の期待値である。ここで勿論、状態推移は (49) のファジィ推移法則 μ に従うとしている。

さて、各 $0\le n\le N-1$, $x_n\in X$ に対して部分問題：

$$\begin{aligned} \mu_{G^n}(x_n)=\text{Max}\ \{\,F^{\pi}[\,\mu_n(u_n)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)\,] \\ |\,(\mathrm{i})_m,\ (\mathrm{ii})_m \quad n\le m\le N-1\,\} \end{aligned} \tag{52}$$

を定義する。ただし、この最大化は第 m 決定関数が $\pi_m:X\to U$ であるような政策 $\pi=\{\pi_n,\cdots,\pi_{N-1}\}$ 全体についてである。このとき、ファジィ再帰式：

定理 3.3

$$\mu_{G^n}(x)=\mathop{\text{Max}}_{u\in U}[\,\mu_n(u)\wedge(F\mu_{G^{n+1}})(x,u)\,] \quad x\in X, \quad 0\le n\le N-1 \tag{53}$$

$$\mu_{G^N}(x)=\text{ファジィゴール}\,G^N\text{における}\,x\,\text{の帰属度}, \quad x\in X \tag{54}$$

が成立する。これは第2.2節のパラメータを含まない部分問題 (31) に対するの再帰式 (33) の特別な場合である。

References

[1] Baldwin, J.F. and Pilsworth, B.W.: Dynamic programming for fuzzy systems with fuzzy environment, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.85 (1982), 1-23.

[2] Bellman, R.E.: *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[3] Bellman, R.E and Denman, E.D.: *Invariant Imbedding*, Lect. Notes in Operation Research and Mathematical Systems, Vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[4] Bellman, R.E. and Zadeh, L.A.: Decision-making in a fuzzy environment, *Management Science*, Vol.17 (1970), B141-B164.

[5] Esogbue, A.O. and Bellman, R.E.: Fuzzy dynamic programming and its extensions, *TIMS/Studies in the Management Sciences*, Vol.20 (1984), 147-167.

[6] 藤田敏治: ファジィ線形計画とファジィ環境下における確率推移システム, 九大大学院理学研究科修士論文（数学専攻）, 1994 年 3 月.

[7] 岩本誠一、藤田敏治: 確率的ファジィ意志決定について, オペレーションズ・リサーチ, 1994 年 10 月, 517-521.

[8] Iwamoto, S. and Fujita, T.: Stochastic decision-making in a fuzzy environment, to appear in J. Operations Res. Soc. Japan.

[9] Iwamoto, S.: Associative dynamic programs, under consideration.

[10] Iwamoto, S. and Sniedovich, M.: Fuzzy decision-making in a fuzzy environment, under consideration.

[11] Kacprzyk, J.: Decision-making in a fuzzy environment with fuzzy termination time, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1 (1978), 169-179.

[12] Lee, E.S.: *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, New York, 1968.

[13] 水本 雅晴: ファジィ理論とその応用, サイエンス社, 1988.

[14] 小田中 敏男: 確率制御過程, 森北出版, 1976.

[15] Sniedovich, M.: *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Inc. NY,1992.

[16] Stein, W.E.: Optimal stopping in a fuzzy environment, Fuzzy Sets and Systems. **3**(1980), 253-259.