ファジイ組合せ最適化とその応用

大阪大学工学部　石井博昭

1．はじめに

ファジイ理論による組合せ最適化の一般化の研究は少なく，我々が細々とやっていたのが，最近若干ふえてきているのは嬉しい限りである．ファジイ組合せ最適化という言葉も定着しつつあるように思われる．ファジイ組合せ最適化のオリジンは1つ憶えのようであるが，Chanas &W. Kołdziejczyk [CHK1] [CHK2] [CHK3] のネットワーク・フロー問題へのファジイ容量の導入であると思われる．ファジイ組合せ最適化に限らないが，ファジイ化することの意味は2つあり，1つは，係数等データの曖昧性，漠然性を考慮することであり，もう1つは，条件等に融通性をもたせることである．前者は，条件や制限の変化により，解が劇的にかわる点から，後者はより現実的なモデルの為に重要である．ここでは，ファジイスケジューリング問題およびファジイネットワーク問題を中心に，なるべく応用の可能性の高い多様なモデルとその根底になっているファジイ概念を紹介する．

2．基礎的ファジイ概念

2．1．ファジイ関係

2つの対象の間の関係を2項関係という．いろいろな関係，人間関係や社会的関係などは，この様な1対1の関係としての2項関係を基本にしている．xとyの間に関係Rが成り立つとき，xRy で表す．xが属する集合Xとyが属する集合Yが異なる場合も，$X=Y$もある．$X=Y$の場合，RをX上の2項関係というが，ここでは，もっぱら，この場合をファジイ概念した場合X上のファジイ2項関係を考える．従って，以下ではこれを，単にファジイ関係という事にする．このファジイ関係は，各要素(x,y)，$x,y\in X$ に対して，関係の成り立つ度合いとしてのメンバーシップ関数$\mu_{\tilde{R}}(x,y)$を与える事により定義される．

後述のファジイ先行関係はスケジューリング問題の先行関係のファジイ概念化である．

2．2．ファジイ数

ファジイ数は通常の数の以下のように定義されるファジイ概念化である．

（ファジイ数）実直線R上で定義され，以下の特性をもつファジイ集合$\tilde{A}$をファジイ数という．①メンバーシップ関数$\mu_{\tilde{A}}(x)$で$\mu_{\tilde{A}}(m)=1$となる$m\in R$が存在する．②$\tilde{A}$のメンバーシップ関数の値がα以上となるxの範囲$A_\alpha=\{x|\mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\}$，$\alpha\in[0,1]$がどの$\alpha$についても1つの連続区間となる．③$\mu_{\tilde{A}}(x)$は区分的に連続である．▨

特に，図1の様な三角型メンバーシップ関数をもつファジイ数を三角型ファジイ数（ＴＦＮ）という．ＴＦＮは図の3つの点の組(a,b,c)で表される．ファジイ数の演算には，以下の拡張原理が必要である．（拡張原理）通常の集合XからYへの関数fを考える．X上のファジイ集合$\tilde{A}$の関数値

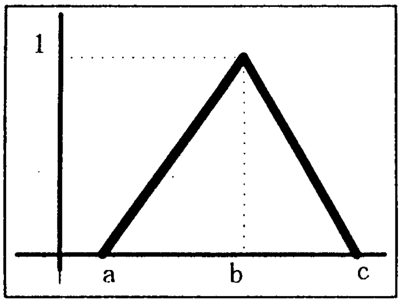

図1．

$f(\tilde{A})=\tilde{B}$はY上のファジイ集合となるが，そのメンバーシップ関数$\mu_{\tilde{B}}$は$\mu_{\tilde{A}}$を用いて以下の様に定義される．

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases}\max\{\mu_{\tilde{A}}(x)|x=f^{-1}(y)\} & (f^{-1}(y)\neq\phi)\\ 0 & (f^{-1}(y)=\phi)\end{cases}$$

ここで$f^{-1}(y)$はfの逆関数である．■

可能性分布は以下に述べる可能性分布とも考えられる．また，ファジイ数$\tilde{A}$, $\tilde{B}$の和$\tilde{A}\oplus\tilde{B}$はそのメンバーシップ関数$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x)=\max\{\min\{\mu_{\tilde{A}}(y),\ \mu_{\tilde{B}}(x-y)\}|y\}$により定義される．

2．3．ファジイ数間の順序

ファジイ数の順序についてはいろいろ考えられているが，Nagata Fukukawa[FUK]は最近以下の様なファジイ数上の順序を考え，それを基にファジイ最短路問題をモデル化した．
但し，ファジイ数としては上記の定義よりも異なる特性④⑤⑥をもつ（これらのファジイ数の集合を$\Im$で示す．すなわち，④メンバーシップ関数$\mu_{\tilde{A}}(x)$で$\mu_{\tilde{A}}(m)=1$となる唯１つの$m\in R$が存在する（mは$\tilde{A}$の中央といい，$m_{\tilde{A}}$で示す）．⑤$\mu_{\tilde{A}}$は$(-\infty,m]$で非減少関数である．⑥$\mu_{\tilde{A}}$は$[m,\infty)$で非増加関数である．■

（$\Im$上の順序関係）２つのファジイ数$\tilde{A},\tilde{B}\in\Im$に対して，$\tilde{A}\preceq\tilde{B}\Leftrightarrow$⑦$m_{\tilde{A}}\leq m_{\tilde{B}}$ かつ⑧ (a) $m_{\tilde{A}}\leq c\leq m_{\tilde{B}}$, (b) $\mu_{\tilde{A}}(x)\geq\mu_{\tilde{B}}(x)$, $^{\forall}x<c$ (c) $\mu_{\tilde{A}}(x)\leq\mu_{\tilde{B}}(x)$, $^{\forall}x>c$を満たす実数cが存在．■

この順序関係について，勿論$\Im$は半順序集合となる．ＴＦＮを含み，$\Im$の部分集合である次のLファジイ数を考える．そのためにまず次の型関数Lを導入する．実数RからRへの次の条件⑨⑩⑪⑫を満たす関数Lを型関数という．⑨$L(x)=L(-x)$, $^{\forall}x\in R$ ⑩$L(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ⑪$L(\cdot)$は$[0,\infty)$で非増加である．⑫$x_0=\inf\{x>0|L(x)=0\}$とすると，$0<x_0<\infty$である．x_0をLの零点という．■

（Lファジイ数）m, α, Lを各々任意の実数，任意の正数，型関数とするとき，そのメンバーシップ関数$\mu_{\tilde{A}}$が$\mu_{\tilde{A}}(x)=\max\{L\left(\frac{x-m}{\alpha}\right),\ 0\}$, $x\in R$で表現されるファジイ数$\tilde{A}$をLファジイ数という．
Lが決まれば，$\mu_{\tilde{A}}$は(m,α)で決まる，従って，$\tilde{A}=(m,\alpha)_L$で示す．■

Nagata Fukukawa[FUK]はLファジイ数上のfuzzymax orderを特徴づける次の定理を得た．

定理１． ２つのLファジイ数$\tilde{A}=(m,\alpha)_L,\tilde{B}=(n,\beta)_L$に対して，

$$\tilde{A}\preceq\tilde{B}\Leftrightarrow x_0|\alpha-\beta|\leq n-m \qquad (1).$$

また，２つのLファジイ数$\tilde{A}=(m,\alpha)_L,\tilde{B}=(n,\beta)_L$の和は$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(m+n,\alpha+\beta)_L$で与えられる．

3．ファジイスケジューリング問題

他のファジイ化問題でもそうであるが，何をファジイ化する，もっと言えば，ファジイモデルの定式化の仕方が難しい．スケジューリングでは，処理時間，納期，最早開始可能時間，先行関係のファジイ化が考えられている．まず、スケジューリング問題の構成要素を説明する．仕事とは，処理を必要とする対象を指す．機械またはプロセッサーとは，仕事を処理する道具，ときには，作業者をも指す．スケジューリングでも，他の場合と同様，機械が１台と複数台では，状況が異なる（もっと言えば，複数台も２台と３台以上の場合に色々な理由で分けられる．）複数台の場合は，機械が並列型とショップ型に分かれる．並列型は同じ機能の機械が複数台ある場合である．各仕事は基本的にどれか

の機械で処理を完了すればよい場合である．等価並列型は全く同一の機械が並んでいる場合で，通常単に並列型というときはこの場合を指す．一様並列型とは，新鋭機と旧型機の様に基本的に処理スピードの異なる機械が並んでいる場合で，処理時間が，ある機械の処理時間（標準処理時間）を基に機械毎にその比が決まっている場合である．並列型で一番一般的なのは非一様型で，各機械は仕事毎に処理時間が決まり，その比が必ずしも一定でない場合である．一方，ショップ型では，各機械の機能が必ずしも同一ではなく，各仕事は並列型と違って，幾つかの機械での処理を受ける必要がある．この意味で，各仕事は，処理を受けるべき機械に対応する作業に分ける事ができる．フローショップ型とは，流れ作業を意味し，どの仕事もかけられる機械の順番が同一で，全ての機械での処理が必要である．オープンショップ型は全ての機械での処理は必要であるが，そのかけられる順番は自由である場合である．ジョブショップ型は、ショップ型の中で一番一般的な場合で、仕事毎にかけられる機械及びその順序がきまっていて、それが必ずしも同一でない場合である．時には、ある機械には、複数回かけられる必要がある一方で、ある機械での処理がいらない場合もある．以上の分類は既にお分かりと思うが，仕事の型の分類とも考えられる．仕事は、作業に分かれている場合（ショップ型）もあれば、そうでない場合（並列型）もあり，処理時間、納期、最早開始可能時間、先行関係、分割処理可能かなどの構成要因がある．処理時間は、作業に分かれているときは、各作業毎に処理時間が決まっていて，この場合これらの和を通常，仕事の処理時間という．納期d_jは、その時迄に仕事の処理が完了すべき時刻である．最早開始可能時間r_jは、逆に、それ以後でしか処理を開始できない時刻である．先行関係は仕事間の処理順序の制約である．分割処理可能とは、仕事を途中で中断して後でまた中断した部分から処理を開始できることを言う．通常は、特に断らない限り，分割処理はできない（これを非分割ということがある）と仮定している．

最後にスケジュールの評価であるが、通常、以下の基準を用いることが多い．各仕事J_jの完了時間をC_jで示すと、最大完了時間は$C\max = \max\{C_j | j = 1,\dots,n\}$で定義されるが、一番よく使われるのはこのＣｍａｘを最小にするスケジュールを求める事である．２番目によく使われるのは、最大納期ずれの最小化である．各仕事J_jの納期ずれを$L_j = C_j - d_j$　で定義するが、最大納期ずれ$L\max = \max\{L_j | j = 1,\dots,n\}$と定義する．次に，各ファジイ概念化を幾つか代表的なファジイスケジューリング問題とともに説明する．

３．１．一機械ファジイスケジューリング問題

１台の機械とそれによって処理されるべきｎ個の仕事$J_1, J_2, \cdots, J_n$がある．機械が１機械の場合は、最早開始可能時間が異なっていない限り、どのスケジュールでも最大完了時間は、すべての仕事の処理時間の和として一定となる．従って、このときは納期が問題となる．通常の最大納期ずれ最小化問題では、仕事をその納期の早い順に処理するスケジュールが最適スケジュールとなる．この様なスケジュール法をＥＤＤルールという．まず，ファジイ先行関係(μ_{ij})、通常納期d_j、通常処理時間p_jの場合を考える．ファジイ先行関係であるが、これは通常の先行関係である、”仕事J_jの処理は仕事J_iの処理が完了しないと始められない”（このとき、J_iはJ_jに先行すると言い、$J_i < J_j$で示す）という様な技術的順序のファジイ概念化であり、ファジイ関係の特別な場合である．ファジイ先行関係$\tilde{R}$は満足度を表すメンバーシップ関数μ_{ij}で表され、J_iがJ_jに先行するときの満足度を示している．$\mu_{ij} = 1$, $\mu_{ji} = 0$は、通常のJ_iがJ_jに先行する先行関係を示し、$\mu_{ij} = \mu_{ji} = 1$はJ_iとJ_jが独立、すなわち、どちらが先行してもよいことを示す．また、ここでは、$\mu_{ij} = \alpha\ (0 \le \alpha < 1)$のとき、$\mu_{ji} = 1$と仮定する．スケジュールπのとき最大納期ずれ$L\max$を$L^{\pi}_{\max}$で、また$\pi(i)$でπの下でｉ番目に処

理される仕事番号を示すと、先行関係における最小満足度は
$\mu^{\pi}_{\min}=\min\{\mu_{\pi(i)\pi(j)}|i<j,i,j=1,2,\ldots,n\}$で示される．このとき、次の問題Pを考える．

P: $L^{\pi}_{\max}\rightarrow\min$, $\mu^{\pi}_{\min}\rightarrow\max$, *subject to* $\pi\in\Pi$.

ここで、Πは実行可能なスケジュールの集合である．一般に、２つの判定基準、最大納期ずれを最小にし、かつ同時に先行関係の満足度の最小値を最大にするスケジュールは存在しないので、以下で定義する非劣スケジュールを求める．（非劣スケジュール）まず、各スケジュールπに対して、$\nu^{\pi}=(L^{\pi}_{\max},\mu^{\pi}_{\min})$としてスケジュールベクトルを定義する．スケジュールπ_1がスケジュールπ_2に優越するとは、対応するスケジュールベクトル$\nu^{\pi_1}=(\nu^{\pi_1}_1,\nu^{\pi_1}_2)$が$\nu^{\pi_2}=(\nu^{\pi_2}_1,\nu^{\pi_2}_2)$に優越する，すなわち，$\nu^{\pi_1}_1\leq\nu^{\pi_2}_1$, $\nu^{\pi_1}_2\geq\nu^{\pi_2}_2$, $\nu^{\pi_1}\neq\nu^{\pi_2}$が成り立つ事を言う．スケジュール$\pi$が非劣スケジュールとは$\pi$に優越するスケジュールがない事を言う．■

ここで、通常の先行関係の下での一機械Ｌｍａｘ最小化問題の解法([LAM])を与えておく．
（一機械Ｌｍａｘ最小化問題の解法）各仕事J_iに対してJ_iが先行する仕事、すなわち、J_iの後続の仕事の集合をT_iで示す．次に，各仕事J_iに対して、修正納期d'_iを$d'_i=\min\{d_i,\min\{d_j|J_j\in T_i\}\}$の様に定義する．修正納期$d'_i$について、元の先行関係に注意しながらＥＤＤルールにより、スケジュールを決めれば、それがＬｍａｘを最小にするスケジュールとなる．■

以上の準備の下にＰの非劣スケジュールを求めるアルゴリズムを与える（[ISTA1]）．そのために、さらに幾らかの準備及び定義をする．まず、$0<\mu_{ij}<1$なるμ_{ij}をソートする．その結果が$\mu^0\underline{\underline{\Delta}}1>\mu^1>\mu^2>\cdots>\mu^k>0$　　となったとする．ここで、ｋは条件を満たす異なるμ_{ij}の数である．このμ^{ℓ}を基に$PG^0(V,A^0)=(V,A^0)$, $(V=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$, $A^0=\{(J_i,J_j)|\mu_{ij}=\mu^0,\mu_{ji}\neq\mu^0\})$
$\overline{A}^{\ell}\underline{\underline{\Delta}}\{(J_i,J_j)|\mu_{ij}=\mu^0,\ \mu_{ji}=\mu^{\ell}\}$, $\ell=1,2,\ldots,k$　とする．また、DV：アルゴリズム中での非劣スケジュールベクトルの現在の集合　DS：アルゴリズム中でのDVに対応する非劣スケジュールの現在の集合　　とする．　　　［Ｐを解くためのアルゴリズム］

ステップ１：先行関係$PG^0(V,A^0)=(V,A^0)$の下で一機械Ｌｍａｘ最小化問題を解き，最小のＬｍａｘを$L^0_{\max}$、最適スケジュールをπ^0とする．
$DV\leftarrow\{(L^0_{\max},1)\}$, $DS\leftarrow\{\pi^0\}$, $\ell=1$　としてステップ２へ行け．

ステップ２：$A^{\ell}=A^{\ell-1}-\overline{A}^{\ell}$として、先行関係$PG^{\ell}(V,A^{\ell})$を作り、この下で、一機械Ｌｍａｘ最小化問題を解き、最適値$L^{\ell}_{\max}$，最適スケジュールπ^{ℓ}を見いだす．
$\nu^{\ell}=(L^{\ell}_{\max},\mu^{\ell}_{\min})$　$(\mu^{\ell}_{\min}=\min\{\mu_{\pi^{\ell}(i)\pi^{\ell}(j)}|i<j,i,j=1,\ldots,n\})$が
DVのあるベクトルによって優越されているか、既にDVに含まれているときはステップ３へ直ちに行け．そうでなければ、$DV\leftarrow DV\cup\{\nu^{\ell}\}$, $DS\leftarrow DS\cup\{\pi^{\ell}\}$としてステップ３へ行け．

ステップ３：$\ell\leftarrow\ell+1$とする．$\ell=k+1$なら、現在のDSをＰの非劣スケジュールとして終了せよ．そうでなければ、ステップ２へ戻れ．

ファジイ先行関係の他にファジイ納期，ファジイ最早開始可能時間両方を持つスケジューリング問題([ISHA])等も考えられている．さらに，圧縮可能という意味でファジイ処理時間，ファジイ先行関係，通常納期をもった３目的の問題もある（[TAIS1]）．この場合，仕事J_jの標準の処理時間$\overline{P}_j$と最大圧縮可能時間m_jから，処理時間p_jに関する満足度$\mu_{CP_j}(p_j)$が以下のように与えられる．

$$\mu_{CP_j}(p_j)=\begin{cases} 0 & (p_j \le \overline{P}_j - m_j) \\ \dfrac{p_j-(\overline{P}_j-m_j)}{m_j} & (\overline{P}_j - m_j \le p_j \le \overline{P}_j) \\ 1 & (p_j \ge \overline{P}_j) \end{cases}.$$

その他，幾つか１機械ファジイスケジューリング問題があるが紙面の都合で省略.

3．2．二機械ファジイスケジューリング問題

ファジイ二機械多目的スケジューリング問題として，ファジイ処理開始可能時間とファジイ納期（まとめて，ファジイ実行可能時間という）をもち，ファジイ先行関係を考慮した，多目的スケジューリング問題のみ紹介する．解法はファジイでない通常の先行関係つきの２つの二機械問題［FKN］，［GAJO］の解法をベースに，上記の［ISTA1］の方法を拡張したものである（［石井１］．）

（問題の定式化）以下の様な等価並列２機械問題を考える．

（１）二台の機械とそのどちらでも一方で処理されるべきn個の仕事$J_1, J_2, \cdots, J_n$がある．

（２）各仕事J_iは単位処理時間をもち，ファジイ開始可能時間$\tilde{s}_i$及びファジイ納期$\tilde{d}_i$を持つ．$\tilde{s}_i$はその仕事の処理開始時間s_i（非負整数と仮定）に関する満足度を表す次のようなメンバーシップ関数を持つ．$\mu_{\tilde{s}_i}(s_i)=\begin{cases} 0 & (s_i \le r_i) \\ m_i(s_i) & (r_i \le s_i \le r_i+e_i) \\ 1 & (s_i \ge r_i+e_i) \end{cases}$（但し，$s_i$整数とし，$m_i(s_i)$は単調非減少で０と１の間の値をとる）．同様にして$\tilde{d}_i$はその仕事の完了時間$C_i$に関する満足度を表す次のようなメンバーシップ関数をもつ．$\mu_{\tilde{d}_i}(C_i)=\begin{cases} 1 & (C_i \le d_i) \\ k_i(C_i) & (d_i \le C_i \le d_i+f_i) \\ 0 & (C_i \ge d_i+f_i) \end{cases}$（但し，$C_i$整数とし，$k_i(C_i)$は単調非増加とし，０と１の間の値をとる）．また、$r_i, e_i, f_i, d_i \ge 0$, $r_i+e_i \le d_i$ で各々整数とする．

（３）各々２つの仕事J_i, J_j間にファジイ先行関係が定義されている．（４）スケジュールπのもとでの仕事J_iの処理開始時間をs_i^π，完了時間をC_i^πで示すと，πでの処理開始時間に関する最小の満足度$\mu_{r\min}^\pi$は$\mu_{r\min}^\pi=\min\{\mu_{\tilde{s}_i}(s_i^\pi) | i=1,2,\ldots,n\}$で与えられる．また，完了時間に関する満足度の最小値$\mu_{d\min}^\pi$は$\mu_{d\min}^\pi=\min\{\mu_{\tilde{d}_i}(C_i^\pi) | i=1,2\ldots,n\}$で与えられる．従って，仕事の実行時間に関する満足度μ_1^πは$\mu_1^\pi=\min\{\mu_{r\min}^\pi, \mu_{d\min}^\pi\}$と定義する．一方，仕事の処理順序に関する満足度の最小値μ_2^πは$\mu_2^\pi=\min\{\mu_{ij} | C_i^\pi < C_j^\pi\}$で与えられる．（５）上記の設定のもとで，次の問題Qを考える．

Q：$\mu_1^\pi \to \max$, $\mu_2^\pi \to \max$, *subject to* $\pi \in \Pi$

ここでΠは実行可能なスケジュール全体の集合である．

二機械の他のファジイスケジューリングモデルとしては，ファジイ納期を持つオープンショップ問題［ISTA2］，ファジイ処理時間をもつフローショップ問題［MAIS］等がある．

3．3．その他のファジイスケジューリング問題

ファジイ納期m並列機械問題（［ISTA２］）などがあるが，一般には，解法が難しい．資源制約問題のファジイ化など，評価基準も含めていろいろファジイ版が考えられるが，やはり，現実に近づき，かつ融通性のあるモデルが必要である．スケジューリング問題は紙面の都合でこの辺りに留めたい．

４．ファジイネットワーク問題

ネットワーク上の最適化問題のファジイ版を考える．既に述べたように、ファジイ組合せ最適化

は、ネットワーク・フロー問題において、S.Chanas等（([CHK1-3])がファジイ容量を考えたことに始まると考えられる．まず，ファジイ・シェアリング問題とファジイ輸送問題について紹介する．また、スパニングツリー問題に於いて線のコストが必然性及び可能性分布に従って不確実であるとして、ファジイ・スパニングツリー問題を考える．最後にNagata Fukukawa([FUK])によるファジイ最短路問題を紹介する．

4．1．ファジイ輸送問題

経済がうまく機能するには、物流、特に、物の輸送手段や方法が重要である事が、最近わかってきた．物が、浪費されている一方で、物が欠乏している状況は、国際的には勿論、我が国に限ってもよくある．輸送問題はまさしく、そのためのものであり、どの供給地から、どの需要地へどれぐらい物を送れば、最適であるかを決定する問題である．従来は、需要量は供給量より少ないか等しいという仮定をしており、解法もそれに沿っていた．しかし、実際には、その逆も多く、むしろ、供給量が需要量より少ない場合こそ、どうするかが重要である．

供給側を表すソース点ｓの集合Ｓ，需要側を表すシンク点ｔの集合Ｔからなる完全２部グラフ、すなわち、全てのソース点ｓと全てのシンク点ｔの間にアーク（s, t）がある、便宜上、アーク（s, t）を$a_{st}, s\in S, t\in T$で示す場合もある．また、供給点の数 ｜Ｓ｜＝ｍ、需要点の数｜Ｔ｜＝ｎとする．各アークa_{st}には、流量１単位にかかるコストC_{st}が与えられていて、総輸送費用の上限値を$\overline{C}$とする．ソース点ｓからのトータルの出ていく流量をf_s、シンク点ｔに入ってくるトータルの流量をf^tとする．また、アークa_{st}を通して送られる流量をf_{st}とする．このとき、通常の輸送問題は、f_sの上限、f^tの下限が決まっていて、それ等をa_s, d_tとすると、このとき、$\sum_s a_s \ge \sum_t d_t$でなければ解は存在しない．しかし、実際にはいつもはこの条件が満たされる訳ではない．そうすると、皆が少しずつ我慢して、やりくりせざるを得ない．すなわち、三方一両損の考えとなる．ソース点については、a_s迄は楽に供給できるが、無理をすればb_s迄ならなんとか供給できる．一方、シンク点の側では、d_t以上欲しいが、c_t迄なら我慢する．このような状況は、以下の様な満足度で考えることができる．

$$\mu_s(f_s)=\begin{cases}1 & (f_s \le a_s)\\ \dfrac{b_s-f_s}{b_s-a_s} & (a_s < f_s < b_s)\\ 0 & (f_s \ge b_s)\end{cases} \qquad \mu^t(f^t)=\begin{cases}1 & (f^t \ge d_t)\\ \dfrac{f^t-c_t}{d_t-c_t} & (c_t < f^t < d_t)\\ 0 & (f^t \le c_t)\end{cases}$$

この様な設定の下で以下の問題Ｐを考える．

$$\mathrm{P}:\max(\min(\mu_s(f_s),\mu^t(f^t)|s\in S,t\in T)) \ \ \textit{subject to} \ \ C=\sum_s\sum_t C_{st}f_{st} \le \overline{C}$$

まず、上記のf_s, f^tを各々需要と供給とする通常の輸送問題を解く．その最小輸送費用が$\overline{C}$を越えないときは、$\min(\mu_s(f_s), \mu^t(f^t)|s\in S,t\in T)=\overline{\alpha}$とし、$\mu_s(f_s)=\mu^t(f^t)=\overline{\alpha}$, $s\in S,t\in T$とすると、需要と供給のバランス式$\sum_s f_s=\sum_t f^t$から$\overline{\alpha}=\dfrac{\sum_{s=1}^{m} b_s-\sum_{t=1}^{n} c_t}{\sum_{t=1}^{n}(d_t-c_t)+\sum_{s=1}^{m}(b_s-a_s)}$と求められ．

$f_s=(1-\overline{\alpha})b_s+\overline{\alpha}a_s$, $f^t=\overline{\alpha}d_t+(1-\overline{\alpha})c_t$, $s\in S, t\in T$ となる． 上記の$\overline{\alpha}$がＰ１の最適値、また、この最小輸送費用を与える輸送パターン(f_{st})が最適解となる．一方、もし、越えていれば、総輸送量を減らし，最小輸送費用が$\overline{C}$を越えないで満足度の最小値が最大となる輸送パターン(f_{st})

が最適解となる．詳しくは[石井2]を見られたい．

４．２．ファジイシェアリング問題

ファジイ輸送問題は、通常の輸送問題のファジイ概念化であるから、供給点と需要点は直接結ばれ、商品などをダイレクトに送れるとしていた．また、供給量にも一応上限を考えた．ここでは、ネットワークにおける配分問題、すなわち、シェアリング問題のファジイ概念化について考える．通常のシェアリング問題はもともとブラウン[BRO]によって考えられ、炭坑スト時の石炭の各需要地への重み付けでの公平な分け前を求める問題が動機であるとしている．すなわち、アーク容量制約のついたネットワーク上で、ある物を供給地に対応する複数個のソース点から、それを必要とする需要地に対応する複数個のシンク点へ、”公平に”配分するには、どのようにこの物を送ればよいかという問題である．各需要地に重みではなく配分量に対する満足度を示すメンバーシップ関数を導入する．そして、配分量に対する満足度の最小値を最大にする配分を求める．これが、ファジイシェアリング問題である．考えるネットワークは、$N=(V,A{:}C)$（Vは点集合、Aはアークの集合、Cはアークの容量である）．すなわち、各アーク$(x,y)\in A$には、容量$C(x,y)$が与えられている．また、点集合Vの構成要素には、ソース点（供給点）とシンク点（需要点）が含まれており、それらの集合を各々$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$、$T=\{t_1,t_2,\cdots,t_\ell\}$で表す．$f(x,y)$をアーク$(x,y)$を通過する流れの量とすると、各$y\in V-S-T$なる途中の点$y$について

$\sum_{x\in V-\{y\}} f(x,y) - \sum_{x\in V-\{y\}} f(y,x)=0$　が成り立つ．ここで、$\sum_{x\in V-\{y\}}$ は$V-\{y\}$なるすべてのxについて和をとることを意味する．xからyへの送れる量については上限$C(x,y)$がついており、容量と呼ばれる．すなわち、$f(x,y)$につてては$0\le f(x,y)\le C(x,y),\ (x,y)\in A$　という容量制約がつく．$f(t_j)$をシンク点t_jに入ってくる総流量とし，以下の満足度関数

$$\mu_{t_j}(f(t_j))=\begin{cases}0 & (f(t_j)\le a_{t_j})\\ \dfrac{f(t_j)-a_{t_j}}{b_{t_j}-a_{t_j}} & (a_{t_j}\le f(t_j)\le b_{t_j})\\ 1 & (f(t_j)\ge b_{t_j})\end{cases}$$

を考え，スーパーソースsとソース点$s_1,s_2,\cdots s_k$を結ぶアーク$(s,s_i),\ i=1,2,\dots,k$を付加する、容量は∞、すなわち容量制限はないとする．このような設定の下で、$\mu_{t_j}(f(t_j))$の最小値を最大にする流通パターンをもとめるのがファジイシェアリング問題である．さらにスーパーシンクt（総購入者）もつけ加え、シンク点$t_1,t_2,\cdots t_\ell$とこのスーパーシンクtを結ぶアーク$(t_j,t),\ j=1,2,\dots,\ell$も付加する．これらのアークの容量は適当に決めるが、この決め方がＦＳＰの解法のポイントである．まず、これらを全てネットワークに付加して拡大ネットワーク$N'(V',A'{:}C')$：

$V'=V\cup\{s,t\},\quad A'=A\cup\{(s,s_i)|i=1,2,\dots,k\}\cup\{(t_j,t)|j=1,2,\dots,\ell\}$を作成する．以上の設定の下で次の様なファジイシェアリング問題ＦＳＰを考える（解法については[TAIS2]参照）．

ＦＳＰ：$Max\ \min\{\mu_{t_j}(f(t_j))|t_j\in T\}$

$$subject\ to\ \sum_{t_j\in T} f(t_j)=v^*\quad \sum_{x\in V'-\{y\}} f(x,y)=\sum_{x\in V'-\{y\}} f(y,x),\ y\in V'-\{s,t\}$$

$$0\le f(x,y)\le C(x,y),\ x\in V'-\{s\},\ y\in V'-\{t\}.$$

ここで、v^*はあらかじめ決められた総輸送量である．[TAIS2]ではさらに各$f(t_j)$がある整数値dの倍数というブロック制約をつけて一般化している．

4．3．ファジイ容量

ここで，ファジイ組み合わせ最適化のオリジンとなったファジイ容量について説明する．上記ファジイシェアリング問題と同じネットワークを仮定する．このとき，f_{ij}をアーク $(i,j)\in A$について

$$\mu_{ij}(f_{ij})=\begin{cases}1 & if\ f_{ij}<c_{ij}\\ \dfrac{\bar{c}_{ij}-f_{ij}}{\bar{c}_{ij}-c_{ij}} & if\ c_{ij}\le f_{ij}\le \bar{c}_{ij}\\ 0 & if\ f_{ij}>\bar{c}_{ij}\end{cases}$$

とする．c_{ij}は通常の容量制約におけるのフローの上限を示すが,$\bar{c}_{ij}$迄はオーバーしてもよく，この意味でフローに関する満足度μ_{ij}をもつファジイ容量である．Chanas等は総輸送量に関する満足度も考えその最小の満足度を最大にするフローパターンを求めている．このとき，通常の最大流問題における最大フロー最小カット定理が拡張できることを示した．詳しくは[CHK1],[CHK2][CHK3]を見られたい．また，我々はこのファジイ容量をファジイシェリング問題に導入したさらに一般化された問題についても考察している([IS])．

4．4．ファジイ・スパニングツリー問題

スパニングツリー問題は通信網の設計などに用いられる連結無向グラフ上のスパニングツリー、すなわち、閉路を含まない極大部分グラフを求める問題である。最小スパニングツリー問題は各線にコストが付随しているとき、選ばれた線のコストの和が最小であるスパニングツリーを求める問題である。ここでは、コストの曖昧性と総和の目標値を考慮したモデルを紹介する。

（様相制約条件計画問題） 確率変数と可能性変数のアナロジーにより、確率計画問題に対応した可能性計画問題が存在し、それに伴って種々の最適化モデルが考えられる。制約条件計画問題の確率最大化モデルに対応する様相制約条件計画問題の様相性最適化モデルとして、特に離散決定変数をもつものの代表として、ファジイスパニングツリー問題をここでは考える。通常の線形計画問題と違って様相最適化モデルでは目的関数に「だいたいf_0以上にしたい」という様なファジイ目標$\tilde{G}$を与え、目的関数値がだいたいとなるf_0以上となる可能性もしくは必然性を最大にする。従って、次の３通りの定式化が考えられる。●可能性測度のみ最大化（可能性測度最大化モデル）●必然性測度のみ最大化（必然性測度最大化モデル）●可能性測度と必然性測度を同時に最大化．ここでは、このうち必然性測度最大化によるファジイスパニングツリー問題を考える。

（必然性測度最大化ファジイスパニングツリー問題） 点集合$V(|V|=n)$、線集合$E(|E|=m)$の無向連結グラフを$G(V,E)$とし、各線e_iにはコストc_i（可能性変数）が付随しているとする。またGに対するスパニングツリー$T=T(V,S)\,(S\subseteq E)$は２値変数のベクトルとして次のように表現される。

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^t$（ここで、^{t}は転置を表す），$x_i=\begin{cases}1\ (e_i\in S)\\ 0\ (e_i\notin S)\end{cases},i=1,2,\ldots,m$

このとき、次の様な０－１整数計画問題ＳＦＰをファジイスパニングツリー問題という。

ＳＦＰ：$Minimize\ \ c^t x\ \ \ subject\ to\ \ x\in F$

ただし、$c=(c_1,c_2,\cdots,c_m)^t$は可能性分布Cで制限される可能性変数ベクトル、Fは$T(V,S)$に対応する０－１ベクトルの集合とし、以下ではF自身をスパニングツリーの集合と同一視する。ＳＦＰを等価な最大化モデルＳＦＰ’として次の様に定式化する。

ＳＦＰ’：$Maximize\ \ -c^t x\ \ \ subject\ to\ \ x\in F.$

さらに、可能性分布Cは次の様なメンバーシップ関数で表されるとする。

$\mu_C(c) = L((c-d)^t U^{-1}(c-d))$ただし、$d = (d_1, d_2, \cdots, d_m)^t$、$U$を$m \times m$の対角正定値行列、$L:[0,+\infty) \to [0,1]$；$L(0)=1$を上半連続非増加関数とする。このとき、目的関数値$y = -c^t x$は次の定理可能性分布$Y$，$\mu_Y(y) = L(\frac{(y+d^t x)^2)}{x^t U x})$に制限される。目的関数値にファジイ目標「だいたい$f_0$以上である」をもうけ必然性測度最大化により定式化すると、次の必然性測度最大化ファジイスパニング問題ＳＦＰＮを得る。ＳＦＰＮ：$Maximize \quad N_Y(G)$

$$subject\ to\ \ y = -c^t x,\ x \in F.$$

ここで、$N_Y(\circ)$は必然性測度で$N_Y(G) = \inf[\max\{(1-\mu_Y(y)), \mu_G(y)\}|y]$である．この問題の効率的解法等については[伊藤]を参照されたい．また，可能性測度最大化についても考察している．

４．５．ファジイ最短路問題

（[FUK]によるファジイ最短路問題）ネットワーク（N，A，T）；$\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$は点の有限集合，A⊂（N×N）＼Dは異なった点間の有効アーク(i,j)の集合（$\mathrm{D} = \{(i,i) | i \in \mathrm{N}\}$）；$\mathrm{T} = \{\tilde{T}_{ij} | (i,j) \in \mathrm{A}\}$：$\tilde{T}_{ij}$は有効アークに付随するファジイ距離とする．このとき，２．３でのファジイ数上の順序の意味で各点からNへの最短経路を求める問題を考えている．詳細は[FUK]参照．

５．おわりに

ファジイ組合せ最適化は上記の他にもっといろいろなモデル化もあり，また，組み合わされるファジイ概念も上記の他様々考えられる．さらに，fuzzy random variableなど確率的概念の導入も応用上重要である．

参考文献

[CHK1]S.Chanas &W. Kołdziejczyk,"Maximum flow in a Network with Fuzzy Arc Capacities" Fuzzy Sets and Systems 8(1982)165-173.[CHK2]____"Real valued flow in a Network with Fuzzy Arc Capacities", Fuzzy Sets and Systems 13 (1984)139-151.[CHK3]_____Integer flows in a Network with Fuzzy Arc Constraints" Networks 16(1986)17-31[FUK]Nagata Fukukawa,"A parametric total order on fuzzy number and a fuzzy shortest route problem," Optimization 30 (1994)367-377.[LAM]E.L.Lawler &J.M.Moore,"A functional equation and its application to resource allocation and sequencing problems," Management Sciences 16(1969)77-84.[ISTA1]H.Ishii & M.Tada,"Single Machine Scheduling Problem with Fuzzy Precedence Relation", European Journal of Operational Research, to appear. [ISHA]H.Ishii &K.K. Harikrishnan,"One Machine Scheduling Problem with Fuzzy Allowable Time Constraint",to be presented in TIMS ＸＸＸⅢ International Meeting 1995.[TAIS1]M.Tada &H.Ishii,"Single Machine Scheduling Problem with Fuzzy precedence and Fuzzy processing time," to be submitted.[FKN]M.Fujii,T.Kasami & K.Ninomiya,"Optimal Sequencing of Two Equivalent Processors," SIAM Journal on Applied Mathematics 17(1971)784-789.[GAJO]M.R.Garey, D.S.Johnson:Scheduling tasks with nonuniform deadlines on two processors", Journal of the ACM 23(1976)461-467. [石井1]石井,"ファジイ実行可能時間をもつ二機械多目的スケジューリング問題,"研究集会「不確実性の下での最適化理論」研究報告集(1995)35-40.[ISTA2]H.Ishii, M.Tada & T.Masuda,"Two scheduling problem with fuzzy duedates," Fuzzy Sets and Systems 46(1992)339-347. [MAIS]T.Masuda & H.Ishii,"Two machine flow shop scheduling problem with fuzzy processing times," APORS 88 (1990)pp.419-423.[石井2]石井, 多田, 西田,"ファジイ輸送問題", 日本ファジイ学会 2巻, 1号 (1990)79-84. [BROW]J.R.Brown,"The Sharing Problem", Operations Research, 27(1979)pp.324-340. [TAIS2]M.Tada, H.Ishii, T.Nishida and T.Masuda,"Fuzzy Sharing Problem", Fuzzy Sets and Systems 33(1989)303-313. [IS]H.Ishii, "Fuzzy integer sharing problem with fuzzy capacity constraint,"to be presented in IFIP Praha 1995.[伊藤]伊藤健, 石井博昭, " 必然性に基づくファジイ・スパニングツリー問題の一解法, " 投稿中.