日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 53, 2010, pp. 56–68

選択科目試験による選抜方法への提案

関谷 和之　静岡大学
山本 芳嗣　筑波大学

(受理 2008 年 6 月 30 日; 再受理 2010 年 5 月 4 日)

和文概要　選択科目を含む入学試験は広く普及した大学入試の 1 つであるが，異なる科目間の入試成績を比較することは一般に難しい．本研究では選択科目間の得点調整を用いない数理モデルを提案し，このモデルが多段決定過程に帰着することを示す．このモデルを大学院入試に適用し，実データを用いた数値実験により，本モデルによる選抜案の性質とその適用可能性を報告する．

キーワード: 数理モデル，大学入試，多段決定過程

1. はじめに

1980 年代，筑波大学の学部である社会工学類の入学試験での個別検査では，社会と数学の選択を許していた．両科目の難易度に差があり，かつ年毎に変化する可能性があると思われていたことから，合理的な入学者選抜方法を求められており，活発な議論 [3] が交わされた．何らかの方法で難易度を推定し，数値化し，それを取り込んで合格者の選抜を行おうとするのが提案された大方の方法であったが，一方，その存在すら不確かな難易度に依存しない方法を作るべきだとの意見もあった．

当時の筑波大学社会工学類の入試の状況は次の通りである．

1. 受験生は共通科目（共通一次試験を含む）に加え，社会と数学の 2 つの選択科目のどちらかを受験する．したがって受験科目によって受験生全体が 2 グループに分かれている．
2. 各受験生 i に対して，その受験生が選択した科目の成績 x_i と共通科目の成績合計 y_i の対からなるデータ (x_i, y_i) が得られている．

受験科目選択を組み込んだ入試制度を採用する大学があり，さらに受験生の専門分野が多岐に渡る大学院では選択制の入試が多く見られる．定期試験でも解答すべき設問を選択する状況（例えば，必須問題と選択問題からなる試験）や，複数の教員が学期途中で独自の試験を実施する状況などが見られる．このような試験制度の下では，設問や科目の難易度の有無やその程度，合格者の決定方法については常に議論されてきている．

このような状況で使われている代表的な方法は等化法と呼ばれる方法であり，我が国では大学入試センターを中心に研究と適用がなされている．前川 [2] によると，等化法のほとんどは「何らかの仮定の下に（中略）平均値・標準偏差（および得点分布）を推定した後に，それらの差異がなくなるように各テストの難易度を調整する方法」([2] P.91) である．例えば，線形等化法，等百分位法，分位点差縮小法などがある（詳細は [2] を参照のこと）．しかし，真弓他 [4] は,「テスト得点の等化（equating）法（中略）は，本質的に同一次元の学力を測定しているテストの間の得点調整のための方法であり，選択科目間の得点調整に適用されるには無理がある」([4] P.14) と述べている．ここで,「同一次元の学力を測定しているテ

スト」として，同一科目の本試験と追試験などが挙げられる．さらに，真弓他は「多面的な学力を測定しようとする試験の得点の場合，それらは相対的なもの，すなわち，せいぜい同一のテストの受験者相互間での上下が比較できるだけであると考えておくのが無難である」([2] P.15) とも述べている．以上の議論を考慮すると，異質の選択科目の成績を対象にしている本研究では等化法などの得点調整方法を用いることは望ましくないと考える．

一方，異なった試験問題を解いた受験生の能力を推定するとともに，個々の問題の難易度を推定する方法として，項目反応理論 [5–7] が知られている．この理論は，受験生の能力の推定よりも，個々の問題の難易度の特性の抽出に重きを置いている．しかも，この理論によって推定された能力（項目反応理論ではこれを特性値という) の高低は，同一の選択科目を受験した学生間でもその総合得点の大小と一致しないことがある．同じ選択科目を取った学生の合否はその総合得点の大小と整合的であるべきとの観点から，項目反応理論を合否決定の場面で用いることは妥当でないと考える．

本研究では，共通科目と選択科目を併用する試験での合否決定問題を取り扱う．選抜対象全体は複数のグループに分割されており，全グループに共通した共通科目得点の軸に加えて，各グループ独自の選択科目得点の軸があるという状況を対象とする．その際，同一の選択科目を受験した受験生の合否はその総合得点の大小と整合的であること，異なった選択科目の成績の相違が選択科目の難易度の相違によるものか，あるいは選択科目を受験した受験生の学力の相違によるものかの判断はできないこと，の 2 点を措定する．この問題を，選抜された対象が満たすべき性質を制約として，選択科目の難易度に依存しない選抜基準を目的関数にして，最適化モデルに定式化する．

本論文の構成は次の通りである．第 2 節で選抜に関する効用関数を 2 種類提示し，それぞれを最適化モデルに定式化する．そして，これらの最適化モデルが多段決定過程に帰着することを第 3，4 節で示す．多段決定過程への帰着は選抜方法に対する具体的な計算手続きを与えるものである．第 5 節では大学院推薦入試データを用いて提案する選抜方法による合否判定を比較検討する．最後に，これらの解析結果と実験結果から結論を述べる．

2. 目的，条件，定式化

本論文では，選択科目数を K と表し，$K \geq 2$ とする．同一選択科目を選んだ受験生集合をグループと呼び，第 k 選択科目を選んだグループを N_k で表す．なお，各グループ N_k は互いに排反，つまり $k \neq h$ であれば $N_k \cap N_h = \emptyset$ とする．また，$N = \bigcup_{k=1}^{K} N_k$ で全受験生の集合を表す．N_k の受験生 i に対して，選択科目 k の成績 x_i と共通科目の成績 y_i の対からなるデータ (x_i, y_i) が得られている．定式化での目的は

試験データ $\{\,(x_i, y_i) \mid i \in N\,\}$ と入学定員 p が与えられたもとで，優秀な受験生を合格者として p 人程度選抜すること

である．入試では合格者全員が入学手続きを行うとは限らないので，それを見越して合格者数を決定することがよく行われている．ここでは，そのような判断の下で入学定員から割増をした合格者数を p とする．以降では，選択科目得点 x_i と共通科目得点 y_i の合計を $z_i := x_i + y_i$ とし，これを総合得点と呼ぶ．また，合格者集合を P と書く．その際，同一グループに属する受験生同士は総合得点 z_i で比較可能であるので，次のグループ内単調性を合格者集合 P の満たすべき条件とする．

条件 2.1 (グループ内単調性)．P は以下の性質を持つ $P_1, \ldots, P_k, \ldots, P_K$ の和集合である．

1. $k = 1, \ldots, K$ について $P_k \subseteq N_k$ である．

2. $k=1,\dots,K$ について $i \in P_k, j \in N_k \setminus P_k$ ならば $z_i > z_j$ が成り立つ.

この条件より，同一のグループに属し，総合得点が同じ受験生は，共に合格となるか，共に不合格とならなければならない．したがって，各グループの受験生をその総合得点の降順に並べ，総合得点が同じ受験生を受験生群としてまとめ，$I_1^k,\dots,I_{n_k}^k$ とする．ここで，n_k はグループ k の受験生群の総数である．つまり，任意の $i,j \in I_l^k$ について $z_i = z_j$ であり，$l' > l$ なら任意の $i \in I_l^k$ と $j \in I_{l'}^k$ について $z_i > z_j$ である．受験生群 I_l^k の共通科目得点 $\{y_i \,|\, i \in I_l^k\}$ の代表値を次のように導入する．

$$y_m(I_l^k) := \min\left\{ y_i \;\middle|\; i \in I_l^k \right\} \tag{2.1}$$

$$y_s(I_l^k) := \sum_{i \in I_l^k} y_i \tag{2.2}$$

それぞれ，受験生群 I_l^k の共通科目の最低点と合計点である．便宜のために $y_m(\emptyset) = \infty$, $y_s(\emptyset) = 0$ としておく．

また合格者数が p に近い値であることの条件は，$|P|$ で合格者数を示すことにすれば，適当に決めた $\Delta \geq 0$ を用いて次のように書ける．

条件 **2.2** (定員充足).

$$p - \Delta \leq |P| \leq p + \Delta$$

次に，集合 $P \subseteq N$ に対して何らかの効用関数を定義し，その最大化による合格者選抜を考える．この効用を，成績データ $\{ (x_i, y_i) \mid i \in N \}$ と集合 $P \subseteq N$ の関数として $f(\mathbf{x},\mathbf{y},P)$ と書くことにする．選択科目間の難易度に相違があるのか，またあったとしてそれが受験生の成績 x_i にどのような影響を与えるかは不透明である．例えば，選択科目 k の難易度を示す値を α^k とすれば，選択科目 k を受験したどの受験生 i に対してもその学力に相当する成績は $x_i + \alpha^k$ であると仮定することも可能であるが，その妥当性は検証困難である．そこで，ここでは上記の (2.1) と (2.2) を利用して，2 つの効用関数を

$$f_m(\mathbf{x},\mathbf{y},P) := \min\{ y_i \mid i \in P \} \tag{2.3}$$

$$f_s(\mathbf{x},\mathbf{y},P) := \sum_{i \in P} y_i \tag{2.4}$$

と定義する．

問題は上記の条件 2.1 と 2.2 の下で効用関数を最大にすることであり，

$$(P) \qquad \left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & f(\mathbf{x},\mathbf{y},P) \\ \text{条件} & P \text{ は条件 2.1 と条件 2.2 を満たす} \end{array}\right.$$

と書ける．また，条件 2.1 から，P_k はグループ k の総合得点上位の受験生群の和集合であるので，以下を満たす L_k がある．

$$P_k = \bigcup_{l=1}^{L_k} I_l^k$$

$\mathbf{L} = (L_1,\dots,L_K)$ とし，効用関数 f の定義を適切に修正すれば，問題 (P) は

$$(P) \qquad \left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & f(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L}) \\ \text{条件} & p - \Delta \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k} \left|I_l^k\right| \leq p + \Delta \end{array}\right.$$

と書き直せる．

3. 合格者の共通科目最低点最大化

前節で述べたように，我々の問題は $\mathbf{L}=(L_1,\ldots,L_K)$ を決める問題 (P) となった．本節では，効用関数として $f_m(\mathbf{x},\mathbf{y},P)$ を用いた最大化問題を考える．

Δ の値が小さい場合には問題 (P) に実行可能解が存在しないことがある．一方，受験生数は $p-\Delta$ を上回っているのが普通であるから，問題 (P) から上限制約 $\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}\left|I_l^k\right|\le p+\Delta$ を取り除いた問題

$$(P')\qquad \left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & f_m(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L})\\ \text{条件} & p-\Delta\le\displaystyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}\left|I_l^k\right|\end{array}\right.$$

には実行可能解があると仮定してよい．さらに，問題 (P') の実行可能解 $\mathbf{L}$ と $\mathbf{L}'$ の間に $\mathbf{L}'\le\mathbf{L}$ の関係があれば $f_m(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L}')\ge f_m(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L})$ となり，大きな $\mathbf{L}$ が問題 (P) の最適解になる可能性は小さな $\mathbf{L}'$ のそれよりも少ない．以上のことから，本節では問題 (P') の最適解導出を小さな $\mathbf{L}=(0,\cdots,0)$ から出発する多段決定過程に定式化する．多段決定過程の詳細については岩本 [1] を参照してほしい．

非負整数ベクトル $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_K)$ と，$\mathbf{t}\ge\mathbf{s}$ なる非負整数ベクトル $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_K)$ に対して $\phi_m(\mathbf{s},\mathbf{t})$ を以下のように定義する．

$$\phi_m(\mathbf{s},\mathbf{t}):=\min_{k=1,\ldots,K}\min\{\,y_m(I_l^k)\mid s_k+1\le l\le t_k\,\}\tag{3.1}$$

ここで，$y_m(I_l^k)$ は (2.1) によって定義されており，$s_k=t_k$ の場合には $\min\{\,y_m(I_l^k)\mid s_k+1\le l\le t_k\,\}=+\infty$ とする．この定義より $\mathbf{s}\le\mathbf{u}\le\mathbf{t}$ について

$$\phi_m(\mathbf{s},\mathbf{t})=\min\{\,\phi_m(\mathbf{s},\mathbf{u}),\,\phi_m(\mathbf{u},\mathbf{t})\,\}$$

となるが，これは後述する性質 3.1 の証明（詳細は付録を参照のこと）で使う．さらに，$\Phi_m(\mathbf{s})$ を

$$\Phi_m(\mathbf{s}):=\max\{\,\phi_m(\mathbf{s},\mathbf{L})\mid\mathbf{L}\ \text{は問題}\ (P')\ \text{の実行可能解}\,\}\tag{3.2}$$

と定義し，$(0,\ldots,0)$ を $\mathbf{0}$ で表すと，問題 (P') は $\Phi_m(\mathbf{0})$ を求める問題となる．これは，上記の $\phi_m(\mathbf{s},\mathbf{t})$ を状態 $\mathbf{s}$ から状態 $\mathbf{t}$ への距離とした場合の最長路問題である．この最長路問題の解は，最初にまず実行可能な $\mathbf{L}$ について $\Phi_m(\mathbf{L})=+\infty$ として，次に最適性の原理から導かれる以下の漸化式を逐次解くことによって計算できる．

$$\Phi_m(\mathbf{s})=\max_{k=1,\ldots,K}\min\left\{\,y_m(I_{s_k+1}^k),\,\Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k))\,\right\}\tag{3.3}$$

ここで，$\mathbf{e}(k)$ は第 k 単位ベクトルを表す．さらにこの漸化式について以下の性質が得られる．

性質 3.1. $k_1,k_2=1,\ldots,K$ について $y_m(I_{s_{k_1}+1}^{k_1})\ge y_m(I_{s_{k_2}+1}^{k_2})$ ならば，

$$\min\left\{\,y_m(I_{s_{k_1}+1}^{k_1}),\,\Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1))\,\right\}\ge\min\left\{\,y_m(I_{s_{k_2}+1}^{k_2}),\,\Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2))\,\right\}$$

が成り立つ．

この性質によって k^* を

$$y_m(I^{k^*}_{s_{k^*}+1}) = \max_{k=1,\ldots,K} y_m(I^k_{s_k+1}) \tag{3.4}$$

とすると漸化式 (3.3) は

$$\Phi_m(\mathbf{s}) = \min\left\{ y_m(I^{k^*}_{s_{k^*}+1}),\ \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k^*)) \right\} \tag{3.5}$$

と簡略化される．つまり，状態 $\mathbf{s}$ で最大の $y_m(I^k_{s_k+1})$ を持つグループ k^* から受験生群 $I^{k^*}_{s_{k^*}+1}$ を合格にすればよい．これによって状態 $\mathbf{s}$ は状態 $\mathbf{s}+\mathbf{e}(k^*)$ に推移する．$y_m(I^k_{s_k+1})$ を最大にするグループが複数ある場合には，その全てについて受験生群 $I^k_{s_k+1}$ を合格にしてもよく，状態推移はそれに応じて修正すればよい．以上をまとめて得られる計算手順を次に示す．計算終了時点での $\mathbf{s}$ が最適な解の 1 つを与える．

Step 0: $\mathbf{s} := \mathbf{0}$ とする．

Step 1: $K^* := \mathrm{argmax}_{k=1,\ldots,K}\, y_m(I^k_{s_k+1})$ とする．

Step 2: $\mathbf{s} := \mathbf{s} + \sum_{k\in K^*} \mathbf{e}(k)$ とする．

Step 3: $\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{s_k} |I^k_l| < p - \Delta$ なら Step 1 に戻る．そうでなければ終了．

なお，この計算手順で与えられる最適解は上限制約を満たすとは限らない．その場合は，Δ を少し大きく取り直して，最適解を再計算することとする．

4. 合格者の共通科目合計点最大化

本節では，効用関数が (2.4) の $f_s(\mathbf{x},\mathbf{y},P)$ である場合を考える．この場合も小さな Δ については問題 (P) に実行可能解がないことがある．一方，問題 (P) から下限制約 $p - \Delta \leq \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k} \left|I^k_l\right|$ を取り除いた問題

$$(P'') \quad \left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & f_s(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L}) \\ \text{条件} & \displaystyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k} \left|I^k_l\right| \leq p + \Delta \end{array}\right.$$

には自明な実行可能解がある．問題 (P'') の実行可能解 $\mathbf{L}$ と $\mathbf{L}'$ の間に $\mathbf{L}' \leq \mathbf{L}$ の関係があれば $f_s(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L}') \leq f_s(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{L})$ となり，小さな $\mathbf{L}'$ が問題 (P) の最適解になる可能性は大きな $\mathbf{L}$ よりも少ない．よって，本節では下限制約のない問題 (P'') の最適解の導出を大きな $\mathbf{L} = (n_1,\cdots,n_K)$ から出発する多段決定過程に定式化する．

$\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$ なる非負整数ベクトルの対 $\mathbf{s}$，$\mathbf{t}$ に対して $\phi_s(\mathbf{s},\mathbf{t})$ を

$$\phi_s(\mathbf{s},\mathbf{t}) := \sum_{k=1,\ldots,K}\ \sum_{s_k+1\leq l\leq t_k} y_s(I^k_l) \tag{4.1}$$

と定義する．ここで，$y_s(I^k_l)$ は (2.2) により定義されており，$s_k = t_k$ の場合には $\sum_{s_k+1\leq l\leq t_k} y_s(I^k_l) = 0$ とする．$\Phi_s(\mathbf{s})$ を

$$\Phi_s(\mathbf{s}) := \begin{cases} \max\{\, \phi_s(\mathbf{s},\mathbf{L}) \mid \mathbf{L}\ \text{は問題}\ (P)\ \text{の実行可能解} \,\} & \mathbf{L} \geq \mathbf{s}\ \text{なる実行可能解}\ \mathbf{L}\ \text{がある場合} \\ -\infty & \mathbf{L} \geq \mathbf{s}\ \text{なる実行可能解}\ \mathbf{L}\ \text{がない場合} \end{cases} \tag{4.2}$$

と定義する．問題 (P'') は $\Phi_s(\mathbf{0})$ を求める問題，つまり $\phi_s(\mathbf{s},\mathbf{t})$ を距離とする最長路問題となる．最適性の原理から導かれる漸化式は

$$\Phi_s(\mathbf{s}) = \max_{k=1,\ldots,K} y_s(I^k_{s_k+1}) + \Phi_s(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k)) \tag{4.3}$$

となる．実行可能な $\mathbf{L}$ で，$\mathbf{L}' \geq \mathbf{L}$ かつ $\mathbf{L}' \neq \mathbf{L}$ なる実行可能な $\mathbf{L}'$ が存在しないときこの $\mathbf{L}$ を極大実行可能解と呼ぶことにする．Φ_s の定義より極大実行可能解 $\mathbf{L}$ について $\Phi_s(\mathbf{L}) = 0$ となることに注意して欲しい．このような $\mathbf{L}$ に対して $\Phi_s(\mathbf{L}) = 0$ にすることから始めて，上記の漸化式を解けば問題 (P'') を解くことができる．しかし，極大実行可能解を前もって列挙する必要はない．$\mathbf{s}$ の実行可能性の制約は

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{s_k}\left|I^k_l\right| \leq p + \Delta \tag{4.4}$$

であるから，どの実行可能解よりも大きな $\mathbf{s}$ を適当に選んで，そこから計算を始めて

$$\Phi_s(\mathbf{s}) = \begin{cases} -\infty & \mathbf{s}\text{が}(4.4)\text{を満たさない場合} \\ 0 & \mathbf{s}\text{が極大実行可能解である場合} \\ \max\limits_{k=1,\ldots,K} y_s(I^k_{s_k+1}) + \Phi_s(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k)) & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{4.5}$$

とすればよい．なお，式 (4.5) で与えられる最適解は下限制約を満たすとは限らない．その場合は，Δ を少し大きく取り直して，最適解を再計算することとする．

5. 数値実験:大学院推薦入試への適用

5.1. 状況説明

ここでは特定の学科からの推薦制度がある大学院推薦入試を対象にする．この学科で提供されている科目は，教養科目，専門必修科目と専門選択科目に分類される．以降，専門必修科目を必修科目と呼び，専門選択科目を選択科目と呼ぶことにする．対象の学科はA，B，Cの3コースからなり，3，4年生は全員いずれかのコースに所属している．各コースはそのコースに所属する学生が履修すべき選択科目を指定しており，これはコース指定科目と呼ばれる．コース指定科目はコース間で重複があり，また，提供されているコース指定科目の総単位数はコース間で異なる．

4年次進級条件として，コース指定科目，必修科目，教養科目のそれぞれについて規定された単位数だけ取得することが課されている．この規定単位数はいずれのコースでも同数である．進級後の4年生は所属するコースのいずれかの研究室に配属されるが，その際，所属コースの指定科目の成績を3倍した値にそれ以外の科目の成績を加え合わせることによって学生の総合得点を算出し，総合得点の高い学生の配属希望が優先されている．

研究室配属では，コースをまたいで学生の成績を比較する必要が無いため，上記の総合得点を用いて比較することは妥当であると考えられる．一方，推薦入試の定員はコースごとに設定されていないため，推薦入試の合否判定では異なるコースの学生の成績を比較する必要がある．このとき，上記の総合得点により順位付けすることは，コース指定科目がコース毎に異なるため，説得力がある方法とは言えない．そこで，個々の学生 i についてコース指定科目を選択科目と考え，その成績を3倍して x_i とし，それ以外の科目を共通科目と考え，その成績を y_i とする．第5.2節では，序論で示した2つの措定に即して，これまで議論した

表 1: 4 年生のコース指定科目の得点，共通得点，総合得点 (x_i, y_i, z_i)

コース A				コース B				コース C			
ID	x_i	y_i	z_i	ID	x_i	y_i	z_i	ID	x_i	y_i	z_i
a1	559.5	407	966.5	b1	489	460	949	c1	505.5	419	924.5
a2	393	420	813	b2	469.5	427	896.5	c2	469.5	388	857.5
a3	439.5	360	799.5	b3	493.5	354	847.5	c3	426	378	804
a4	378	392	770	b4	412.5	372	784.5	c4	414	376	790
a5	382.5	377	759.5	b5	396	388	784	c5	408	374	782
a6	396	358	754	b6	406.5	374	780.5	c6	391.5	375	766.5
a7	348	346	694	b7	372	364	736	c7	367.5	390	757.5
a8	307.5	382	689.5	b8	291	346	637	c8	330	401	731
a9	354	334	688	b9	352.5	258	610.5	c9	316.5	398	714.5
a10	313.5	367	680.5	b10	273	301	574	c10	324	377	701
a11	282	385	667	b11	249	320	569	c11	340.5	360	700.5
a12	343.5	316	659.5	b12	226.5	284	510.5	c12	316.5	383	699.5
a13	310.5	349	659.5					c13	327	370	697
a14	300	353	653					c14	327	370	697
a15	309	295	604					c15	318	346	664
a16	307.5	288	595.5					c16	315	330	645
a17	294	298	592					c17	301.5	310	611.5
a18	265.5	304	569.5					c18	331.5	276	607.5
a19	250.5	297	547.5					c19	265.5	305	570.5
								c20	288	270	558
								c21	225	284	509
								c22	222	266	488

選抜方法を適用し，合否結果を報告する．第 5.3 節では，異なる選択科目得点が比較可能であることを前提にした現場で従来行われている選抜法による合否結果を報告し，その問題点を指摘する．

5.2. データと分析結果

4 年生全員の 53 名が推薦入試に志願したと仮定して分析を行った．内訳はコース A の 4 年生が 19 名，コース B の 4 年生が 12 名，コース C の 4 年生が 22 名である．総合得点 z_i の高い順に各学生の全得点を表 1 に与える．なお，a12 と a13 では共通得点は異なるが，総合得点が同一である．c13 と c14 は共通得点とともに総合得点も一致している．

合格者定員 p を実際の定員に近い 27 名として，表 1 のデータから合格者の共通科目最低点最大化と共通科目合計点最大化により合格判定をした．いずれの問題でも $\Delta = 0$ に設定して最適解を得ることができた．各コースでの合格者数を表 2 に与える．

合格者の共通科目最低点最大化の最適値は合格者中の共通得点の最低点であり，b3 の共通得点である 354 であった．この最適値 354 を達成する合格者案は $\mathcal{S}_{\min} = \{$a1,$\cdots$,a6, b1,$\cdots$,b7,c1,$\cdots$,c14$\}$ である．コース A での最下位合格者 a6 の次点者は a7 であり，コース B での次点者は b8 であり，コース C での次点者は c15 である．どのコースの次点者の共通

表 2: 定員 27 名での 3 コースの合格者数

合格者案	コース A	コース B	コース C	総合格者数
最低点最大化	最適値=354			
$\mathcal{S}_{\min}$	6	7	14	27
合計点最大化	最適値=10412			
$\mathcal{S}_{\mathrm{sum}}$	6	7	14	27

表 3: 定員 22 名での 3 コースの合格者数

合格者案	コース A	コース B	コース C	総合格者数
最低点最大化	最適値=358			
$\mathcal{S}^1_{\min}$	6	2	14	22
合計点最大化	最適値=8576			
$\mathcal{S}^1_{\mathrm{sum}}$	5	5	12	22

得点も 346 であった．これにより，どのコースもこれ以上合格者を増加させると合格者の共通科目最低点は 346 になり，最適値 354 を改悪してしまう．つまり，合格者の共通科目最低点最大化の最適解は $\mathcal{S}_{\min}$ だけである．

合格者の共通科目合計点最大化の最適解は表 2 に示した $\mathcal{S}_{\mathrm{sum}}$ である．原点から極大実行可能解までの距離全てを数値計算することにより，この最適解 $\mathcal{S}_{\mathrm{sum}}$ が一意であることを確認した．この例では合格者の共通科目合計点最大化の最適解 $\mathcal{S}_{\mathrm{sum}}$ は合格者の共通科目最低点最大化を達成し，その逆も成立する．つまり，合格者案 $\{$a1,$\cdots$,a6,b1,$\cdots$,b7,c1,$\cdots$,c14$\}$ は共通科目最低点最大化と共通科目合計点最大化の 2 種類の観点で望ましい唯一つのものであった．

5.3. 定員変更による分析と実用的な合否判定法との比較

2 つの最大化モデルがともに一意な最適解を持ち，それらが一致することは偶然の結果である．例えば，合格定員を 27 名から 28 名に変えた場合には，a7，b8，c15 の共通得点が同点であることから，$\Delta = 0$ での 2 つの最大化モデルそれぞれは共通の 3 種類の最適解 $\{$a1,$\cdots$,a7, b1,$\cdots$,b7, c1,$\cdots$,c14$\}$，$\{$a1,$\cdots$,a6, b1,$\cdots$,b8, c1,$\cdots$,c14$\}$，$\{$a1,$\cdots$,a6, b1,$\cdots$,b7, c1,$\cdots$,c15$\}$ を持つ．さらに，合格定員を 22 名とした場合の 2 つの最大化モデルから得た合格者案を表 3 に与える．共通科目最低点最大化の最適解は $\mathcal{S}^1_{\min} = \{$a1,$\cdots$,a6,b1,b2,c1,$\cdots$,c14$\}$，共通科目合計点最大化の最適解は $\mathcal{S}^1_{\mathrm{sum}} = \{$a1,$\cdots$,a5,b1,$\cdots$,b5,c1,$\cdots$, c12$\}$ であり，いずれも一意であった．このように，2 つの最大化による合格者案は相異なる．

研究室配属ではコース指定科目の成績を重視するため，表 1 の x_i はコース指定科目の成績を 3 倍して得られており，y_i はそれ以外の科目の成績そのものである．一方，本学科で従来行われていた推薦入試の選抜方法では，コース指定科目の成績重視の方針を採用していない．具体的には，x_i に代えて $x'_i := x_i/3$ とし，$z'_i = x'_i + y_i$ を求め，z'_i を用いて全学生の順位を付け，定員数までの上位学生を選抜している．つまり，従来行われていた推薦入試の選抜方法は「コース指定科目の成績には難易度の差がなく，異なるコース指定科目の成績は比較可能である」という前提に立ち，その前提は本論文の措定と異なる．表 4 に z'_i とそれに

表 4: 換算値 z'_i と全体順位

全体順位	ID	z'_i	コース内順位 A	B	C	全体順位	ID	z'_i	コース内順位 A	B	C
1	b1	623		1		29	c11	473.5			14
2	a1	593.5	1			30	a10	471.5	9		
3	c1	587.5			1	31	a7	462	10		
4	b2	583.5		2		32	a14	453	11		
5	a2	551	2			33	a13	452.5	12		
6	c2	544.5			2	34	a9	452	13		
7	b5	520		3		34	c15	452			15
7	c3	520			3	36	b8	443		8	
9	b3	518.5		4		37	c16	435			16
10	a4	518	3			38	a12	430.5	14		
11	c4	514			4	39	c17	410.5			17
12	c7	512.5			5	40	b11	403		9	
13	c8	511			6	41	a15	398	15		
14	c5	510			7	42	a17	396	16		
15	b4	509.5		5		43	c19	393.5			18
15	b6	509.5		6		44	a18	392.5	17		
17	a3	506.5	4			45	b10	392		10	
18	c6	505.5			8	46	a16	390.5	18		
19	a5	504.5	5			47	c18	386.5			19
20	c9	503.5			9	48	a19	380.5	19		
21	a6	490	6			49	b9	375.5		11	
22	c12	488.5			10	50	c20	366			20
23	b7	488		7		51	b12	359.5		12	
24	c10	485			11	52	c21	359			21
25	a8	484.5	7			53	c22	340			22
26	a11	479	8								
26	c13	479			12						
26	c14	479			12						

よる順位を与える．

z_i と z'_i の違いから，当然コース内順位にも変動がある．例えば，b5 は z_i でのコース内順位は 5 位であるが，z'_i でのコース内順位は 3 位である．コース指定科目とその他の科目を区別せずに良い成績を修めた学生が，コース指定科目に集中して良い成績を修めた学生より z'_i によるコース内順位は高くなっている．

z'_i に基づいて 27 名を選抜すると，順位 26 位に 3 名の学生 a11，c13，c14 がいるため，定員超過 1 名の 28 名が合格となる．その内分けは以下のコース A の 8 名，コース B の 7 名，コース C の 13 名である．この合格者案は定員を 28 名，$\Delta = 0$ としたときの 2 つの最大化問題の

いずれの最適解とも一致しない．

$$\text{a1,a2,a3,a4,a5,a6,a8,a11} \tag{5.1}$$

$$\text{b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7} \tag{5.2}$$

$$\text{c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c12,c13,c14} \tag{5.3}$$

この合格者案で，a7，a9，a10，それに c11 が不合格になっていることから分かるように，コースA，Cでは，z_i でのコース内順位に反する選抜を含んでいる．

推薦入試に先立って行われる4月初旬の研究室配属時には z_i が公開されて，学生が自分のコース内順位を知ることが可能である．そのため，学生には z_i に基づくコース内順位に反する (5.1) や (5.3) の決定が研究室配属と矛盾していると映る可能性がある．さらに大学院での研究室配属でもコース指定科目の成績が重視されている．よって，コース指定科目の成績を重視しない z_i' による選抜よりも，提案方法による選抜の方が一貫性の点で優れていると思われる．ただし，いずれの最大化問題も複数の最適解を持つ可能性があり，そのような場合に1つの解を選ぶ合理的な方法は実用上重要であり，今後の課題である．

最後に，得点調整における合否逆転の危険性を指摘する．先に述べたように，x_i' から x_i への変換に対して，当該科目での順位は不変であるが，x_i' での得点差が x_i での得点差の 1/3 だけ変化するので，総合得点での順位が変化する受験生が発生する．実際，合否判定は受験生（a7，a9，a10，c11）に対して逆転した．同様に，選択科目の難易度による得点調整もまた，x_i での得点差に変化を与える．そのため，選択科目の難易度による得点調整が合否逆転を生じる危険性に注意すべきである．大学入試センター試験では新聞発表された正解と配点を用いた自己採点により得点調整前の選択科目の得点を受験生は知ることができる．さらに，大学入試センター試験が採用する得点調整は特定選択科目だけに限定されている．したがって，得点調整における合否逆転の危険性を大学入試センター試験の得点調整方法でも抱え込んでいる．

6. おわりに

選択科目の異なる複数の受験者グループから合格者を選抜する問題を，選択した入試科目の難易度に依存しない形式で定式化した．合格者を評価する基準として，合格者中の共通科目最低点 (2.3) と合格者全員の共通科目合計点 (2.4) を取り上げた．いずれの合格者選抜モデルも多段決定過程であり，それぞれ漸化式 (3.5) と (4.5) によって解くことができ，簡単なプログラムで実装可能である．これら2つの選抜モデルを大学院推薦入試に適用し，提案した選抜方法の実用性を検討した．使用したデータでは，2つの選抜モデルによる合格者選抜は一意であった．

対象とした成績データには，総合得点 z_i が同点である学生が複数存在した．これらの学生の間でも選択科目成績 x_i と共通科目成績 y_i は異なることがあるので，これを利用してこれらの学生に優劣を付けることも可能である．例えば，共通科目の得点の高い学生を優秀と見なすことにすると，総合得点が同点の学生達について x_i（あるいは y_i）が同点でないとの仮定の下では，定員 p と合格者数との差は $(K-1)/2$ 以下に抑えることができる．この性質は選抜における定員超過が問題視される状況では重要である．

最後に，本選抜方法の限界に言及する．本選択科目数 K が学生（受験生）数 $|N|$ にほぼ等しい場合（$K \approx |N|$）では，学生（受験生）数が $n_k = 1$ となるグループが数多く存在す

る．$n_k = 1$ のグループではグループ内順位に意味がないので，このような場合での本選抜方法の適用は妥当でない．

参考文献

[1] 岩本誠一: 動的計画論 (九州大学出版会,1995).

[2] 前川眞一: 得点調整の方法について. 柳井晴夫, 前川眞一 (編): 大学入試データの解析［理論と応用］ (現代数学社, 1999), 89–109.

[3] 松本修和: 調整方式の新案について. 筑波大学社会工学類 1989 年度卒業論文.

[4] 真弓忠範, 吉村功, 村上隆, 前川眞一, 白旗慎吾: 大学入試センター試験の得点調整–基本的考え方と方法–, 大学入試フォーラム, **21** (1999) 4–18.

[5] 豊田秀樹: 項目反応理論 [入門編]–テストと測定の科学– (朝倉書店, 2002).

[6] 豊田秀樹 (編): 項目反応理論 [理論編]–テストの数理– (朝倉書店, 2002).

[7] 豊田秀樹 (編): 項目反応理論 [事例編]–新しい心理テストの構成法– (朝倉書店, 2002).

付録：性質 **3.1** の証明

性質 3.1. $k_1, k_2 = 1, \ldots, K$ について $y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}) \geq y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1})$ なら，

$$\min\left\{ y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)) \right\} \geq \min\left\{ y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) \right\}$$

が成り立つ．

証明. $\Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) = \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L})$ を満たす (P) の実行可能解 $\mathbf{L}$ が存在する．このとき

$$\mathbf{L} \geq \mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2) \geq \mathbf{s} \tag{7.1}$$

に注意して，$\mathbf{L}$ の第 k_1 成分について 2 つの場合を考える．

1. $L_{k_1} \geq s_{k_1} + 1$ の場合
   (7.1) より $\mathbf{L} \geq \mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)$ となり，Φ の定義より

$$\Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)) \geq \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1), \mathbf{L})$$

   が成り立つ．また，

$$\phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1), \mathbf{L}) = \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) \,\}$$

   と

$$\phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) = \min\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2), \mathbf{L}) \,\}$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
&\min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)) \,\right\}\\
&\geq \min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1),\, \mathbf{L}) \,\right\}\\
&= \min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2),\mathbf{L}) \,\} \,\right\}\\
&= \min\left\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2),\mathbf{L}) \,\right\}\\
&= \min\left\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \min\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)+\mathbf{e}(k_2),\mathbf{L}) \,\} \,\right\}\\
&= \min\left\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2),\mathbf{L}) \,\right\}\\
&= \min\left\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) \,\right\}
\end{aligned}$$

が得られる．

2. $L_{k_1} < s_{k_1}+1$ の場合
この場合は (7.1) より $L_{k_1} \geq s_{k_1}$ が得られ，よって $L_{k_1} = s_{k_1}$ であることに注意せよ．新たに $\mathbf{L}'$ を

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{e}(k_1)$$

とする．問題 (P) に上限制約はないので $\mathbf{L}'$ も実行可能解である．Φ の定義より

$$\Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)) \geq \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1),\mathbf{L}')$$

である．一方

$$\begin{aligned}
\phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1),\mathbf{L}') &= \phi_m(\mathbf{s},\mathbf{L})\\
&= \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2),\mathbf{L}) \,\}\\
&= \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) \,\}
\end{aligned}$$

である．したがって，以下を得る．

$$\begin{aligned}
&\min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1)) \,\right\}\\
&\geq \min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_1),\mathbf{L}') \,\right\}\\
&= \min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, \min\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) \,\} \,\right\}\\
&= \min\left\{\, y_m(I^{k_1}_{s_{k_1}+1}),\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) \,\right\}\\
&= \min\left\{\, y_m(I^{k_2}_{s_{k_2}+1}),\, \Phi_m(\mathbf{s}+\mathbf{e}(k_2)) \,\right\}.
\end{aligned}$$

□

関谷 和之
静岡大学工学部システム工学科
〒 432-8561 静岡県浜松市中区城北 3-5-1
E-mail: `sekitani@sys.eng.shizuoka.ac.jp`

ABSTRACT

OPTIMIZATION MODELING FOR ENTRANCE EXAMINATION INCLUDING ELECTIVE SUBJECTS

Kazuyuki Sekitani Yoshitsugu Yamamoto
Shizuoka University *University of Tsukuba*

Entrance examination including elective subjects is widely spread over the universities in Japan, however, a drawback of the examination is due to the difficulty of comparing scores between distinct elective subjects. We propose mathematical models that need no score adjustment and show that they reduce to a multistage decision process. By an empirical study of an application of the models to the entrance examination of a graduate school, we illustrate some properties and demonstrate the practicality of the models.