

本稿では, [12, 13] の手法を拡散過程の生存確率の計算に適用することを試みる. そのために, 生存確率に対応する変数が目的関数となるような測度を考え, 半正定値計画を定式化する. 生存確率に関しては, 例えば Ornstein-Uhlenbeck 過程などは解析解が求められておらず, 最近では Sumita ら [17] によって Ehrenfest 過程近似を用いた近似計算が提案されている. 本研究の貢献は, Ornstein-Uhlenbeck 過程に限らず, このように解析解が得られていない拡散過程の生存確率に対しても上質な上界と下界が求められるところにある. また, 拡散過程の種類によっては, [12, 13] の考え方をそのまま生存確率の計算に適用しても良い結果が得られない例があることが数値実験によって確かめられるが, そうした例に対しても良い結果が得られるように改良できることを示す. このことは, [7, 12] では基本的な考え方が与えられてはいるものの, 問題によっては工夫の余地が残されていること, そしてこれらの手法が工夫次第で他にも色々な問題に適用できる可能性があることを示唆している.

本稿の構成は以下の通りである. 2 節では, 本稿で扱う拡散過程に対して生存確率を定義し, [7, 12] に従って数理計画として定式化するうえで基本となる方程式を導く. 3 節では, [12, 13] に習って, 生存確率を計算するための半正定値計画の定式化を行う. その際, 定式化に必要なモーメント行列, 局所化モーメント行列についても詳述する. 4 節では, 実際にいくつかの拡散過程の例に対して数値実験を行い, 解析解の得られている例については数値の比較を行う. また, 解析解の得られていない例についても, 本稿の手法で得られる上界と下界によって生存確率が評価できることを示す. さらに, 3 節での定式化のままでは良い結果が得られない例に対しても, 定式化の工夫によって改善できることを示す. 5 節では, 定式化および数値実験についての考察をまとめる.

2. 拡散過程の生存確率と基本方程式

この節では, 本稿で扱う拡散過程に対して生存確率を定義する. また, [7, 12] に従って数理計画を定式化するうえで基本となる方程式を導く.

2.1. 拡散過程と生存確率

一般に, \mathbb{R} 上の拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ は次の確率微分方程式によって表される.

$$dY_t = \mu(t, y) dt + \sigma(t, y) dW_t. \quad (1)$$

ここに, W_t は Wiener 過程であり, $\mu(t, y)$ はドリフト, $\sigma(t, y)$ はボラティリティと呼ばれる. 生存確率とは, 与えられた確率過程のサンプルパスが定められた時刻までに定められた領域から出ていかない確率のことであり, 拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$, 時刻 $T (\geq 0)$, 領域 $(-\infty, u]$, $u \in \mathbb{R}$, に対しては,

$$P(\min\{t \geq 0 : Y_t > u\} > T) \quad (2)$$

と定義される. これは, 時刻 T までの $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ の最大値の分布 $P(\max_{0 \leq t \leq T} Y_t \leq u)$ とも等価である. また, 停止時刻 $\tau = \min\{\min\{t \geq 0 : Y_t > u\}, T\}$ を用いると, 生存確率 (2) は $P(Y_\tau \leq u)$ と表すこともできる. 図 1, 2 はそれぞれ, 拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ と停止時刻 τ の概要を表したものである. 図 1 は時刻 T までに u に達してしまうサンプルパスの例であり, この場合 u に達した時刻が停止時刻 τ である. 図 2 は時刻 T までに u に達しないサンプルパスの例であり, この場合は T が停止時刻 τ となる.

ここで, 停止時刻 τ とその時刻における位置 Y_τ について考えるため, 時間と変移の直積空間 $E = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ を状態空間とする確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t = (t, Y_t)$, を導入する. この状態空間 E

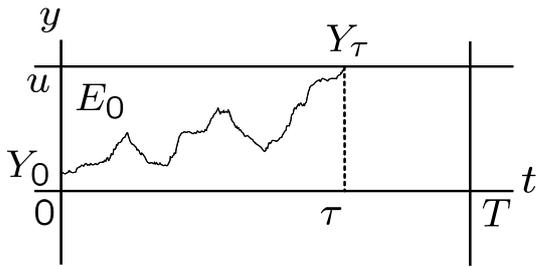


図 1: 時刻 T までに u を超えるサンプルパスの例

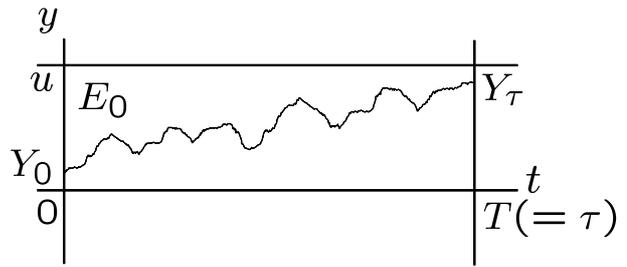


図 2: 時刻 T までに u を超えないサンプルパスの例

を2つの領域 $E_0 (\subset E)$ と $E_0^c (= E - E_0)$ に分け, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が初めて E_0^c (実際には境界 ∂E_0) に到達する時刻を τ とする. このとき τ は停止時刻であり, $\tau = \min\{t \geq 0 : X_t \in E_0^c\}$ と書くことができる. この停止時刻 τ における位置 $X_\tau (\in \partial E_0)$ を到達位置と呼ぶ.

定められた時刻 $T (\geq 0)$, 領域 $(-\infty, u]$, $u \in \mathbb{R}$, に対して拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ の生存確率を考えるときは, 確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t = (t, Y_t)$, に対して領域 $E_0 = [0, T] \times (-\infty, u]$ を考えれば良い. そして, 境界 ∂E_0 を $\partial E_0 = \partial E_0^{(\text{top})} \cup \partial E_0^{(\text{rig})}$ に分割する. ここに,

$$\partial E_0^{(\text{top})} = [0, T] \times \{u\}, \quad \partial E_0^{(\text{rig})} = \{T\} \times (-\infty, u) \tag{3}$$

である. すなわち $\partial E_0^{(\text{top})}$ は, ∂E_0 のうち, $\tau < T$ である場合に到達位置が満たす領域, つまり時刻 T までに u に達してしまっている場合の領域を表し, $\partial E_0^{(\text{rig})}$ は, ∂E_0 のうち T までに u を超えないでいる場合の領域を表す. このとき生存確率 (2) は,

$$P(X_\tau \in \partial E_0^{(\text{rig})}) \tag{4}$$

と表される. ただし, 拡散過程によっては正の値のみをとるものがあるので, その場合には, $E = [0, \infty) \times (0, \infty)$, $E_0 = [0, T] \times (0, u]$ として, 境界 ∂E_0 を,

$$\partial E_0^{(\text{top})} = [0, T] \times \{u\}, \quad \partial E_0^{(\text{rig})} = \{T\} \times (0, u) \tag{5}$$

に分割する.

2.2. 基本方程式

本節では, 3 節で半正定値計画を定式化するために, [7, 12] に従い, 無限小生成作用素 (以下, 生成作用素) を用いて基本方程式と呼ばれる等式を導く. A を (1) 式によって与えられる拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ の生成作用素とする. $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ を実数から実数への2回連続微分可能な関数全体の集合とすると, 生成作用素 A は $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ に対して以下で与えられる (伊藤 [9] 他).

$$f \mapsto Af(y) := \mu(t, y) \frac{df(y)}{dy} + \frac{\sigma(t, y)^2}{2} \frac{d^2f(y)}{dy^2}.$$

このとき, ある $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ に対して,

$$f(Y_t) - f(Y_0) - \int_0^t Af(Y_s) ds, \quad t \geq 0,$$

に有限の期待値が存在するならば, これがマルチンゲールになることが知られている. これと同様に, $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ を第1成分に関して1階導関数が連続で, 第2成分に関しては2階

導関数が連続である $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上の実関数全体の集合とすると, ある $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に対して,

$$f(t, Y_t) - f(0, Y_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} + A \right) f(s, Y_s) ds, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

に有限の期待値が存在するならば, これがマルチンゲールとなることが知られている (Karatzas & Shreve [10]). 以下では, $\partial/\partial t + A$ を改めて A' と書き, 確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t = (t, Y_t)$, の生成作用素とは A' のことを指すものとする. つまり,

$$\begin{aligned} f \mapsto A'f(t, y) &:= \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \right) f(t, y) \\ &= \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \mu(t, y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{\sigma(t, y)^2}{2} \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (7)$$

である. ここで, (6) 式がマルチンゲールならば (有限の期待値が存在するならば), 任意停止定理より停止時刻 τ に対して,

$$Ef(\tau, Y_\tau) - Ef(0, Y_0) - E \int_0^\tau A'f(t, Y_t) dt = 0 \quad (8)$$

が成り立つ. ここに E は期待値を表す.

$E = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上の確率過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t = (t, Y_t)$, と領域 $E_0 \subset E$ に対して, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が E_0 内から初めて E_0^c に到達する時刻を τ とする. また, ν_0 を停止時刻 τ までの E_0 内の期待占有測度, ν_1 を境界 ∂E_0 に達したときの到達位置 X_τ の分布とする. すなわち, ν_0 は E_0 上, ν_1 は ∂E_0 上の測度であり,

$$\begin{aligned} \nu_0(B) &:= E \int_0^\tau 1_{\{X_t \in B\}} dt, \quad B \subseteq E_0, \\ \nu_1(C) &:= P(X_\tau \in C), \quad C \subseteq \partial E_0, \end{aligned}$$

と定義される. この ν_0, ν_1 を用いると,

$$\begin{aligned} E \int_0^\tau A'f(t, Y_t) dt &= \int_{E_0} A'f(t, y) \nu_0(dt \times dy), \\ Ef(\tau, Y_\tau) &= \int_{\partial E_0} f(t, y) \nu_1(dt \times dy) \end{aligned}$$

と表すことができるので, (8) 式において $Y_0 = y_0$ ($(0, y_0) \in E_0$) と固定して次の式を得る.

$$\int_{\partial E_0} f(t, y) \nu_1(dt \times dy) - f(0, y_0) - \int_{E_0} A'f(t, y) \nu_0(dt \times dy) = 0. \quad (9)$$

この等式を基本方程式と呼び, 3 節で半正定値計画を定式化する際に用いる.

拡散過程に対して生成作用素は一意に定まるため, 領域 E_0 を定めれば測度 ν_0 と ν_1 もまた一意に定まる. ただし, 実際に数値計算を行うときは, 関数 f は有限個に制限されてしまうため, 選ばれた有限個の f に対する基本方程式を扱うことになる. しかし, 基本方程式にいくつかの限られた関数 f を代入しただけでは, 元々想定している拡散過程を一意に定められない可能性があり, どのような関数 f を選ぶのかが計算の精度に影響を与えることがあると考えられる. これについては, 4.4 節で具体例を用いて考察する.

3. 半正定値計画としての定式化

まず, [7, 12] に従って基本方程式 (9) から線形の等式制約を導く. 具体的には, 前節の測度 ν_0, ν_1 に関するモーメントを変数として線形制約式を記述する. 次に, その変数が測度に関するモーメントになっていることを保証する条件が必要となる. そこで, [12, 13] に従い, モーメント行列と局所化モーメント行列という行列を導入し, その行列の半正定値性を制約とすることにより半正定値計画を定式化する.

3.1. 変数となるモーメントの定義

$\{m_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}, \{b_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ をそれぞれ前節の測度 ν_0, ν_1 に関する (i, j) 次モーメントとする. つまり,

$$m_{i,j} = \int_{E_0} t^i y^j \nu_0(dt \times dy), \quad b_{i,j} = \int_{\partial E_0} t^i y^j \nu_1(dt \times dy), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (10)$$

である. さらに, 到達位置 X_τ は $\{X_t\}_{t \geq 0}$ が初めて $E_0 = [0, T] \times (-\infty, u]$ の境界 ∂E_0 に達したときの位置であり, 最終的に求めたいものは (4) 式であるから, 到達位置の分布 ν_1 を (3) 式の $\partial E_0^{(\text{top})}, \partial E_0^{(\text{rig})}$ に対応する 2 つの測度 $\nu_1^{(\text{top})}, \nu_1^{(\text{rig})}$ に分割する. すなわち, $B \subseteq [0, T], C \subseteq (-\infty, u)$ に対して,

$$\nu_1^{(\text{top})}(B) = \nu_1(B \times \{u\}), \quad \nu_1^{(\text{rig})}(C) = \nu_1(\{T\} \times C)$$

である. このとき

$$b_i^{(\text{top})} = \int_{[0, T]} t^i \nu_1^{(\text{top})}(dt), \quad b_j^{(\text{rig})} = \int_{(-\infty, u)} y^j \nu_1^{(\text{rig})}(dy), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+,$$

とすると, 次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \int_{\partial E_0^{(\text{top})}} t^i y^j \nu_1(dt \times dy) + \int_{\partial E_0^{(\text{rig})}} t^i y^j \nu_1(dt \times dy) \\ &= u^j \int_{[0, T]} t^i \nu_1^{(\text{top})}(dt) + T^i \int_{(-\infty, u)} y^j \nu_1^{(\text{rig})}(dy) \\ &= u^j b_i^{(\text{top})} + T^i b_j^{(\text{rig})}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (11)$$

さらに, 生存確率については, 定義から,

$$P(X_\tau \in \partial E_0^{(\text{rig})}) = \int_{\partial E_0^{(\text{rig})}} \nu_1(dt \times dy) = \int_{(-\infty, u)} \nu_1^{(\text{rig})}(dy) = b_0^{(\text{rig})}$$

と表すことができる. 拡散過程が正の値のみをとる場合についても, $E_0 = [0, T] \times (0, u]$ として (5) 式を用いて同様の変形を行えば良い. 以降, 半正定値計画として定式化する際, $b_0^{(\text{rig})}$ を目的関数とし, $\{m_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}, \{b_i^{(\text{top})}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}, \{b_j^{(\text{rig})}\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ を変数として定式化することを考える.

3.2. 等式制約

2.2 節に基本方程式を示したが, これに対して拡散過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ と関数 f を具体的に定めることにより線形の等式制約を作る. まず, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上の多項式は $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に含まれる.

ここで f を多項式の特殊な場合として単項式, つまり $(t, y) \mapsto f(t, y) := t^r y^s, r, s \in \mathbb{Z}_+$, とすると, $A'f(t, y)$ は (7) 式より,

$$A'f(t, y) = r t^{r-1} y^s + s \mu(t, y) t^r y^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2} \sigma(t, y)^2 t^r y^{s-2}$$

となる. さらに, $\mu(t, y)$ と $\sigma(t, y)$ がともに t と y に関して多項式であるとする, $f(t, y) = t^r y^s$ に対して, 定数の組 $\{c_{i,j}(r, s)\}$ を用いて,

$$A'f(t, y) = \sum_{i,j} c_{i,j}(r, s) t^i y^j \quad (12)$$

の形で表すことができる. したがって基本方程式 (9) は, (10), (11), (12) 式より, $\nu_0, \nu_1^{(\text{top})}, \nu_1^{(\text{rig})}$ に関するモーメント $\{m_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}, \{b_i^{(\text{top})}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}, \{b_j^{(\text{rig})}\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ を用いて,

$$u^s b_r^{(\text{top})} + T^r b_s^{(\text{rig})} - y_0^s 1_{\{r=0\}} - \sum_{i,j} c_{i,j}(r, s) m_{i,j} = 0 \quad (13)$$

と表すことができる. (9) 式は, (6) 式に有限の期待値が存在する限り, 任意の $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に対して成り立つので, (13) 式は, それぞれのモーメントが存在する限り, 任意の $r, s \in \mathbb{Z}_+$ に対して成立する.

ここでは, ドリフト $\mu(t, y)$ とボラティリティ $\sigma(t, y)$ がともに t と y に関して多項式である場合について述べたが, 実際にはこれらが多項式にならない例も存在する. その場合でも, 測度変換などを考えることによって (13) 式に対応する式を得ることができる. 実際, 4.1 節で扱う Bessel 過程は $\mu(t, y)$ が多項式とはならない例である ([7, 12]). また, $\mu(t, y)$ と $\sigma(t, y)$ が多項式であっても, 関数 f が多項式のときには良い結果が得られない例もあり, この場合には多項式以外の関数 f を考えなければならない. この場合の例を 4.4 節で扱う. すなわち, [7, 12] では基本的な考え方が与えられてはいるものの, それをいつもそのまま適用できるとは限らず, 適用できたとしても常に良い結果が得られるとは限らない. そのため, 具体的な問題に適用するときには, 問題に応じて工夫の余地が残されているとすることができる.

3.3. モーメント行列

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, と $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$u_k(x) := (1 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n \quad x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad \dots \quad x_1^k \quad x_1^{k-1} x_2 \quad \dots \quad x_n^k) \quad (14)$$

とする. (14) 式は n 変数, 次数 k の実変数多項式空間の基底ベクトルである. 以下では, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して, x^α と書いて $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ を表すものとする. このとき, $m = \{m_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ を添え字 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ をもつ実変数の列とすると, 一般にモーメント行列 $M_k(m)$ とは, 行列 $u_k(x)^\top u_k(x)$ の各要素をその次数と同じ添え字をもつ変数に置き換えたものである (ここに “ \top ” は行列の転置を表す). つまり, 行列 $u_k(x)^\top u_k(x)$ の各要素に対して $x^\alpha \rightarrow m_\alpha$ という操作を行った行列のことであり, 次の関係を満たす.

$$\left. \begin{array}{l} [M_k(m)]_{1,j} = m_\alpha \\ [M_k(m)]_{i,1} = m_\beta \end{array} \right\} \implies [M_k(m)]_{i,j} = m_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

ここに, $[M_k(m)]_{i,j}$ は行列 $M_k(m)$ の (i, j) 要素である. $u_k(x)^\top u_k(x)$ は対称行列なので, $M_k(m)$ も対称行列である. また $M_k(m)$ の構築の仕方から, その要素 m_α の添え字 $\alpha =$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して, $0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq 2k$ という関係が成り立つ. 以下にモーメント行列の具体例を挙げる.

例 1 $n = 2, x = (t, y)$ とする. $k = 2$ の場合を考えると, $u_2(t, y) = (1 \ y \ y^2 \ t \ ty \ t^2)$ であるから, $u_2(t, y)^\top u_2(t, y)$ は次の 6×6 対称行列となる.

$$u_2(t, y)^\top u_2(t, y) = \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 & t & ty & t^2 \\ y & y^2 & y^3 & ty & ty^2 & t^2 y \\ y^2 & y^3 & y^4 & ty^2 & ty^3 & t^2 y^2 \\ t & ty & ty^2 & t^2 & t^2 y & t^3 \\ ty & ty^2 & ty^3 & t^2 y & t^2 y^2 & t^3 y \\ t^2 & t^2 y & t^2 y^2 & t^3 & t^3 y & t^4 \end{pmatrix}.$$

この行列の各要素 $t^i y^j$ を実変数 $m_{i,j}$ に置き換えたものがモーメント行列 $M_2(m)$ であり, 以下で与えられる.

$$M_2(m) = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{1,0} & m_{1,1} & m_{2,0} \\ m_{0,1} & m_{0,2} & m_{0,3} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{2,1} \\ m_{0,2} & m_{0,3} & m_{0,4} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{2,2} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{2,0} & m_{2,1} & m_{3,0} \\ m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{3,1} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{3,0} & m_{3,1} & m_{4,0} \end{pmatrix}.$$

3.4. 局所化モーメント行列

q を \mathbb{R}^n 上の実多項式とする. m_α を添え字 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ をもつ実変数として, $q m_\alpha$ によって多項式 $x^\alpha q(x), x \in \mathbb{R}^n$, の各項の $x^\beta, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, をその次数と同じ添え字をもつ変数 m_β で置き換えたものを表す. また, $m = \{m_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ に対して $q m = \{q m_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ とする. このとき, 一般に局所化モーメント行列 $M_k(q m)$ とは, 行列 $q(x) u_k(x)^\top u_k(x), x \in \mathbb{R}^n$, の各要素の多項式において, 各項の $x^\beta, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, をその次数と同じ添え字をもつ変数 m_β で置き換えたものであり, 次の関係によって定義することもできる. すなわち, モーメント行列 $M_k(m)$ の (i, j) 要素の添え字を $\beta_{i,j} \in \mathbb{Z}_+^n$, 多項式 q の次数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ の項の係数を $q^{(\alpha)}$ とすると, 局所化モーメント行列 $M_k(q m)$ の (i, j) 要素は以下で与えられる.

$$[M_k(q m)]_{i,j} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} q^{(\alpha)} m_{\beta_{i,j} + \alpha}.$$

定義から, 局所化モーメント行列も対称行列となるのは明らかである. 以下に, 局所化モーメント行列の具体例を挙げる.

例 2 $n = 2, x = (t, y)$ として, $k = 1$ の場合を考える. このとき, $u_1(t, y) = (1 \ y \ t)$ より,

$$u_1(t, y)^\top u_1(t, y) = \begin{pmatrix} 1 & y & t \\ y & y^2 & ty \\ t & ty & t^2 \end{pmatrix}$$

である. ここで, 例えば $q(t, y) = -y^2 + 3y - 2$ とすると,

$$q(t, y) u_1(t, y)^\top u_1(t, y) = \begin{pmatrix} -y^2 + 3y - 2 & -y^3 + 3y^2 - 2y & -ty^2 + 3ty - 2t \\ -y^3 + 3y^2 - 2y & -y^4 + 3y^3 - 2y^2 & -ty^3 + 3ty^2 - 2ty \\ -ty^2 + 3ty - 2t & -ty^3 + 3ty^2 - 2ty & -t^2 y^2 + 3t^2 y - 2t^2 \end{pmatrix}$$

となり、各要素の $t^i y^j$ を実変数 $m_{i,j}$ に置き換えることにより、次の局所化モーメント行列 $M_1(qm)$ を得る。

$$M_1(qm) = \begin{pmatrix} -m_{0,2} + 3m_{0,1} - 2m_{0,0} & -m_{0,3} + 3m_{0,2} - 2m_{0,1} & -m_{1,2} + 3m_{1,1} - 2m_{1,0} \\ -m_{0,3} + 3m_{0,2} - 2m_{0,1} & -m_{0,4} + 3m_{0,3} - 2m_{0,2} & -m_{1,3} + 3m_{1,2} - 2m_{1,1} \\ -m_{1,2} + 3m_{1,1} - 2m_{1,0} & -m_{1,3} + 3m_{1,2} - 2m_{1,1} & -m_{2,2} + 3m_{2,1} - 2m_{2,0} \end{pmatrix}.$$

3.5. 半正定値計画モーメント条件

$(m)_{2k} = \{m_\alpha\}_{|\alpha| \leq 2k}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, とし, $K = \{x \in \mathbb{R}^n : q_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, l\}$ とする. このとき, 半正定値条件,

$$M_k(m) \succeq 0, \quad M_k(q_i m) \succeq 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (15)$$

は, $(m)_{2k}$ が K 上の測度に関するモーメントの列であることの必要条件である (Curto & Fialkow [5], Putinar [14]). これを半正定値計画モーメント条件と呼ぶ.

$n = 2$, $x = (t, y)$ の場合の例として,

$$(m)_{2k} = \{m_{0,0}, m_{0,1}, \dots, m_{0,2k}, m_{1,0}, m_{1,1}, \dots, m_{1,2k-1}, m_{2,0}, \dots, m_{2k,0}\} \quad (16)$$

と領域 $E_0 = [0, T] \times (-\infty, u]$ について考える. このとき,

$$E_0 = \{(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : t \geq 0, T - t \geq 0, u - y \geq 0\} \quad (17)$$

と表せるので, (16) 式の $(m)_{2k}$ が E_0 上の測度に関するモーメントの組であるための必要条件は, $q_1(t, y) = t$, $q_2(t, y) = T - t$, $q_3(t, y) = u - y$ として, $M_k(m) \succeq 0$, $M_{k-1}(q_i m) \succeq 0$, $i = 1, 2, 3$, と表される. ここで, モーメント行列の添え字が k で局所化モーメント行列の添え字が $k-1$ となっているのは, (16) 式の $(m)_{2k}$ について考えているので, モーメント行列と局所化モーメント行列の要素の添え字を合わせたためである.

3.6. 定式化

以上をまとめると, 等式制約 (13) および (10), (11) 式のモーメント $\{m_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$, $\{b_i^{(\text{top})}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, $\{b_j^{(\text{rig})}\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ に対する半正定値計画モーメント条件 (15) のもとで, $b_0^{(\text{rig})} = P(X_\tau \in \partial E_0^{(\text{rig})})$ を最大化または最小化することにより, 生存確率の上界と下界を計算することができる. ここで, 等式制約 (13) と半正定値計画モーメント条件 (15) は任意の $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$ について成り立つが, 実際に計算機上で数値計算をするときは, これら r, s, k を有限の値で打ち切った緩和問題を解くことになる. すなわち, 領域 E_0 が (17) 式で与えられる場合, 半正定値計画は以下によって定式化される.

$$\left| \begin{array}{l} \max (\min) \quad b_0^{(\text{rig})} \\ \text{subject to} \quad u^s b_r^{(\text{top})} + T^r b_s^{(\text{rig})} - y_0^s \mathbf{1}_{\{r=0\}} - \sum_{i,j} c_{i,j}(r, s) m_{i,j} = 0, \quad 0 \leq r + s \leq 2k \\ \\ M_k(m) \succeq 0, \quad M_{k-1}(q_i m) \succeq 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ M_k(b^{(\text{top})}) \succeq 0, \quad M_{k-1}(q_j b^{(\text{top})}) \succeq 0, \quad j = 1, 2, \\ M_k(b^{(\text{rig})}) \succeq 0, \quad M_{k-1}(q_3 b^{(\text{rig})}) \succeq 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

ここに, $q_1(t, y) = t$, $q_2(t, y) = T - t$, $q_3(t, y) = u - y$ である. 拡散過程が正の値のみをとる場合は, 領域 $E_0 = [0, T] \times (0, u]$ を

$$E_0 = \{(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : t \geq 0, T - t \geq 0, u - y \geq 0, u > 0\}$$

と表すことができるので, $q_4(t, y) = y$ として, (18) に次の制約を付け加えれば良い.

$$M_{k-1}(q_4 m) \geq 0, \quad M_{k-1}(q_4 b^{(\text{rig})}) \geq 0. \quad (19)$$

次節では, (18), (19) を用いて, 具体的な拡散過程の例に対して生存確率の上界, 下界を計算する.

4. 数値実験

本節では, 前節の定式化に基づき, Bessel 過程, Ornstein-Uhlenbeck 過程, Cox-Ingersoll-Ross モデル, 幾何 Brown 運動の 4 つの拡散過程に対して数値実験を行った結果を示す (これらの拡散過程についての詳細は藤田ら [6], Kijima [11] 等を参照). 半正定値計画を解くソルバは SeDuMi (Sturm [16]) を用いた. 数値計算においては, 領域 $E_0 = [0, T] \times (-\infty, u]$ に対してモーメントが 1 以下の値をとるように, 関数 f を $f(t, y) = (t/T)^r (y/u)^s$ として計算している. これによりモーメントの定義は,

$$\begin{cases} m_{i,j} &= \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{y}{u}\right)^j \nu_0(dt \times dy), \\ b_i^{(\text{top})} &= \int_{[0,T]} \left(\frac{t}{T}\right)^i \nu_1^{(\text{top})}(dt), \\ b_j^{(\text{rig})} &= \int_{(-\infty, u]} \left(\frac{y}{u}\right)^j \nu_1^{(\text{rig})}(dy), \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (20)$$

となる. $E_0 = [0, T] \times (0, u]$ の場合も同様である. この操作により (13) 式は以下に置き換えられ, より安定した数値計算を行うことができる.

$$b_r^{(\text{top})} + b_s^{(\text{rig})} - \left(\frac{y_0}{u}\right)^s 1_{\{r=0\}} - \sum_{i,j} c_{i,j}(r, s) m_{i,j} = 0. \quad (21)$$

4.1. Bessel 過程

4.1.1. モデルと定式化

Bessel 過程とは, d 次元標準 Brown 運動の原点からの Euclid ノルムで定義される確率過程であり, 次の確率微分方程式で与えられる.

$$dY_t = \frac{d-1}{2} \frac{1}{Y_t} dt + dW_t, \quad d \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

この確率過程は, $d = 1$ ならば標準ブラウン運動に一致し, $d \geq 2$ ならば負の値をとらない. Bessel 過程については様々な研究がなされており (Imhof [8], Borodin & Salminen [3], Revuz & Yor [15] 等), 生存確率に対しても解析解が得られている. よって, 数値計算による結果と解析解による値を比較することにより, 本稿の手法が上質な上界と下界を与えることを確かめる.

(22) 式で与えられる Bessel 過程 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ に対して, $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t = (t, Y_t)$, の生成作用素は (7) 式より,

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{d-1}{2y} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2}$$

である。したがって、 $f(t, y) = (t/T)^r (y/u)^s$ に対して、

$$A'f(t, y) = \frac{r}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{r-1} \left(\frac{y}{u}\right)^s + \frac{s(d-1)}{2u} \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{y}{u}\right)^{s-1} + \frac{s(s-1)}{2u^2} \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{y}{u}\right)^{s-2} \quad (23)$$

を得る。しかし、(23) 式の右辺に $1/y$ が現れるため、 $s = 1$ の場合、この式からモーメントに関して線形な制約式を導くことができない。そこで、次の Radon-Nikodym 微分を用いて、期待占有測度 ν_0 を別の測度 ν'_0 に変換する。

$$\frac{d\nu'_0}{d\nu_0} = \frac{1}{y}, \quad y \in (0, u).$$

この ν'_0 に関するモーメントを $m'_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, とすると、

$$\begin{aligned} m'_{i,j} &= \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{y}{u}\right)^j \nu'_0(dt \times dy) \\ &= \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{y}{u}\right)^j \frac{1}{y} \nu_0(dt \times dy) \end{aligned} \quad (24)$$

であるから、(23) 式を

$$A'f(t, y) = \frac{r u}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{r-1} \left(\frac{y}{u}\right)^{s+1} \frac{1}{y} + \frac{s(d+s-2)}{2u} \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{y}{u}\right)^{s-1} \frac{1}{y}$$

と変形して、(21), (24) 式よりモーメントに関する線形の等式制約、

$$b_r^{(\text{top})} + b_s^{(\text{rig})} - \left(\frac{y_0}{u}\right)^s 1_{\{r=0\}} - \frac{r u}{T} m'_{r-1, s+1} - \frac{s(d+s-2)}{2u} m'_{r, s-1} = 0 \quad (25)$$

を得る。以上より、(18), (19) に従い、次の半正定値計画を得る。

$$\left| \begin{array}{l} \max (\min) \quad b_0^{(\text{rig})} \\ \text{subject to} \quad b_r^{(\text{top})} + b_s^{(\text{rig})} - \left(\frac{y_0}{u}\right)^s 1_{\{r=0\}} - \frac{r u}{T} m'_{r-1, s+1} - \frac{s(d+s-2)}{2u} m'_{r, s-1} = 0, \\ \quad \quad \quad 0 \leq r + s \leq 2k, \\ \quad \quad \quad M_k(m') \geq 0, \quad M_{k-1}(q_i m') \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \quad \quad \quad M_k(b^{(\text{top})}) \geq 0, \quad M_{k-1}(q_j b^{(\text{top})}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \\ \quad \quad \quad M_k(b^{(\text{rig})}) \geq 0, \quad M_{k-1}(q_{j'} b^{(\text{rig})}) \geq 0, \quad j' = 3, 4. \end{array} \right.$$

ただし、 $q_1(t, y) = t$, $q_2(t, y) = 1 - t$, $q_3(t, y) = 1 - y$, $q_4(t, y) = y$ である。

4.1.2. 計算結果

パラメータを $d = 3$ 、初期点を $y_0 = 0.1$ として数値計算を行った。 $d = 3$ の Bessel 過程について、ある期間 $[0, T]$ での最大値が u を超えない確率は以下で与えられる ([8])。

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} Y_t \leq u\right) = 1 - \frac{2u}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Psi\left(\frac{(2n-1)u + y_0}{\sqrt{T}}\right) - \Psi\left(\frac{(2n-1)u - y_0}{\sqrt{T}}\right) \right\}.$$

ここに、 Ψ は標準正規分布の分布関数である。ただし数値計算においては、右辺の和を $n = 1, \dots, 1000$ の範囲で計算している。

表 1: Bessel 過程の生存確率の計算結果 ($d = 3, u = 2.0$)

| T | 下界 | 上界 | 解析解 |
|----|----------|----------|----------|
| 1 | 0.545655 | 0.597988 | 0.565915 |
| 2 | 0.158079 | 0.187456 | 0.168810 |
| 3 | 0.044797 | 0.057282 | 0.049190 |
| 4 | 0.01269 | 0.017516 | 0.014326 |
| 5 | 0.003585 | 0.005401 | 0.004173 |
| 6 | 0.000995 | 0.001693 | 0.001216 |
| 7 | 0.000279 | 0.000524 | 0.000355 |
| 8 | 0.000081 | 0.00016 | 0.000103 |
| 9 | 0.000023 | 0.000049 | 0.000029 |
| 10 | 0.000007 | 0.000015 | 0.000008 |

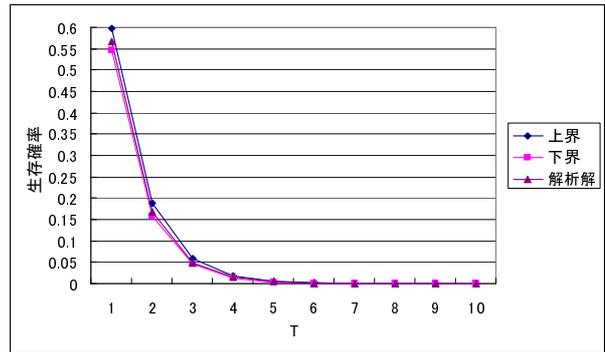


図 3: Bessel 過程の生存確率の計算結果 ($d = 3, u = 2.0$)

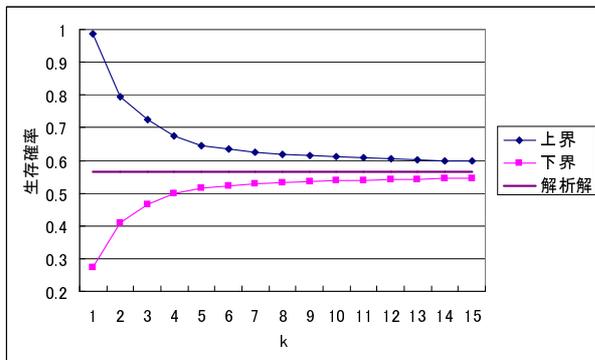


図 4: Bessel 過程の生存確率の計算結果 ($d = 3, T = 1, u = 2.0$)

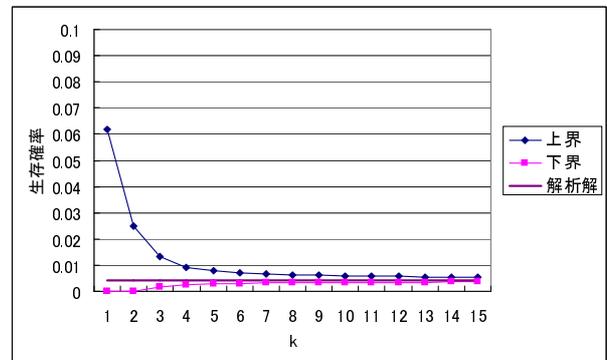


図 5: Bessel 過程の生存確率の計算結果 ($d = 3, T = 5, u = 2.0$)

T を 1 から 10 までの整数値として、各 T の値に対する解析解との比較を表 1、および図 3 に示す。ただし、 $u = 2.0, k = 15$ である。また、 k の値を変えたときの上下界の値を図 4 と図 5 に示す。ただし、前者では $T = 1$ 、後者では $T = 5$ とし、ともに $u = 2.0$ である。表 1、図 3 より、本稿の手法が上質な上下界を与えることが確認できる。また、図 4、図 5 より、 k の値を大きくしていくにつれて、上下界の幅が狭くなり、解析解に近づいていく様子が確認できる。

4.2. Ornstein-Uhlenbeck 過程

金融工学における金利の変動を表す代表的なモデルに、スポットレートを Y_t として、次の確率微分方程式で与えられるものがある。

$$dY_t = a(h - Y_t) dt + \sigma Y_t^\gamma dW_t. \tag{26}$$

ここに、 $a, h, \sigma (\geq 0), \gamma$ は定数である。このモデルは、 $a > 0$ の場合、 $Y_t > h$ であればドリフトが負となり、平均的に Y_t が減少し、 $Y_t < h$ であればドリフトが正となり、平均的に Y_t が増加することを表している。これは、スポットレートが平均的には値 h の周辺を h に回帰するように動いているという性質をモデル化している。それゆえ、このモデルは平均回帰モデルと呼ばれることもある ([11])。

4.2.1. モデルと定式化

(26) 式において $\gamma = 0$ とした拡散過程を Vasicek モデルと呼び、これは Ornstein-Uhlenbeck 過程としても知られている。Ornstein-Uhlenbeck 過程についても様々な研究があり、最近では、[17] において Ehrenfest 過程近似によって生存確率も評価されている。ここでは、3 節の半正定値計画によって、生存確率の上界と下界を計算するが、簡単のため $h = 0$ とし、次の Ornstein-Uhlenbeck 過程を考える。

$$dY_t = -a Y_t dt + \sigma dW_t, \quad a \geq 0, \sigma \geq 0. \quad (27)$$

このとき、 $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t = (t, Y_t)$, の生成作用素は (7) 式より、

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} - a y \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2}$$

であり、 $f(t, y) = (t/T)^r (y/u)^s$ に対して、

$$A'f(t, y) = \frac{r}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{r-1} \left(\frac{y}{u}\right)^s - a s \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{y}{u}\right)^s + \frac{s(s-1)\sigma^2}{2u^2} \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{y}{u}\right)^{s-2}$$

となる。したがって、(20), (21) 式より半正定値計画の等式制約、

$$b_r^{(\text{top})} + b_s^{(\text{rig})} - \left(\frac{y_0}{u}\right)^s 1_{\{r=0\}} - \frac{r}{T} m_{r-1, s} + a s m_{r, s} - \frac{s(s-1)\sigma^2}{2u^2} m_{r, s-2} = 0 \quad (28)$$

を得る。これを用いて、Bessel 過程のときと同様に半正定値計画 (18) の形に定式化し、数値計算を行う。

4.2.2. 計算結果

(27) 式において、パラメータを $a = 1$, $\sigma = \sqrt{2}$, 初期点を $y_0 = 0$ とし、数値計算を行った。その結果を図 6-9 に示す。ただし、図 6 では $u = 0.5$, $k = 3$, 図 7 では $u = 1.0$, $k = 5$, 図 8 では $u = 1.5$, $k = 7$, 図 9 では $u = 2.0$, $k = 9$ とし、それぞれ T の値を変えて計算した結果である。 u の値が小さいほど上界と下界の差が大きくなってしまいう傾向があるが、ほぼ安定して解くことができていると言える。

4.3. Cox-Ingorsoll-Ross モデル

4.3.1. モデルと定式化

(26) 式において $\gamma = 1/2$ とした拡散過程は Cox-Ingorsoll-Ross モデルと呼ばれる。

$$dY_t = a(h - Y_t) dt + \sigma \sqrt{Y_t} dW_t, \quad a > 0, h \geq 0, \sigma \geq 0. \quad (29)$$

このモデルは 1985 年に Cox ら [4] によって提唱され、多くの金利派生商品の価格付けに用いられている。その理由として、Vasicek モデルではスポットレートが負になる場合があるが、Cox-Ingorsoll-Ross モデルにおいてはそれが起こらないことが挙げられる。

(29) 式で与えられる $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ に対して、 $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t = (t, Y_t)$, の生成作用素は (7) 式より、

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + a(h - y) \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} y \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2}$$

であるから、 $f(t, y) = (t/T)^r (y/u)^s$ に対して、

$$A'f(t, y) := \frac{r}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{r-1} \left(\frac{y}{u}\right)^s - a s \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{y}{u}\right)^s + \frac{s}{u} \left[a h + \frac{s-1}{2} \sigma^2 \right] \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{y}{u}\right)^{s-1}$$

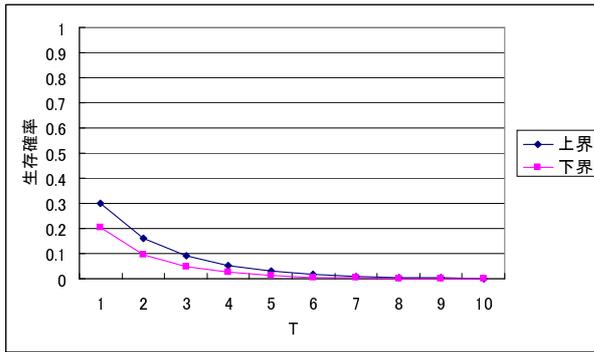


図 6: Ornstein-Uhlenbeck 過程の生存確率の計算結果 ($u = 0.5$)

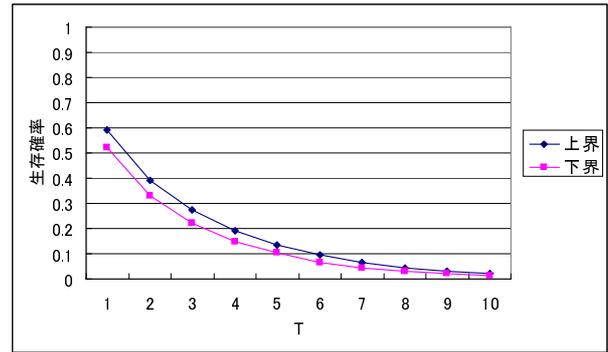


図 7: Ornstein-Uhlenbeck 過程の生存確率の計算結果 ($u = 1.0$)

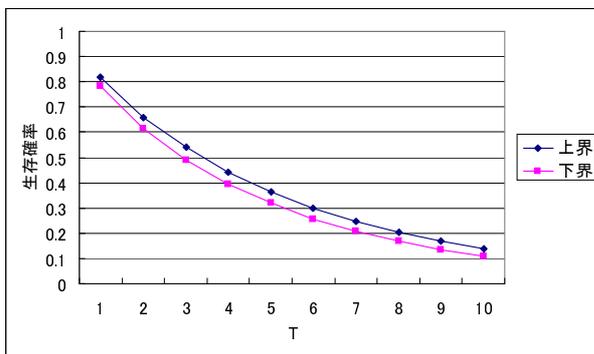


図 8: Ornstein-Uhlenbeck 過程の生存確率の計算結果 ($u = 1.5$)

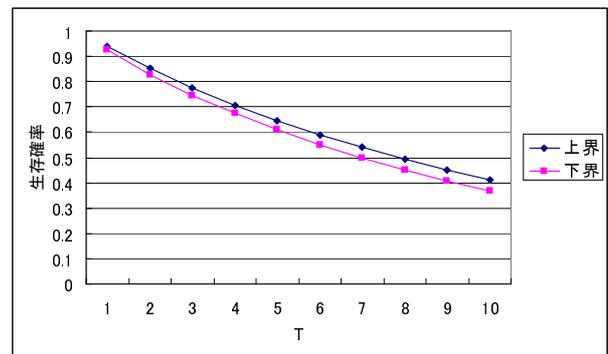


図 9: Ornstein-Uhlenbeck 過程の生存確率の計算結果 ($u = 2.0$)

となる。したがって、(20), (21) 式より、半正定値計画の等式制約、

$$b_r^{(\text{top})} + b_s^{(\text{rig})} - \left(\frac{y_0}{u}\right)^s 1_{\{r=0\}} - \frac{r}{T} m_{r-1,s} + a s m_{r,s} - \frac{s}{u} \left[a h + \frac{s-1}{2} \sigma^2 \right] m_{r,s-1} = 0 \quad (30)$$

を得る。

4.3.2. 計算結果

(29) 式においてパラメータを $a = h = \sigma = 1$, 初期点を $y_0 = 0.1$ として数値計算を行った。その結果を図 10-13 に示す。ただし、 $k = 15$ とし、図 10 では $u = 0.5$, 図 11 では $u = 1.0$, 図 12 では $u = 1.5$, 図 13 では $u = 2.0$ として、それぞれ T の値を変えて計算した結果である。いずれの場合も上界と下界の差は小さく、良い結果が得られていると言える。

4.4. 幾何 Brown 運動

4.4.1. モデルと定式化

(26) 式において $h = 0$, $\gamma = 1$ とした拡散過程は幾何 Brown 運動モデルと呼ばれる。

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t dW_t, \quad \mu = -a > 0, \sigma \geq 0. \quad (31)$$

この確率過程は、 $dY_t/Y_t = \mu dt + \sigma dW_t$ と変形すれば分かるように、変化率の変動が Brown 運動に従うことを表している。このため、幾何 Brown 運動も Cox-Ingersoll-Ross モデルと同様に正の値しかとらないという特徴がある。また、幾何 Brown 運動は Black-Scholes モ

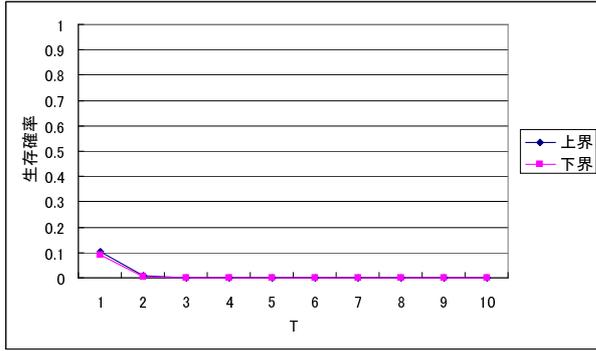


図 10: Cox-Ingersoll-Ross モデルの生存確率の計算結果 ($u = 0.5$)

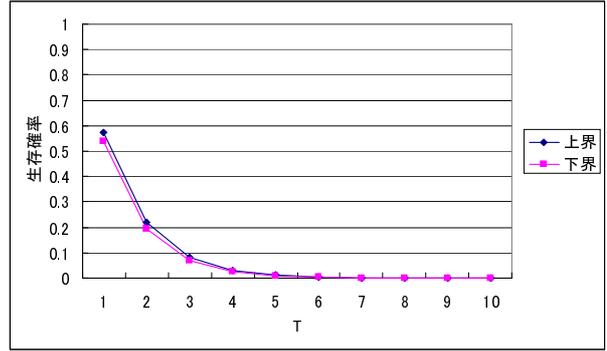


図 11: Cox-Ingersoll-Ross モデルの生存確率の計算結果 ($u = 1.0$)

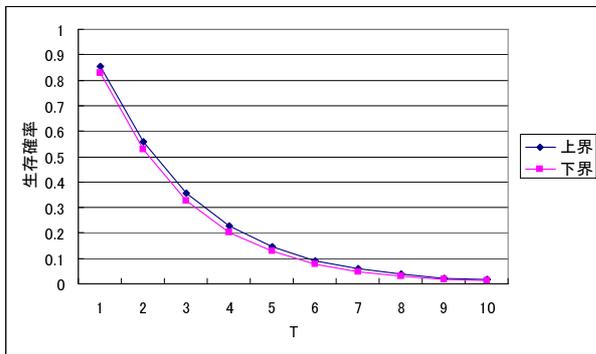


図 12: Cox-Ingersoll-Ross モデルの生存確率の計算結果 ($u = 1.5$)

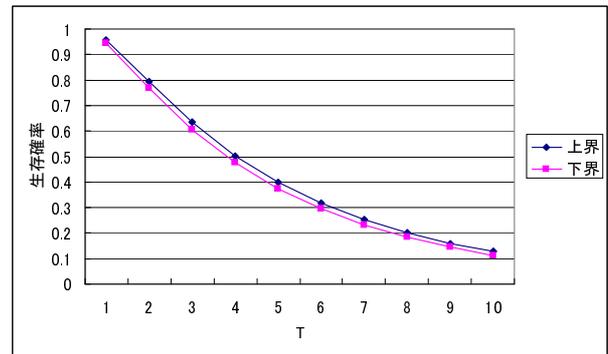


図 13: Cox-Ingersoll-Ross モデルの生存確率の計算結果 ($u = 2.0$)

デルにおいても原資産価格の変動を表す確率過程として仮定されているなど、金融工学において重要な意味を持っている。

(31) 式で与えられる幾何 Brown 運動 $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ に対して, $\{X_t\}_{t \geq 0}$, $X_t = (t, Y_t)$, の生成作用素は (7) 式より,

$$f \mapsto A'f(t, y) := \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \mu y \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} y^2 \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2} \tag{32}$$

であるから, $f(t, y) = (t/T)^r (y/u)^s$ に対して,

$$A'f(t, y) = \frac{r}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{r-1} \left(\frac{y}{u}\right)^s + s \left[\mu + \frac{s-1}{2} \sigma^2\right] \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{y}{u}\right)^s$$

となる. したがって, (20), (21) 式より, 半正定値計画の等式制約,

$$b_r^{(\text{top})} + b_s^{(\text{rig})} - \left(\frac{y_0}{u}\right)^s 1_{\{r=0\}} - \frac{r}{T} m_{r-1,s} - s \left[\mu + \frac{s-1}{2} \sigma^2\right] m_{r,s} = 0 \tag{33}$$

を得る.

4.4.2. 計算結果

(31) 式の $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ においてパラメータを $\mu = \sigma = 1$, 初期点を $y_0 = 0.1$ として数値計算を行った. その結果を図 14-17 に示す. ただし $k = 15$ とし, 図 14 では $u = 0.5$, 図 15 では $u = 1.0$, 図 16 では $u = 1.5$, 図 17 では $u = 2.0$ として, それぞれ T の値を変えて計算し

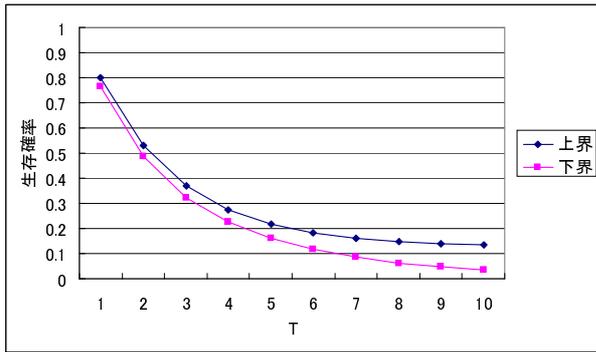


図 14: 幾何 Brown 運動の生存確率の計算結果 ($u = 0.5$)

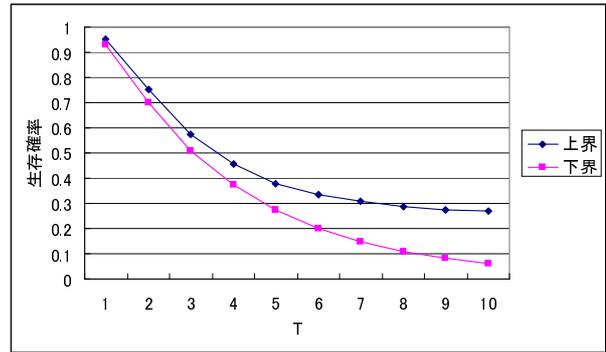


図 15: 幾何 Brown 運動の生存確率の計算結果 ($u = 1.0$)

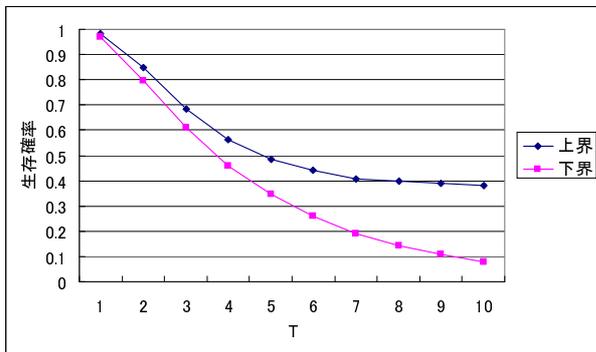


図 16: 幾何 Brown 運動の生存確率の計算結果 ($u = 1.5$)

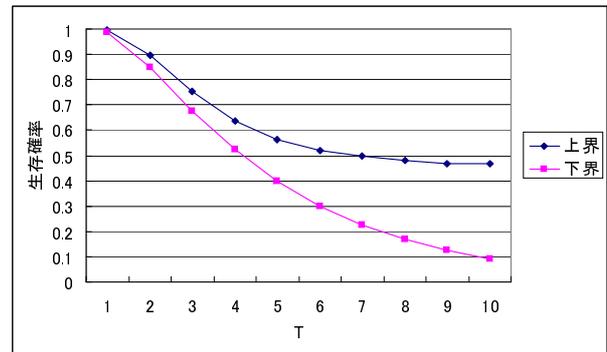


図 17: 幾何 Brown 運動の生存確率の計算結果 ($u = 2.0$)

た結果である。結果は、 u と T の値が大きくなるにつれて上界と下界の差も広がってしまい、生存確率を評価できたとは言い難いものになってしまった。次の 4.4.3 節では、その原因を考察し、制約式の改良を試みる。

4.4.3. 関数とモーメントの再定義

数値計算において良い結果が得られなかった原因を考察する。定式化において拡散過程ごとに違いが現れるのは、基本方程式から導かれる等式制約である。さらに、その中で大きく変化が現れるのは、1つの等式制約中の ν_0 に関するモーメント $m_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, の係数, 添え字, 個数である。例えば, (33) 式を (25), (28), (30) 式と比較すると, (33) 式だけが $m_{i,j}$ の添え字の第 2 成分に s しか現れておらず, このことが良い結果が得られなかった一因と思われる。等式制約の中に現れる $m_{i,j}$ の係数, 添え字, 個数は, 生成作用素 A' と関数 f の形によって定まるが, 生成作用素は与えられた拡散過程に対して一意に決まるものである。そこで, f を異なる形で与えることによって等式制約を書き換えることを考える。関数 f を

$$f(t, y) = \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{1}{1 - \ln(y/u)}\right)^s \tag{34}$$

として, モーメントを

$$\begin{cases} m_{i,j} = \int_{E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{1}{1 - \ln(y/u)}\right)^j \nu_0(dt \times dy), \\ b_{i,j} = \int_{\partial E_0} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{1}{1 - \ln(y/u)}\right)^j \nu_1(dt \times dy), \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \tag{35}$$

によって再定義する. また, (11) 式と同様に $b_{i,j}$ を分割する. すなわち,

$$b_i^{(\text{top})} = \int_{[0,T]} \left(\frac{t}{T}\right)^i \nu_1^{(\text{top})}(dt), \quad b_j^{(\text{rig})} = \int_{(0,u)} \left(\frac{1}{1-\ln(y/u)}\right)^j \nu_1^{(\text{rig})}(dy), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+,$$

とすると, 次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \int_{\partial E_0^{(\text{top})}} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{1}{1-\ln(y/u)}\right)^j \nu_1(dt \times dy) + \int_{\partial E_0^{(\text{rig})}} \left(\frac{t}{T}\right)^i \left(\frac{1}{1-\ln(y/u)}\right)^j \nu_1(dt \times dy) \\ &= \int_{[0,T]} \left(\frac{t}{T}\right)^i \nu_1^{(\text{top})}(dt) + \int_{(0,u)} \left(\frac{1}{1-\ln(y/u)}\right)^j \nu_1^{(\text{rig})}(dy) \\ &= b_i^{(\text{top})} + b_j^{(\text{rig})}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (36)$$

(34) 式の関数 f を選ぶ理由は, y に関して微分するごとに $1/y$ が現れ, (32) 式の右辺第 2, 第 3 項の y, y^2 と相殺することができるからである. このとき (32) 式より,

$$\begin{aligned} A'f(t, y) &= \frac{r}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{r-1} \left(\frac{1}{1-\ln(y/u)}\right)^s + s \left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{1}{1-\ln(y/u)}\right)^{s+1} \\ &\quad + \frac{s(s+1)}{2} \sigma^2 \left(\frac{t}{T}\right)^r \left(\frac{1}{1-\ln(y/u)}\right)^{s+2} \end{aligned}$$

であるから, (21), (35), (36) 式より, 幾何 Brown 運動に対する (33) 式に代わる等式制約として,

$$b_r^{(\text{top})} + b_s^{(\text{rig})} - \left(\frac{1}{1-\ln(y_0/u)}\right)^s 1_{\{r=0\}} - \frac{r}{T} m_{r-1,s} - s \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right] m_{r,s+1} - \frac{s(s+1)}{2} \sigma^2 m_{r,s+2} = 0 \quad (37)$$

を得る.

4.4.4. 再計算結果

(37) 式を用いて再計算した結果を図 18–21 に示す. ただし, $k = 15$ として, 図 18 では $u = 0.5$, 図 19 では $u = 1.0$, 図 20 では $u = 1.5$, 図 21 では $u = 2.0$ とし, それぞれ T の値を変えて計算した結果である. 最初の計算結果と比較して, かなりの改善が見られた. これは等式制約 (33) と (37) を比較すれば明らかのように, 関数 f を再定義した後のほうが制約式に現れるモーメントの数が多く, より強い制約として上界と下界の計算に貢献したためと考えられる. このことは, (6) 式が任意の $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ に対して成立しているにもかかわらず f を多項式に制限してしまうことにより, 想定している測度が定まらなくなるのではないかという推測を実験的に裏付ける結果であると言える. この手法の特徴として, 何次のモーメントまで変数として扱うかという部分と f にどのような関数族を設定するかという部分で問題の緩和を行っている点が挙げられる. 扱う変数を増やすかどうかは計算機の能力に依存するが, 関数族の定め方については今回の実験結果のように工夫の余地が残されている. しかし, 最終的にはモーメントの形にして定式化しなければならないため, 適当な関数族を定めることは容易ではない.

5. おわりに

本稿では, [12, 13] に従って, 拡散過程の生存確率を半正定値計画を用いて評価する手法を提案した. 不確実な現象に対する解析のニーズは今後も高まり, 確率過程によるモデル化も

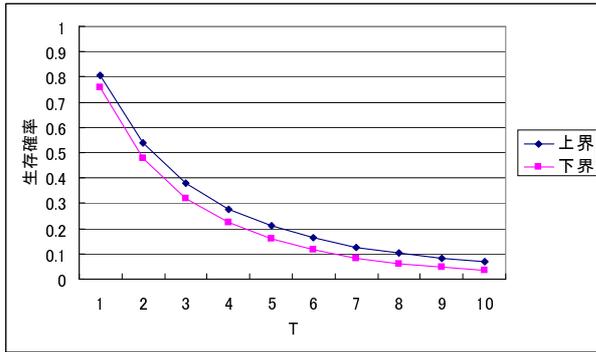


図 18: 幾何 Brown 運動の生存確率の再計算結果 ($u = 0.5$)

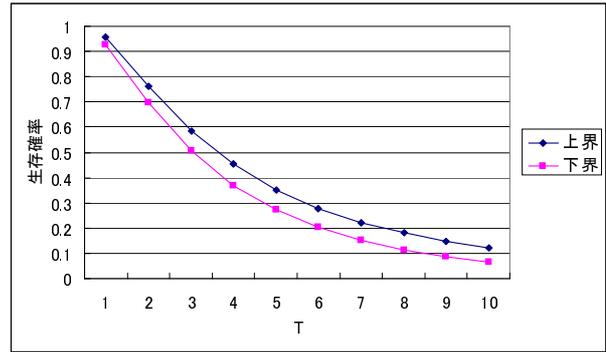


図 19: 幾何 Brown 運動の生存確率の再計算結果 ($u = 1.0$)

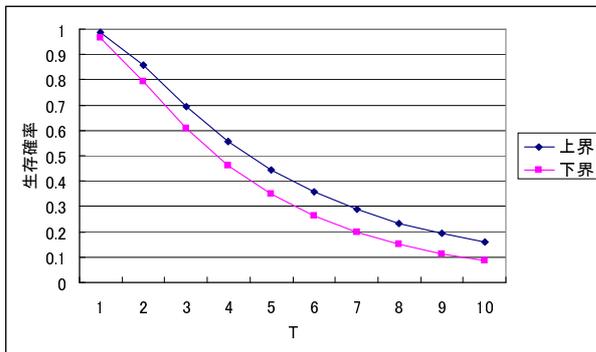


図 20: 幾何 Brown 運動の生存確率の再計算結果 ($u = 1.5$)

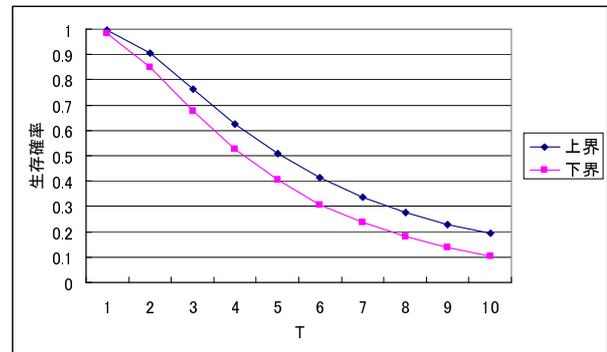


図 21: 幾何 Brown 運動の生存確率の再計算結果 ($u = 2.0$)

その中心的な方法として用いられることが予想される。そして、計算機的能力が向上し、最適化に関する研究も発展を続けているなかで、本稿の手法が今後ますます有用となることが期待できる結果が得られたと言える。ただし、解決しなければならない課題が大きく分けて 2 つ存在する。1 つは計算機的能力に関する問題であり、もう 1 つは幾何 Brown 運動に対する実験で発生したような定式化の問題である。すなわち、

- 使用するモーメントの次数を制限するパラメータ k の値を大きくすると高精度の上界と下界が得られるが (図 4, 5 参照), k の増加に従って半正定値計画問題のサイズ (含まれる行列変数のサイズおよび制約条件数) が指数的に増加する;
- 関数 f の選び方に特定の基準がなく、単項式だけを用いては必ずしも良い結果が得られるとは限らない;

という問題である。前者はより高速な計算機、あるいはアルゴリズムの開発によって解決される問題であるが、後者については、1 つの等式制約に多くの変数が現れたほうが良い結果が得られるということは経験的に分かったが、そのためにどのように関数 f を定めれば良いのかという点で曖昧さが残ってしまい、今後この手法がさらに発展していくうえで重要な問題であると考えられる。

参考文献

[1] D. Bertsimas, K. Natarajan, and C.P. Teo: Probabilistic combinatorial optimization: Moments, semidefinite programming, and asymptotic bounds. *SIAM Journal on Opti-*

- mization, **15** (2004), 185–209.
- [2] D. Bertsimas and I. Popescu: On the relation between option and stock prices: A convex optimization approach. *Operations Research*, **50** (2002), 358–374.
- [3] A.N. Borodin and P. Salminen: *Handbook of Brownian Motion—Facts and Formulae, 2nd Edition* (Birkhäuser Verlag, 2002).
- [4] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross: A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, **53** (1985), 385–407.
- [5] R.E. Curto and L.A. Fialkow: Recursiveness, positivity and truncated moment problems. *Houston Journal of Mathematics*, **17** (1991), 603–635.
- [6] 藤田岳彦, 高岡浩一郎, 塩谷匡介訳: デリバティブ価格理論入門—金融工学への確率解析— (シグマベイスキャピタル, 2001).
- [7] K. Helmes, S. Röhl, and R.H. Stockbridge: Computing moments of the exit time distribution for Markov processes by linear programming. *Operations Research*, **49** (2001), 516–530.
- [8] J.-P. Imhof: Density factorizations for Brownian motion, meander and the three-dimensional Bessel process, and applications. *Journal of Applied Probability*, **21** (1984), 500–510.
- [9] 伊藤清: 確率論 (岩波書店, 1991).
- [10] I. Karatzas and S.E. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd Edition* (Springer-Verlag, 1991).
- [11] M. Kijima: *Stochastic Processes with Applications to Finance* (Chapman & Hall/CRC, 2002).
- [12] J.-B. Lasserre and T. Prieto-Rumeau: SDP vs. LP relaxations for the moment approach in some performance evaluation problems. *Stochastic Models*, **20** (2004), 439–456.
- [13] J.-B. Lasserre, T. Prieto-Rumeau, and M. Zervos: Pricing a class of exotic options via moments and SDP relaxations. *Mathematical Finance*, **16** (2006), 469–494.
- [14] M. Putinar: Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana University Mathematics Journal*, **42** (1993), 969–984.
- [15] D. Revuz and M. Yor: *Continuous Martingales and Brownian Motion* (Springer-Verlag, 1994).
- [16] J.F. Sturm: Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, **11–12** (1999), 625–653.
- [17] U. Sumita, J. Gotoh, and H. Jin: Numerical exploration of dynamic behavior of Ornstein-Uhlenbeck processes via Ehrenfest process approximation. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **49** (2006), 256–278.

三好直人

東京工業大学大学院情報理工学研究科

〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1-W8-52

ABSTRACT**A NUMERICAL METHOD FOR SURVIVAL PROBABILITY OF
DIFFUSION PROCESSES USING SEMIDEFINITE PROGRAMMING**

Kentaro Suzuki Naoto Miyoshi Masakazu Kojima
Tokyo Institute of Technology

Recently, some mathematical programming approaches have been proposed for numerical analysis of stochastic processes. In this paper, we deal with the survival probability of diffusion processes, which is defined as the probability that a sample path of the diffusion process does not exceed a given value during a given time period. First, we formulate a semidefinite programming problem for the survival probability of a given diffusion process. Maximizing or minimizing the objective function representing the survival probability, we can compute upper and lower bounds for it, respectively. The constraints of the problem consist of equations derived from fundamental properties of the diffusion process and positive semidefinite conditions on moments with respect to some measures associated with the first hitting problem of stochastic processes. We confirm effectiveness of the proposed method through numerical experiments on some examples of diffusion processes.