日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research
Society of Japan
2007 年 50 巻 15-41

研究開発プロジェクト選択問題に対する平均・分散アプローチによる資本予算モデル

枇々木規雄
慶應義塾大学

(受理 2004 年 12 月 3 日; 再受理 2006 年 7 月 25 日)

和文概要 本研究では最適な研究開発プロジェクトの選択を行うために，複数の評価者による評点を用いてリスクを考慮した価値評価法を示し，平均・分散アプローチによる 2 種類のタイプの資本予算モデルを構築する．全額配分されるか否かという標準的なタイプの資本予算モデルに加えて，配分される場合には下限を設けた上で配分額を決定するという実際の配分方法を考慮した新しいタイプのモデルを提案する．仮想データを用いた数値実験を行い，これらのモデルの振る舞いを確かめる．

キーワード: リスク管理, 研究開発, プロジェクト選択, ポートフォリオ最適化

1. はじめに

企業が研究開発を行ったり，省庁が研究開発費の配分を行う場合，ある限られた予算の範囲内で複数の候補プロジェクトからいくつかの (複数の) プロジェクトを採択する問題を解く必要がある．具体的には，各プロジェクトを何らかの方法で評価を行い，評価値の高いプロジェクトから選択する，もしくは評価値を用いた資本予算問題 (最適化問題) を解いてプロジェクトを選択する方法が考えられる．資本予算問題は 0-1 型混合整数計画問題として定式化され，最適解を得ることができる．詳細は，Clark, Hindelang and Pritchard[3](第 20 章), ルーエンバーガー [9](第 5 章) を参照されたい．また，Weber, Werners and Zimmermann[13] は，1990 年までに行われた R&D の計画モデルに関するレビューをまとめているが，それ以降もプロジェクトポートフォリオ選択モデルの研究は広く行われている．Kira, Kusy, Murray and Goranson[7] は 0-1 混合整数計画モデルによって最適プロジェクトを選択し，モンテカルロ・シミュレーションによってパラメータの不確実性を評価する意思決定支援システムを提案している．Archer and Ghasemzadeh[1], Ghasemzadeh and Archer[5] は意思決定支援システムを開発し，プロジェクト選択の有用性を検証している．Ghasemzadeh, Archer and Iyogun[4] はプロジェクトは現時点だけでなく将来時点でスタートが可能で，利用可能な資金制約やその他の制約を伴い，複数期間 (のスケジューリング) を考慮したモデルを提案している．

上記に挙げた最適化モデルの多くは，研究開発にはリスクが存在するにも関わらず，明示的にリスクを考慮した研究開発プロジェクトの選択問題として定式化されていない[1]．過去の研究では，著者の知る限り，Ringuest, Graves and Case[11] が平均-Gini 係数を用いた 2 パラメータアプローチによる R&D ポートフォリオの構築方法を提案しているだけである．

[1] Kira, Kusy, Murray and Goranson[7] のように，(選択された) プロジェクトに対する不確実性を評価する方法はいくつか提案されている．

Gini 係数の代わりに分散を用いた方法も示している．ポートフォリオによる研究開発のリスク管理はボイアー [2](第 10 章，第 12 章) でもその重要性が議論されており，より洗練されたポートフォリオ構築モデルは必要である．そこで，本研究では，Ringuest, Graves and Case[11] と同様に，2 パラメータアプローチ (平均・分散，平均・絶対偏差) を用いて，リスクを考慮した実務でも利用可能な研究開発プロジェクトの選択問題のモデル化を行う．平均・分散モデルは金融工学において広く用いられている代表的なポートフォリオ選択モデルである．本研究の特徴を以下に示す．

(1) 評点法の平均・分散モデルへの適用
一般に，研究開発プロジェクトの候補が列挙 (研究資金が申請) されたあと，それらの選択プロセスは大きく，① 研究開発プロジェクトの評価，② 予算配分額の決定 (採択プロジェクトの決定)，の 2 段階に分けられる．本研究ではそれぞれのプロセスにおいて実際に (現実に) 用いることが可能な方法を提案する．現在，リスクを考慮した研究開発プロジェクトの評価法は，2 節でも説明するようにいくつか提案されているが，実務的には確立されたアプローチとは言い難い．そこで，本研究では従来から広く用いられている評点法 (スコア法) に基づいてリスクを考慮した価値評価法を提案する．複数の評価者による評点の平均値をリターン尺度，ばらつきをリスク尺度と考えて，プロジェクトの価値をモデル化する[2]．また，リスク尺度として分散に加えて，絶対偏差を用いた場合も示す．

(2) 0-1 型プロジェクト選択モデル (モデル 1)：予算制約の検討
プロジェクト選択問題を資本予算問題として取り扱う場合，予算制約を含めることは本質的に重要であるにもかかわらず，Ringuest, Graves and Case[11] は予算制約を含めていない．3.1 節で示すように，リスクを考慮した場合には予算制約の取り扱いは注意が必要である[3]．リスクを考慮して，プロジェクト選択の採否を行うモデルの場合，予算制約として上限制約だけでなく下限制約も必要であることを示す．

(3) 実際の配分方法を考慮したモデル (モデル 2)：下限配分比率制約を含むモデル
予算配分額を決定する場合，予算申請額のうち全額認められるとは限らない．しかし，最低限必要な金額よりも配分額が少ない場合には，研究開発そのものに支障が出てくる可能性が高い．そこで，全額配分されるか否かという標準的なタイプの資本予算モデルに加えて，配分される場合には下限を設けた上で配分額を決定するという実際の配分方法を考慮した新しいタイプのモデルを提案し，数値実験を用いて分析する．

(4) 資金配分効果が線形でない場合のモデル化：モデル 2 の一般化
上記のモデルはプロジェクトの評点価値は費用に比例すると仮定し，費用に評点を掛けることによってその価値を計算している．この仮定を緩和して，費用の大きさによって費用一単位あたりの価値の増加額が可変になる評価モデルを提案し，数値実験を用いて分析する．

本論文では，上記の点を明確に示すために，従来の論文で (確定的なモデルの中で取りあげられている) 複数期間にわたる資金制約やプロジェクトの執行スケジュールの問題等を含めて，モデルの定式化や数値分析を行っていない．これらの点に関しては追加的な検討のみを

[2]将来，より精緻な評価法が確立された場合には，本研究で提案した評価法に代わって，得られた評価値 (シナリオ) を資本予算モデルの入力値として用いることができる．
[3]Ringuest, Graves and Case[11] は予算制約を含めることは簡単であると記述している．

最後に行っている．

本論文の構成は以下の通りである．2 節では研究開発のリスク評価を考慮した資本予算問題を検討するために，研究開発と金融工学の類似性について議論する．そして，複数の評価者による評点を用いてリスクを考慮した価値評価法を提案する．3 節では簡単な評点価値関数を用いて，平均・分散アプローチによる 2 種類のタイプの資本予算モデルを構築する．4 節では仮想データを用いた数値実験を行い，各モデルによって得られる最適解の特徴を検討するとともに，結果の考察を行う．5 節では一般的な評点価値関数を用いた場合の定式化を示し，数値分析例を示す．6 節ではモデルの拡張に関する追加的な検討を行う．最後に，7 節で結論と今後の課題を述べる．

2. 研究開発のリスク評価

2.1. 研究開発と金融工学

研究開発のキーワードは，① リターン (期待される研究成果)，② リスク (研究成果の不確実性)，③ 時間，の 3 つであり，将来にわたる不確実性を考慮して，計画期間によって異なる評価基準のもとでダイナミックな意思決定をしなければならない．この特徴は金融工学が直接的に適用できる分野である．金融工学における重要な問題は大きく以下の 2 つに分けられる (ルーエンバーガー [9](第 7 章))．

- 第 1 種の問題：与えられた投資環境のもとで最もよい行動を決定する問題[4]
- 第 2 種の問題：裁定不能なそして公正な資産価格 (資産の均衡価格) を求める問題[5]

すでに金融工学手法は研究開発評価のために用いられ始めている．それは研究開発プロジェクトの評価値を算出するためのリアル・オプションアプローチを用いた評価法であり，第 2 種の問題のタイプである．近年，金融工学手法を用いた技術評価法や知的財産の価値評価法として注目を浴びている．寺本ら [12] には，それらも含めた最新の技術評価法として，他にリターンマップ法，ROI シミュレーション法，オプション理論を応用した技術評価法 (IP-X 社の TRRU メトリクス)，シナリオ分析手法，ディシジョン・アナリシス，というような様々な技術 (プロジェクト) 評価法が紹介されている．ラズガイティス [10] にも先端的手法として，モンテカルロ法，リスク調整済み正味現在価値法，リアル・オプション法が紹介されている．他にも，業界標準法，格付け法，経験則，割引キャッシュ・フロー法，オークション法という合計 6 つの価値評価法を紹介している．

しかし，考え方や基本的な方法は提案されているものの，実際に利用するには様々な問題点がある．現状において実務へ利用するには，まずは第 1 種の問題に利用できる程度の精度を持つ評価法を利用もしくは開発することが重要であると考える．評点法は相対的な価値評価法であるが，相対的な関係を示すことができれば予算配分には利用できる．これが本研究で評点法に基づいた方法を用いる理由である．本研究の目的はポートフォリオ選択モデル (平均・分散モデル) を応用し，リスクを考慮した予算配分決定 (採択プロジェクトの決定) 問題をモデル化することであり，主に第 1 種の問題に焦点を当てる[6]．研究開発手法への金融工学の応用は第 2 種の問題である評価値の算出に焦点が当てられており，前述のようにほと

---

[4]例として，最良のポートフォリオの構築，投資管理のための最適戦略の構築，投資可能なプロジェクト群からの選択を行う問題が挙げられる．

[5]例として，債券価格公式，企業の適正な価値公式，金融派生証券の価格公式などを求める問題が挙げられる．

[6]平均・分散モデルは 1 期間モデルであり，ダイナミックな意思決定を行うためには多期間モデルの構築が必要である．

んど研究されていないのが現状である．

2.2. 評点を用いてリスクを考慮した価値評価法

個々のプロジェクトの評価は一般的に将来のキャッシュ・フローの正味現在価値を用いて行われる．リスク調整済みのキャッシュ・フローを無リスク金利で割り引く，もしくはキャッシュ・フローをリスクを考慮した金利で割り引く方法が用いられる．いずれの方法もリスクを調整して期待値を計算する方法である．一方，プロジェクトのポートフォリオのリスク評価をする場合，プロジェクトの価値 (キャッシュ・フローの現在価値) の確率分布 (シナリオ) が必要である．しかし，研究開発の初期段階におけるキャッシュ・フローの推定の難しさに加え，その確率分布を適切に想定することは難しい．そこで，本研究ではリスクを考慮し，かつ容易に使うことのできる価値評価法を開発することに主眼をおくために，評点法による複数名の評点を価値分布 (シナリオ) とする方法を提案する．評点法を用いた配分方法は広く行われており，スムーズにリスクを考慮した評価法に移行できると考えられるからである．本研究では，以降，評点により算出される価値 (評点価値) を正味現在価値の代理指標と考える．

その方法を示すために，以下に従来の典型的な評点法のプロセスを示す．

① 研究プロジェクトの評価：複数名の専門家による評点付け (スコアリング)

② 評点の総合化：平均値などを求めて順位付け．

③ 予算配分決定 (採択プロジェクトの決定)：評点の高い順番に採択し，予算を配分する．

評点法では複数の評価者によってプロジェクトが評価される．しかし，評点を総合化し，順位付けをする際に複数の評価者のばらつきに関する情報が失われる．それに対し，本研究では，評点を総合化せずに，複数の評価者による評点を直接そのまま利用する方法を提案する[7]．ここで，各評価者は将来に対する独自のシナリオを持っていて，そのもとで評価を行い，シナリオが発生したときには評価者の評点に見合った結果が得られると仮定する．また，各評価者の評点をシナリオ (確率変数) とし，ここでは特に評価者の予想精度に違いがないと考え，各シナリオを等確率と仮定する[8]．

r_{is} をプロジェクト i のシナリオ s の評点，c_i を費用とすると，評点により算出される価値 (評点価値) b_{is} は以下のように評点 r_{is} と費用 c_i の関数として記述する．

$$b_{is} = f\left(r_{is}, c_i\right) \tag{1}$$

3.4 節では簡単のために評点価値は評点と費用に比例して決まる関数を想定し，5 節ではより一般的な関数を想定し，問題の定式化を行う．

3. リスクを考慮した資本予算モデル

3.1. 平均・分散アプローチによる資本予算モデル

一般に資本予算問題とは，ある予算の範囲内で正味現在価値を最大にするプロジェクトの組み合わせを求める問題である．標準的な資本予算問題は以下のように定式化できる．

---

[7] 典型的な評点法は複数の評点の平均値を用いるのに対して，3 節以降，複数の評点の平均値と分散 (リスク) を用いる方法を示す．リスク回避係数を 0 とすると，リスクを考慮しないモデルになるので，提案するモデルには典型的な評点法も含まれている．

[8] 評価者の予想精度に違いがある場合，それをシナリオの発生確率に反映させればよい．

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\
\text{制約条件} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq C \\
& x_i = 0 \text{ または } 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \\
& \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

ここで，n はプロジェクト数，b_i はプロジェクト i の正味現在価値，c_i はプロジェクト i の費用 (個別予算額)，C は利用可能な総予算額，x_i はプロジェクトを採用しないならば 0，採用するならば 1 になる 0-1 変数，X は $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ を制約する一般的な実行可能空間で，たとえばプロジェクト間に相互関係がある場合に設定する制約式などを表す．一般に，研究開発プロジェクトから得られる正味現在価値は不確実であるが，その期待値を用いて定式化し，問題が解かれることが多い．それに対し，本研究では正味現在価値を確率変数として明示的に取り扱い，証券投資におけるポートフォリオ選択問題の代表的なモデルである平均・分散モデルを利用した資本予算問題として定式化を試みる．

平均・分散モデルとは収益率のリスク (分散, もしくは標準偏差) とリターン (期待収益率) を考慮したポートフォリオ選択モデルであり，以下のように問題を定式化する．

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & \overline{r}_p - \lambda \cdot \sigma_p^2 \\
\text{制約条件} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& x_i \geq 0, \ (i = 1, \ldots, n) \\
& \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

ここで，n は資産 (証券) 数，x_i は資産 (証券) i の投資比率. $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$，$\overline{r}_p$ はポートフォリオの期待収益率，σ_p^2 はポートフォリオ収益率の分散，λ はリスク回避係数を表す．資本予算モデルと平均・分散モデルは表 1 のように比較することができる．

表 1: 資本予算モデルと平均・分散モデル

	資本予算モデル	平均・分散モデル
目的関数 (最大化)	$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$	$\overline{r}_p - \lambda \cdot \sigma_p^2$
予算制約式	$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{C}\right) x_i \leq 1$	$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
決定変数制約	$x_i = 0$ または 1	$x_i \geq 0$

資本予算モデルは金額を用いて定式化するため，収益率を用いて定式化される金融工学における平均・分散モデルとは異なるが，プロジェクトは資産 (証券)，正味現在価値は収益率，投資金額は投資比率に対応している．表 1 を参考にして，平均・分散モデルによる資本予算問題の定式化を試みてみよう．$\overline{b}_i$ をプロジェクト i の正味現在価値の期待値，σ_{ij} をプ

ロジェクト i と j の正味現在価値の共分散とすると，ポートフォリオの期待値 $\overline{b}_p$ とポートフォリオの分散 σ_p^2 は以下のように表すことができる．

$$\overline{b}_p = \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i x_i, \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

したがって，平均・分散モデルによる資本予算問題は以下のように定式化できる．

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \overline{b}_p - \lambda \cdot \sigma_p^2 && (2) \\ \text{制約条件} \quad & L \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{C}\right) x_i \leq 1 && (3) \\ & x_i = 0 \text{ または } 1 \ (i = 1, \ldots, n) && (4) \\ & \boldsymbol{x} \in X && (5) \end{aligned}$$

ここで，L を予算の下限比率 $(0 \leq L \leq 1)$ とする．決定変数が 0-1 変数である資本予算問題では，等号制約にすると実行不可能になる可能性が極めて高い．そのため，(3) 式に示すような下限制約も追加して不等号制約で範囲を限定する．

この下限を設定するもう一つの理由は予算を配分する目的を達成することが上限制約だけではできないからである．標準的な資本予算問題では，予算を使えばその分だけ目的関数 (正味現在価値の合計) を大きくすることができるため，上限制約式が制約として効いてくる．一方，平均・分散モデルの場合，$\lambda = 0$ のときはリターン最大化問題になるので，標準的な資本予算問題と同様に利用予算額は上限に近づくが，$\lambda \to \infty$ のときはリスク最小化問題となり，上限制約式のみではすべての i に対して $x_i = 0$，つまり「何もしない (予算を使わない) プロジェクトの組み合わせ」 が最適解となる．リスク値 (分散) は非負なので，ひとつでも $x_i \neq 0$ であるならば目的関数は必ず負になるが，すべての i に対して $x_i = 0$ ならば，目的関数が最大 (分散 $= 0$) になるからである．したがって，リスクを考慮すると λ の値によっては「何もしない (予算を使わない) プロジェクトの組み合わせ」 が最適解となる可能性が高く，それを確実に回避するために下限制約式を設定する．λ を 0 から ∞ に大きくするにつれて，利用予算額も上限から下限に向かって少なくなり，$\lambda \to \infty$ では利用予算額は下限に最も近づく[9]．このように，リスクを考慮した資本予算モデルでは予算制約式の取り扱いは通常の資本予算モデルとは大きく異なり，注意が必要である．

3.2. コンパクト表現によるモデルの定式化

研究開発プロジェクトを評価するために複数のシナリオによって将来の不確実性を記述すると考える．b_{is} をプロジェクト i のシナリオ s における正味現在価値としよう．そのシナリオ・データ b_{is} を直接定式化の中で用いることのできるコンパクト分解表現を以下に示す[10]．

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \overline{b}_p - \lambda \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} y_s^2 \right) \\ \text{制約条件} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_{is} x_i - y_s = \overline{b}_p, \ (s = 1, \ldots, S) \end{aligned}$$

[9]最適解をできるだけ予算上限に近づけるためには，予算下限をできるだけ高く設定する必要があるが，実行不可能になる可能性もあるので，注意が必要である．

[10]一般に評価対象となるプロジェクト数に比べてシナリオ数は少なく設定されることが多いので，解法上もコンパクト分解表現は有利である．

(3)〜(5) 式

ここで，S はシナリオ数を表す．以降，これをモデル 1 と呼ぶ．次に，リスク尺度を分散から絶対偏差に変更してみよう．絶対偏差 w は (6) 式で記述することができる．

$$w \equiv \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left|\sum_{i=1}^{n}(b_{is}-\overline{b}_i)x_i\right| = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left|\sum_{i=1}^{n}b_{is}x_i-\overline{b}_p\right| \tag{6}$$

絶対偏差を用いることによって，0-1 型混合整数線形計画問題として定式化が可能である．また，正規分布に従うならば，標準偏差 σ と絶対偏差 w の間には (7) 式の関係があり [8]，似たような最適解が得られることが期待される[11]．

$$w = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\sigma \tag{7}$$

絶対偏差を用いる場合，次のように定式化することができる．

$$\text{最大化} \quad \overline{b}_p - \lambda\left(\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}y_s\right) \tag{8}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{n}b_{is}x_i + y_s \geq \overline{b}_p,\ y_s \geq 0, (s=1,\ldots,S) \tag{9}$$

(3)〜(5) 式

3.3. 下限配分比率をもつ資本予算モデルの定式化

一般に資本予算問題ではプロジェクトを採択するならば，予算 (費用) は必ずすべて配分されるという前提で問題が定式化される．しかし，研究開発プロジェクトを採択する場合には，申請された予算額を必ずしも全額配分しなくても研究開発を行うことはできる．ただし，研究開発を行うためには最低限必要な資金額はあるので，採択する場合には予算申請額のある比率以上を配分するモデルの構築を試みる．ここでは簡単のため，正味現在価値は費用に比例すると考えると，以下のように問題を定式化することができる．

$$\text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{n}\overline{b}_i\left(\frac{z_i}{c_i}\right) - \lambda\left(\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}y_s^2\right) \tag{10}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{n}\left(b_{is}-\overline{b}_i\right)\left(\frac{z_i}{c_i}\right) - y_s = 0,\ (s=1,\ldots,S) \tag{11}$$

$$M_i x_i \leq \frac{z_i}{c_i} \leq x_i,\ (i=1,\ldots,n) \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = C \tag{13}$$

$$x_i = 0 \text{ または } 1\ (i=1,\ldots,n) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{x} \in X;\quad \boldsymbol{z} \in Z \tag{15}$$

ここで，M_i はプロジェクト i に対する申請額の下限配分比率，z_i はプロジェクト i への配分額，Z は z を制約する一般的な実行可能空間を表す．以降，これをモデル 2 と呼ぶ．

[11] 一般的には，平均からの偏差が大きい値をとる可能性をなるべく少なくしたいのであれば，分散をリスク尺度として使えばよい．一方，平均からの偏差を線形的に評価したいのであれば，絶対偏差を使うのがよいだろう．

3.4. 評点を用いてリスクを考慮した資本予算モデル

2.2 節の考え方に基づいて，評点価値 (評点により算出される価値) を「正味現在価値」の代理指標とし，問題を定式化する．ここでは簡単のため，以下のように評点価値 b_{is} は評点 r_{is} と費用 c_i に比例して決まると想定する．

$$b_{is} = r_{is} c_i, \ \text{すなわち,} \ r_{is} = \frac{b_{is}}{c_i}$$

表 2 と表 3 に，3.2 節と 3.3 節で示した 2 種類のモデルを 2 種類のリスク尺度ごとに定式化を示す．

表 2: モデル 1 : 定式化

リスク尺度	分散	絶対偏差	
最大化	$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i c_i x_i - \lambda \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} y_s^2 \right)$	$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i c_i x_i - \lambda \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} y_s \right)$	
制約条件	$\sum_{i=1}^{n} (r_{is} - \overline{r}_i) c_i x_i - y_s = 0$	$\sum_{i=1}^{n} (r_{is} - \overline{r}_i) c_i x_i + y_s \geq 0$	$(s = 1, \ldots, S)$
		$y_s \geq 0$	$(s = 1, \ldots, S)$
	$L \cdot C \leq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq C$	同左	
	$x_i = 0$ または 1	同左	$(i = 1, \ldots, n)$
	$\boldsymbol{x} \in X$	同左	

表 3: モデル 2 : 定式化

リスク尺度	分散	絶対偏差	
最大化	$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i z_i - \lambda \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} y_s^2 \right)$	$\sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i z_i - \lambda \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} y_s \right)$	
制約条件	$\sum_{i=1}^{n} (r_{is} - \overline{r}_i) z_i - y_s = 0$	$\sum_{i=1}^{n} (r_{is} - \overline{r}_i) z_i + y_s \geq 0$	$(s = 1, \ldots, S)$
		$y_s \geq 0$	$(s = 1, \ldots, S)$
	$M_i c_i x_i \leq z_i \leq c_i x_i$	同左	$(i = 1, \ldots, n)$
	$\sum_{i=1}^{n} z_i = C$	同左	
	$x_i = 0$ または 1	同左	$(i = 1, \ldots, n)$
	$\boldsymbol{x} \in X; \quad \boldsymbol{z} \in Z$	同左	

3.5. モデルの検討

平均・分散モデルは基本的なポートフォリオ選択モデルである．分散は，評点が正規分布に従うか，効用関数が 2 次関数のときに期待効用最大化原理に整合的となるリスク尺度であ

る．したがって，評価者の評点分布が正規分布と見なせない場合，理論的にもデータ分析においても問題が生じる可能性を否定できない．しかし，評点法で得られたデータにより，実際の現場ですぐに使えるモデル化を行うことが本論文の目的の一つであり，上記の問題点よりもリスクを考慮したモデルを分かりやすい形で構築することに主眼を置き，本論文では平均・分散モデルを適用している．

一方，分布形を仮定しないリスク尺度として，下方部分積率や条件付きバリューアットリスクもある．これらのリスク尺度の計算には多くのシナリオ数が必要である．しかし，本モデルで提案する方法は複数名の評点を価値分布として用いるため，評価者数がシナリオ数となり (以降の数値分析では，20 シナリオ，もしくは 20 人の評価者を想定した)，多くのシナリオ数を想定することは難しい．シナリオ数が少なくても，理論的には計算可能であるが，実際には設定するパラメータ (たとえば，下方部分積率であれば，ターゲットレベル) にセンシティブになることが予想される．この点も平均・分散モデルを利用する一つの理由である．評点法で得られる評点の代わりに，正味現在価値の確率分布を想定できるようになれば，モンテカルロ・シミュレーションで多くのシナリオを生成し，分布形を仮定しないリスク尺度を利用することができるだろう．

ところで，Ringuest, Graves and Case[11] の平均-Gini アプローチは平均・分散モデルに比べて，確率優越の視点からは有利であるが，計算量がきわめて多い．ある一つのプロジェクトの組み合わせに対して，シナリオ数 (S 個) の価値を計算し，小さい順番にソートし，累積確率を求め，価値と累積確率の共分散 (の 2 倍) をジニ係数として求める．プロジェクト数を n とすると，2^n 通りの組み合わせに対して，これらの計算を行う[12]．平均-Gini アプローチは平均・分散アプローチと異なり，混合整数計画法を利用して問題を解くことは難しく，ヒューリスティックに解を求めることになる．

4. 仮想データを用いた数値分析

4.1. 設定条件および仮想データの特徴

ランダムに評点や費用を作成した 50 プロジェクト，20 シナリオの仮想データを用いた数値分析を行う．3.4 節に示した 4 種類の分析モデルを用いて最適解を計算する．計算機は IBM ThinkPad, Pentium IV 1.8GHz, 768MB メモリ，数理計画ソフトウェアは NUOPT Ver. 6.0((株) 数理システム) を用いる．パラメータの設定条件は以下のとおりである．

- 予算：$C = 100$(億円) [13]
- モデル 1：$L = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$ (4 種類)
- モデル 2：$M = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$ (4 種類) [14]

効率的フロンティアを生成するために，λ をパラメトリックに変えて解く必要がある．しかし，モデル 1 の場合，λ の設定値によっては予算制約式の下限値にすぐになってしまい，λ の値を設定するのは難しい．そのため，λ をパラメトリックに変えるのではなく，最初にリスク最小化問題 ($\lambda \to \infty$) とリターン最大化問題 ($\lambda = 0$) を解いたあとで，得られた 2 つのリターン値の間のリターン水準 b_E をいくつか設定し，その値を下限とするリスク最小化問題を解くことにする．表 2 および表 3 の目的関数を表 4 に示す目的関数と制約式の組み合

[12] 4 節で分析を行う問題は，$n = 50$, $S = 20$ であり，膨大な組み合わせを計算する必要がある．
[13] すべて採択した場合の総予算額は 238.206(億円) である．各プロジェクトの費用を適当に作成した結果であり，特に数値に意味はない．
[14] 下限配分比率 M_i はすべてのプロジェクトに共通とし，M とする．

わせに書き直せばよい．

表 4: リターン水準 b_E を下限とするリスク最小化問題

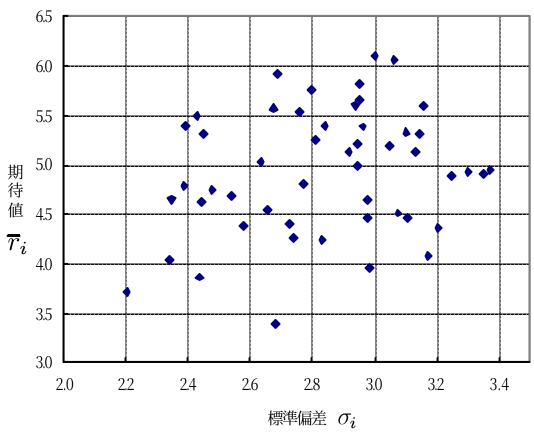
	モデル 1	モデル 2
最小化	$\displaystyle\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} y_s^k$	同左
制約条件	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i c_i x_i \geq b_E$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i z_i \geq b_E$

※ $k=1$ (絶対偏差), $k=2$ (分散)

用いる仮想の評点データの特徴を図 1 に示す．図 1(左) の期待値の平均 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\right)$ は 4.932, 標準偏差の平均 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\right)$ は 2.833 である．一方，予算制約を無視してすべてのプロジェクトを採択する場合のシナリオ s における評点の予算加重平均は (16) 式で表すことができる．

$$r_{ps} = \sum_{i=1}^{n} r_{is}\left(\frac{c_i}{\sum_{k=1}^{n} c_k}\right), \ (s=1,\ldots,S) \tag{16}$$

(16) 式を用いて計算した期待値と標準偏差はそれぞれ，$\overline{r}_p = 4.86$, $\sigma_p = 0.49$ となる．個別プロジェクトの標準偏差の平均に比べて，複数プロジェクトのポートフォリオの標準偏差は小さくなり，暗黙のうちにポートフォリオ効果 (リスク分散効果) を得ることができる．



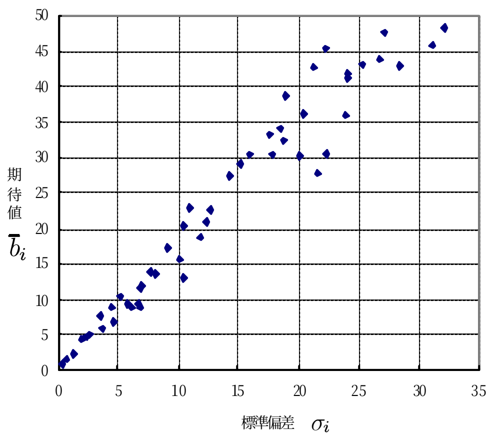


図 1: 評点 (左) および評点価値 (右) の散布図

図 1(右) は評点に予算を掛け合わせたものの散布図である．プロジェクトごとの評点の違いに比べて，予算額の違いが大きいため，左図で見られたばらつきがなくなっている．すべてのプロジェクトを採択する場合の評点価値の期待値と標準偏差はそれぞれ $\overline{b}_p = 1157.57$,

$\sigma_p = 116.65$ である．以降，設定したパラメータに対する結果を示すとともに，モデルの特徴を調べる．

4.2. モデルの比較：結果と考察

4.2.1. モデル 1

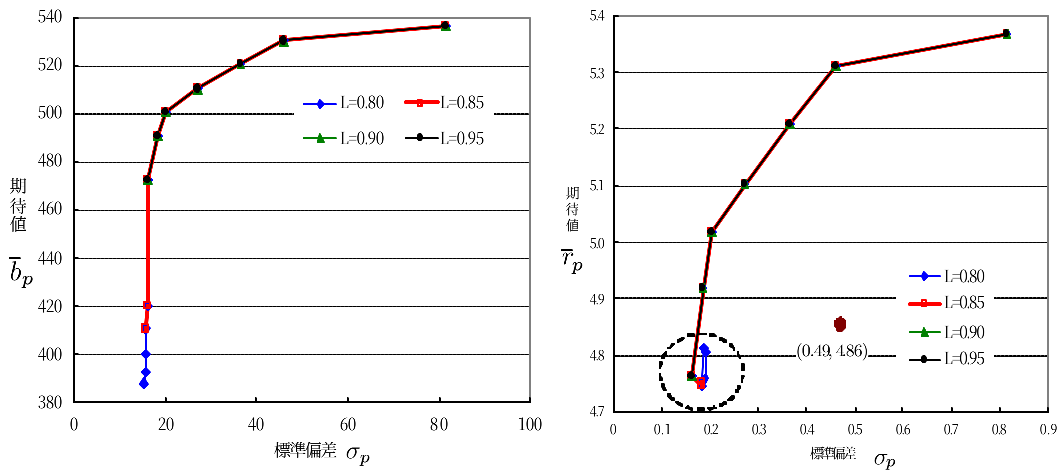


図 2: 評点価値の効率的フロンティア (左) と評点の予算加重平均値のリスク・リターンの関係 (右)

4 種類の L に対して，リスク尺度を分散としたときの問題を解いた結果を図 2 に示す．左図は評点価値を用いて最適計算によって求められた効率的フロンティア，右図は (17) 式を用いて計算される利用予算あたりの評点価値 (採用プロジェクトの評点の加重平均) の期待値と標準偏差の関係を表す[15]．

$$r^*_{ps} = \sum_{i=1}^{n} r_{is} \left(\frac{c_i x^*_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i x^*_i} \right), \quad (s = 1 \ldots, S) \tag{17}$$

左図からも分かるように，期待値 (リターン) と標準偏差 (リスク) の間にはトレードオフ関係を見ることができる．右図は期待値および標準偏差の小さいところでトレードオフ関係が崩れているところが見られる (円で囲まれた部分)．この理由は，連続変数ではなく，0-1 変数を用いているため，b_E の設定値によって異なる総利用予算額で割ったときに生じる現象と考えられる．リスク最小化問題では，予算下限に近づき，リターン最大化問題では予算上限に近づく．予算下限 L の設定値を低くすると，リスクとリターンの小さい最適解が得られる．そのため，予算利用の下限比率を表す L の設定値を上げてもより低い L の値から得られたものと同じ結果が得られる．この理由は，リターン最大化問題では予算上限に近づくことからも分かるように，リスクは大きくなるものの，期待値の水準を大きくするには，より多くのプロジェクトを採用して予算を利用した方がよいからである．このことは，図 3 に示す予算利用率 $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i x^*_i}{C} \right)$ からも確認することができる．予想通り，期待値および標準偏差を大きく設定すると予算利用率も同様に大きくなる．

[15] (0.49, 4.86) は前述したように，予算制約を無視してすべてのプロジェクトを採択する場合の評点の予算加重平均の標準偏差と期待値を表す．

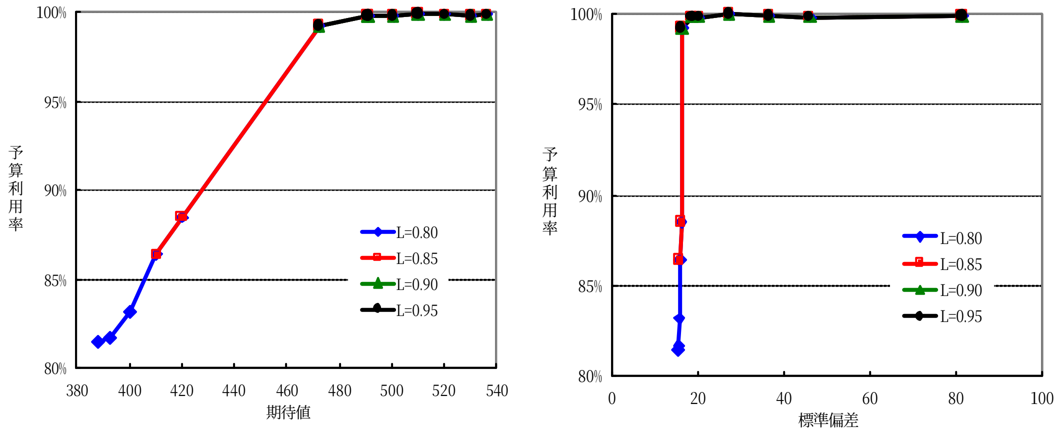


図 3: 予算利用率

表 5: 最適解 ($L = 0.80$)

b_E	min	390	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500	510	520	530	max	平均
計算時間	0.52	0.54	0.50	0.43	0.46	0.42	0.36	0.30	0.29	0.24	0.51	0.24	0.14	0.29	0.19	0.11	0.03	0.33
期待値	388.1	392.8	400.3	410.6	420.1	472.7	472.7	472.7	472.7	472.7	491.1	491.1	500.7	510.2	520.4	530.2	536.4	
標準偏差	15.47	15.60	15.63	15.74	16.17	16.22	16.22	16.22	16.22	16.22	18.52	18.52	20.30	27.29	36.58	45.91	81.45	
予算	81.52	81.71	83.20	86.40	88.55	99.25	99.25	99.25	99.25	99.25	99.80	99.80	99.81	99.99	99.90	99.81	99.90	
予算利用率	0.815	0.817	0.832	0.864	0.885	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.998	0.998	0.998	1.000	0.999	0.998	0.999	回数
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	3
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	7
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	8
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	4
7	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	8
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	7
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	6
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	7
15	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	8
16	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
17	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	13
18	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	11
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4
21	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
22	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
23	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	14
24	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
25	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	6
26	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	15
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	12
31	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	7
32	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	12
33	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	7
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	6
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	16
38	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	7
39	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	2
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	15
43	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
44	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	11
45	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	11
46	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	7
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	14
48	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
計	22	19	21	19	20	22	22	22	22	22	20	20	24	24	22	25	25	

図2と図3からもわかるように，$L=0.80$ のケースはそれよりも大きい L に対するケースの結果を含む．$L=0.80$ の問題に対する最適解を表5に示す．

最適解を見ると，全く採用されないプロジェクトも存在するが，設定した期待値水準によっては採用されるものが多い．個別のプロジェクトごとに採択の理由および採択回数の大小の理由を調べてみよう．図4(左)は評点の期待値(評点平均)および(18)式に示す評点価値の費用当たりの平均共分散と採択の有無(0-1データ)の相関係数を表す[16]．図4(右)は平均共分散と採択回数の関係を示す．

$$\text{平均共分散}\ :\ \overline{\sigma}_i=\frac{1}{c_i}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}=c_k\cdot \mathrm{cov}(\tilde{r}_i,\tilde{r}_k),\ (i=1,\ldots,n) \tag{18}$$

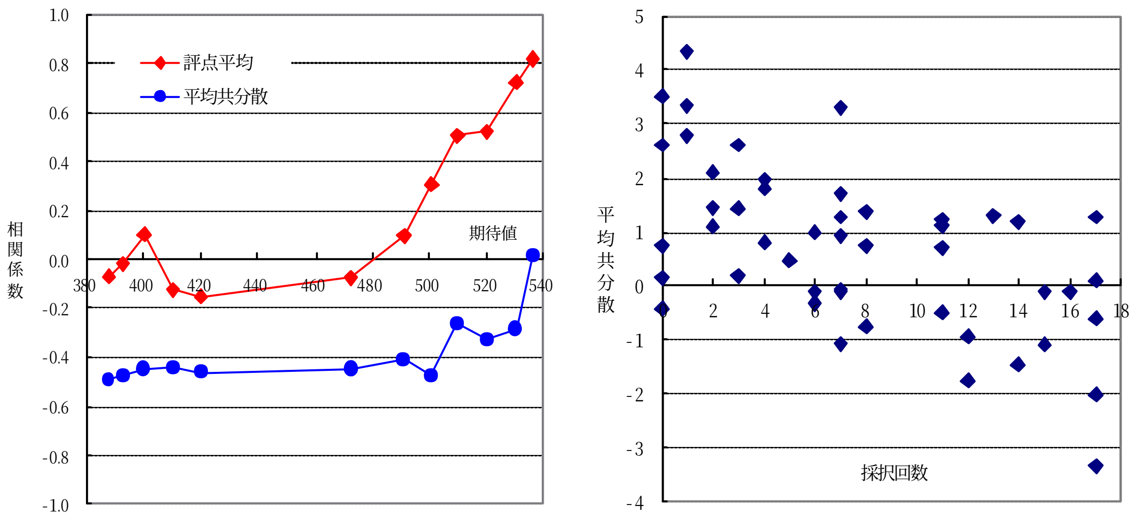


図 4: 採択の有無と評点平均・平均共分散の関係および採択回数と平均共分散の関係

確定的でプロジェクト選択が独立な場合，近似的には利益・費用比率の高いものから選択するとよいため，評点の高いプロジェクトから選択される．評点価値の期待値を最大化して得られた結果(表5の b_E が max の列)を調べてみると，採択されているプロジェクトは評点平均 $\overline{r}_i$ の高い順番に並べて，1〜22, 24, 25, 27番目のプロジェクトが選択されている．このケースではリスクを考慮していないため，確定的な場合の選択基準と同様の考え方で選択される．図4(左)の評点平均の最右点はこのケースを表し，相関係数は0.82である．期待値を高くすると相関係数は高くなるが，低い場合には相関係数は低くなる．これはリスクを考慮することによって，評点平均 $\overline{r}_i$ が高いからといって採択されるとは限らないことを表している．

一方，平均共分散は期待値が低い(リスクが低い)ほど，平均共分散と採択の有無の相関は高くなる．リスク最小化を行った場合，相関係数は -0.49 となる．各プロジェクトの予算額も制約となるので一概には言えないが，ポートフォリオ理論からも分かるように[17]，リスクを減少させるためには平均共分散が小さいほど採択されやすいという特徴は保たれる．

[16]実数値と2値データの間の相関係数の大きさにはあまり強い意味を持たせることはできないが，簡単に関係を見るために用いる．
[17]共分散の大きさが，ポートフォリオによる分散効果(リスク減少効果)に影響を与える．

このことを図4(右) を用いて，採択回数との関係で見てみよう．平均共分散が小さくなるほど採択回数が増加する傾向が見られる．相関係数は $= -0.604$ である．

また，計算時間の平均は 0.33 秒である．50 プロジェクト，20 シナリオでも 1 秒以下で問題を解くことができ，実務的にも問題ないだろう．

前述のように，確定的でプロジェクト選択が独立な場合，近似的には評点の高いプロジェクトから選択され，予算を利用することになる．すなわち，ある予算で採用されるプロジェクトは，その水準以上でも採用されることが近似的に期待される．そこで，予算を変更したときにどのようにプロジェクト選択が行われるかを調べてみよう．予算を変更すると，期待値や標準偏差の水準も変わり，比較するのは難しいので,「期待値最大化」と「リスク最小化」の問題を解き，予算の変更とともに選択されるプロジェクトの推移を見てみよう．期待値最大化問題は予算制約は上限が制約となるので，(3) 式を (19) 式に置き換え，リスク最小化問題は下限が制約となるので (3) 式を (20) 式に置き換え，予算額を C として問題を解く[18].

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq C \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq C \tag{20}$$

図 5 に予算額を $C = 80, 90, \ldots, 220, 230$ としたときに採択されるプロジェクトの推移を示す．黒塗りの部分は $x_i = 1$(採択) を表す．期待値最大化問題は前述のように，リスクを考慮せずに評点平均のみで確定的にプロジェクトを選択する問題と同じ基準である．したがって，図 5(左) を見ると，予算が少ないときに採択されていたプロジェクトは予算が増えても採択されやすいことが分かる．一方，図 5(右) を見ると，リスクを考慮する場合にも同様の傾向を見ることはできるが，必ずしもそうなるとは限らない．この理由はプロジェクト間に存在する相関がリスクに影響を与えるからである．同様の傾向が見える理由は期待値最大化の場合と同じ理由ではなく，図 6(左) を見ると分かるように，予算が増えると選択プロジェクト数が増加するからである．図 6(右) を見ると，予算を変更したときでも期待値最大化では評点平均の相関係数が，リスク最小化では平均共分散の相関係数の絶対値が高いことが分かる．

紙面の都合上省略するが，リスク尺度を分散から絶対偏差に変更した場合も期待値と絶対偏差の間にはトレードオフの関係があり，期待値を大きくすると予算利用率も高まるというように，分散の場合とほぼ同様の特徴が見られる．

[18]必ずしも費用合計は予算額になるとは限らないが，予算額に近くなる．

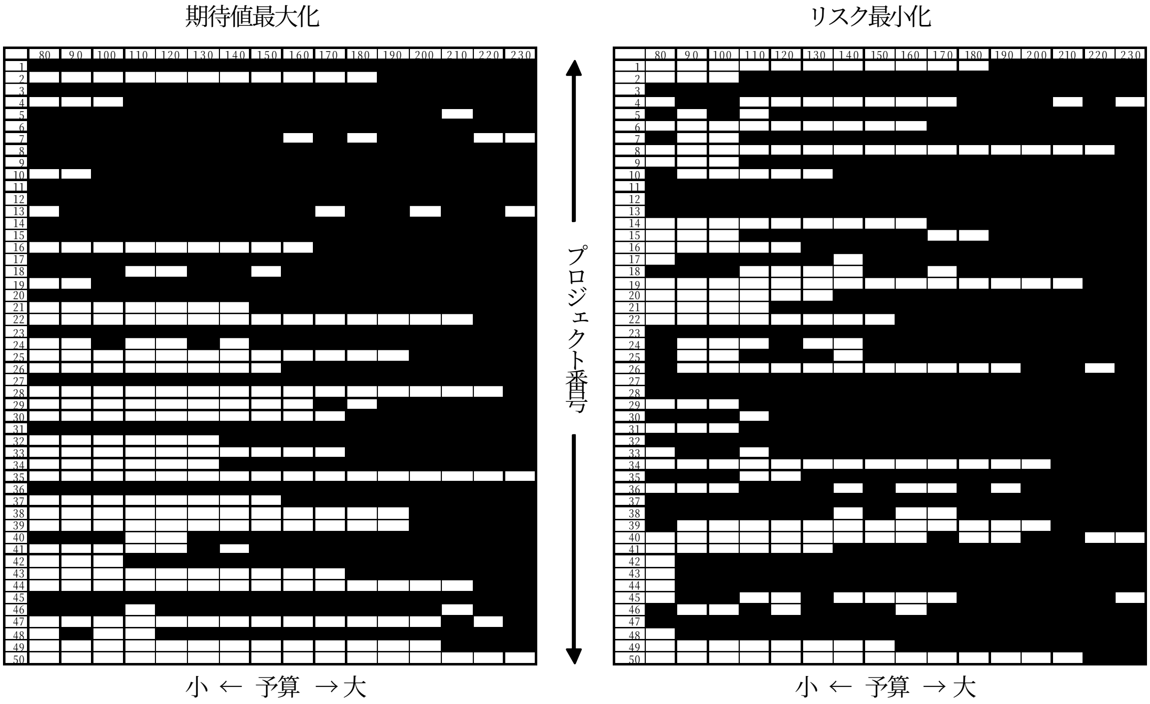


図 5: 予算を変更したときの採択されるプロジェクトの推移

図 7 を用いて分散と絶対偏差を用いた場合の最適解の違いを示す．期待値の水準によっては，平均・分散モデルと平均・絶対偏差モデルは同じ最適解を算出する場合もあるが，60%程度しか同じでない場合もあり，リスク尺度によって結果が異なる様子が見てとれる．このことをリスク尺度の上で確認してみよう．両モデルの最適解を用いて標準偏差を横軸にしたグラフを図 8 の左図，絶対偏差を横軸にしたグラフを右図に示す．

平均・絶対偏差モデルによって計算される標準偏差と平均・分散モデルによって計算される絶対偏差の値はそれぞれ平均・分散モデルによる標準偏差と平均・絶対偏差モデルによる絶対偏差よりも大きくなる．ただし，平均・分散モデルによる絶対偏差の方が平均・絶対偏差モデルによる絶対偏差に近い値をとることがわかる．

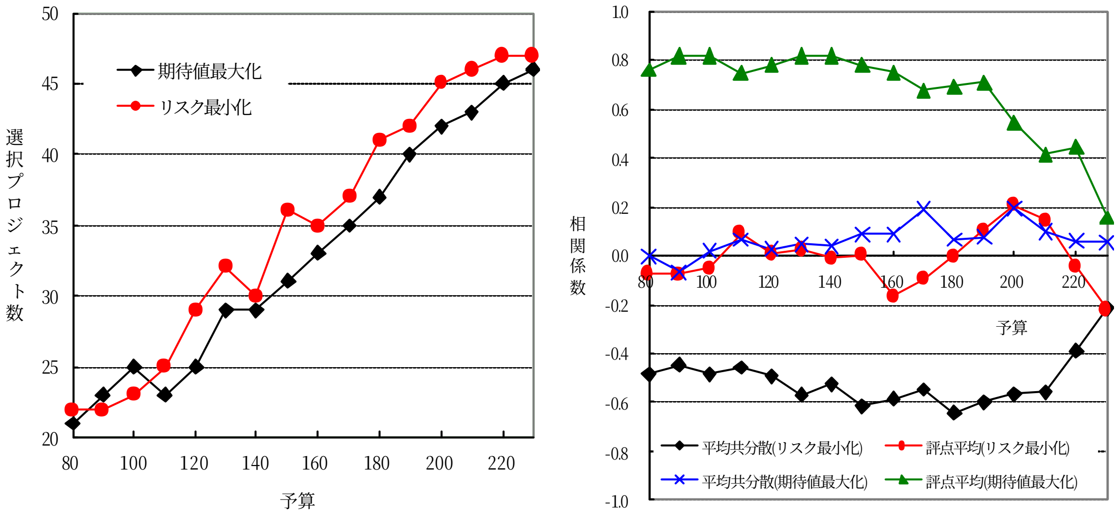


図 6: 選択プロジェクト数および採択の有無と評点平均・平均共分散の関係

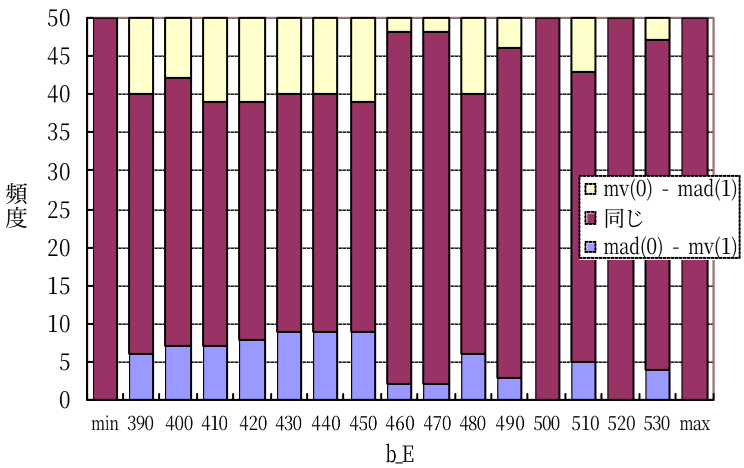


図 7: 分散と絶対偏差の違いによる採用プロジェクトの違い

4.2.2. モデル 2

$M=0$ を含む 5 種類の M に対して[19]，リスク尺度を分散とする問題を解いた結果を図 9 に示す．図 9 より，下限配分比率 M を小さくすると，配分の自由度が上昇するので，効率的フロンティアは左上にシフトする．また，$M=1$ の場合のモデル 2 は，モデル 1 に相当する．したがって，M を大きくすると，図 2(左) の効率的フロンティアに近づく．

次に，(21) 式で計算される配分下限ごとの平均配分率を図 10 に示す．左図は横軸に評点価値の期待値，右図は横軸に標準偏差を用いる．

$$\text{平均配分率} = \frac{1}{|H|}\sum_{i\in H}\frac{z_i^*}{c_i}, \quad \text{ただし，} H=\{i|x_i^*=1\} \tag{21}$$

ここで，$|H|$ は集合 H に含まれるプロジェクト数を表す．M を大きくするにつれて，平均配分率も大きくなる．

[19] $M=0$ は予算額を完全に連続変数として扱うことと等価である．

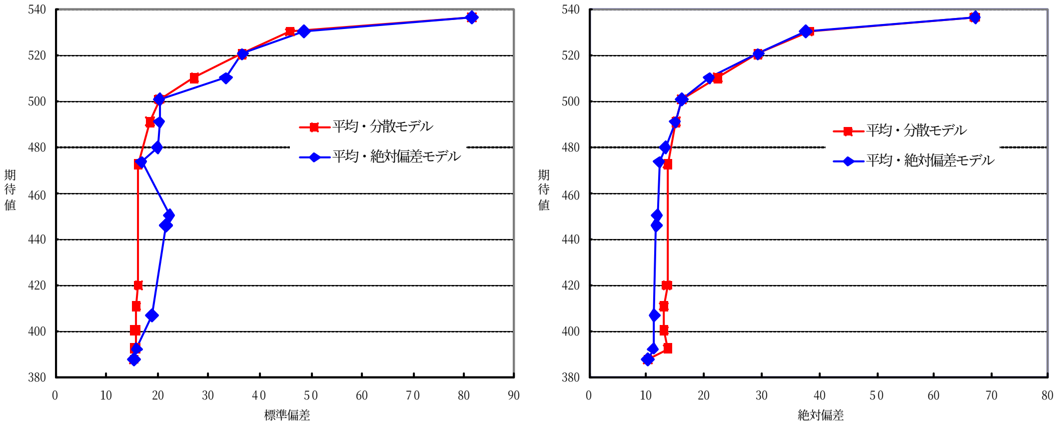


図 8: 効率的フロンティアとリスク尺度

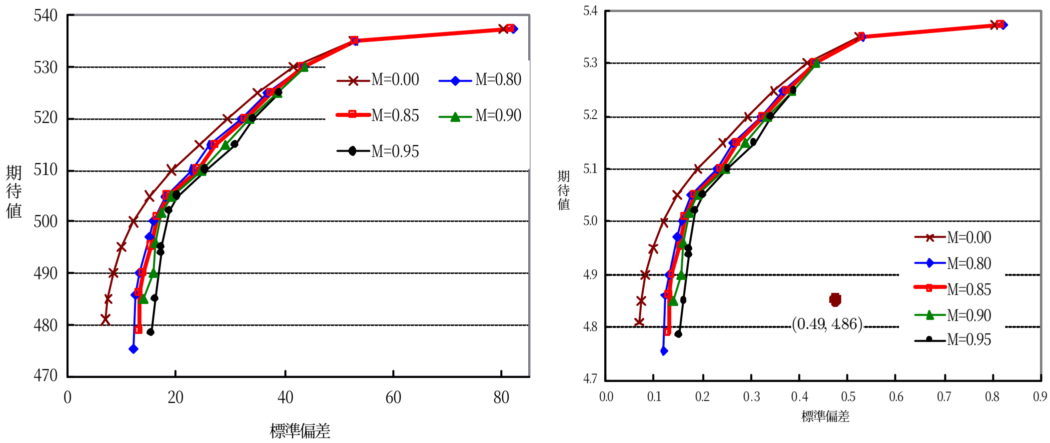


図 9: 評点価値の効率的フロンティア (左) と予算加重平均値のリスク・リターンの関係 (右)

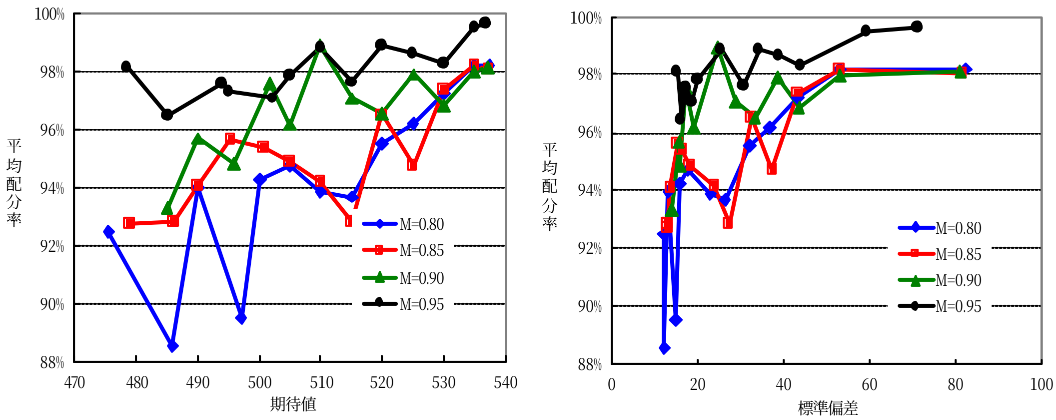


図 10: 平均配分率

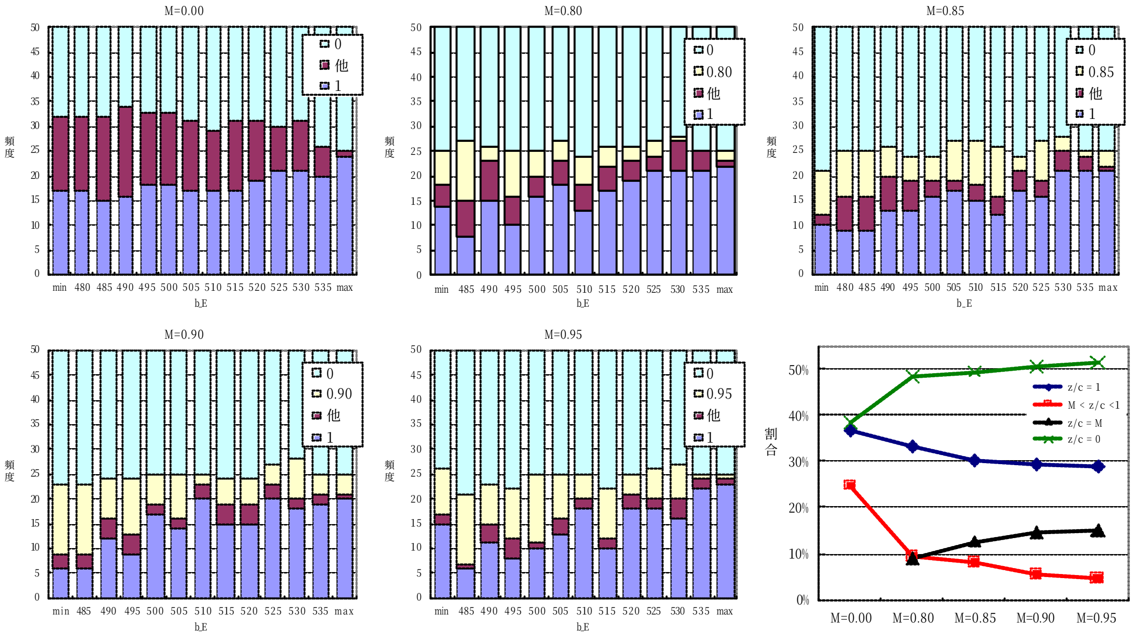


図 11: 配分比率ごとの採用プロジェクト数

配分比率の分布を調べるために，5 種類の M に対する配分比率 $\left(\frac{z_i^*}{c_i}\right)$ ごとの採用プロジェクト数を図 11 に示す．右下図は M ごとの平均割合を表す．予算全額 $(\frac{z_i^*}{c_i} = 1)$ に投資するプロジェクト数は，下限値 $(\frac{z_i^*}{c_i} = M)$ や中間値 $(M < \frac{z_i^*}{c_i} < 1)$ をとるプロジェクト数に比べて多いことが分かる．M が大きくなるにつれて，中間値を取る割合が減ってきて，M の値を取る割合が増える傾向にある．

また，分散と同様の結果を絶対偏差の場合もほぼ同様の特徴をみることができる．紙面の都合上省略する．

5. 一般的な評点価値関数による定式化

3.4 節では簡単のため，評点価値は費用に比例すると考え，費用に評点を掛けることによってその価値を計算した．本節では費用に比例して価値が増加する (収穫一定) という仮定を緩くして，費用の大きさによって費用一単位あたりの価値の増加額が可変になる評価方法を考える．そのため，一般的な評点価値関数を用いた定式化の方法について検討する．

評点 r_{is} と予算額 c_i を用いてどのような関数形を想定するかによって評点価値の大きさは異なる．モデル 1 では，評点価値関数 f の形状に関わらず，予算額 c_i に対する評点価値 b_{is} を計算できるので，定式化には影響を与えない．それに対し，モデル 2 では，関数 f の形状を決める必要があるとともに，定式化を変更しなければならない．ここでは，区分線形関数によって評点価値関数を記述すると仮定して，モデル 2 に対する定式化の方法を示す．区分線形関数を用いる理由は一般的な関数を線形近似できることに加え，(制約式を非線形にしないので) 通常の 0-1 型混合整数線形計画法のアルゴリズムを利用できるという解法上のメリットがあるからである．5.3 節では，N 次関数の線形近似方法について議論し，5.4 節で評点価値関数が 2 次関数 (の線形近似) の場合の数値分析例を示す．

5.1. 1 段階区分線形評点価値関数

最も簡単な区分線形関数として，図 12 に示すようなプロジェクト i に対する申請額の下限配分比率 M_{0i} で区分されている 1 段階区分線形評点価値関数による定式化を示す．η_{0i}, η_{1i} はそれぞれ評点の比例係数を表す[20]．

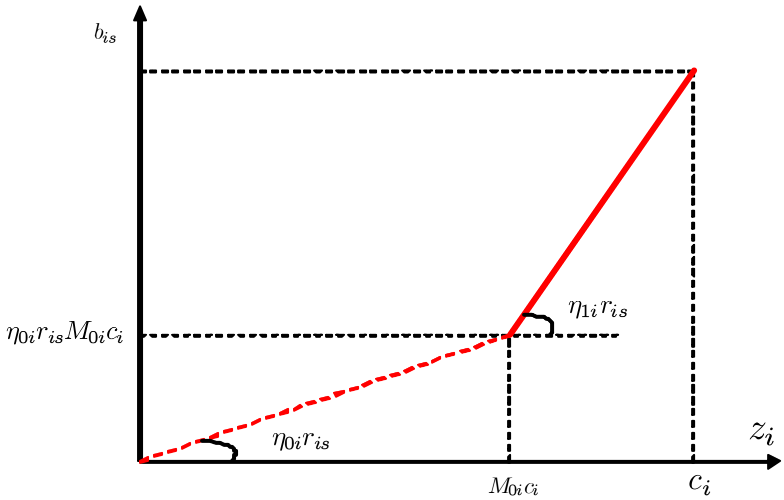


図 12: 1 段階区分線形評点価値関数

評点価値関数は (22) 式で表すことができる[21]．

$$b_{is}(z_i) = \{M_{0i}r_{is}c_i(\eta_{0i} - \eta_{1i}) + \eta_{1i}r_{is}z_i\}\, I_{\{M_{0i}c_i \le z_i \le c_i\}} \tag{22}$$

ここで，$I_{\{a\}}$ は条件 a が成り立てば 1，成り立たなければ 0 を表す定義関数とする．したがって，分散をリスク尺度とするモデル 2 は以下のように定式化することができる．

$$\text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \{M_{0i}c_i(\eta_{0i} - \eta_{1i})x_i + \eta_{1i}z_i\} - \lambda\left(\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} y_s^2\right) \tag{23}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{n} (r_{is} - \overline{r}_i)\{M_{0i}c_i(\eta_{0i} - \eta_{1i})x_i + \eta_{1i}z_i\} - y_s = 0, \ (s = 1, \dots, S) \tag{24}$$

$$M_{0i}c_ix_i \le z_i \le c_ix_i, \ (i = 1, \dots, n) \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = C \tag{26}$$

$$x_i = 0 \text{ または } 1 \ (i = 1, \dots, n) \tag{27}$$

5.2. m 段階区分線形評点価値関数

次に，区分数を m 個に設定した m 段階区分線形評点価値関数に拡張してみよう．図 13 の 2 段階区分線形関数を用いて一般的なモデル化の方法を説明する．

[20] $\eta_{0i} = \eta_{1i} = 1$ のときは，3 節で示した線形関数となる．

[21] $z_i = M_{0i}c_i$ における b_{is} の値は $\eta_{0i}r_{is}M_{0i}c_i$ となるので，$M_{0i}c_i$ から c_i までの直線の切片を α とすると，

$$\eta_{0i}r_{is}M_{0i}c_i = \alpha + \eta_{1i}r_{is}M_{0i}c_i$$

が成り立ち，$\alpha = M_{0i}r_{is}c_i(\eta_{0i} - \eta_{1i})$ と求めることができる．したがって，(22) 式を得ることができる．

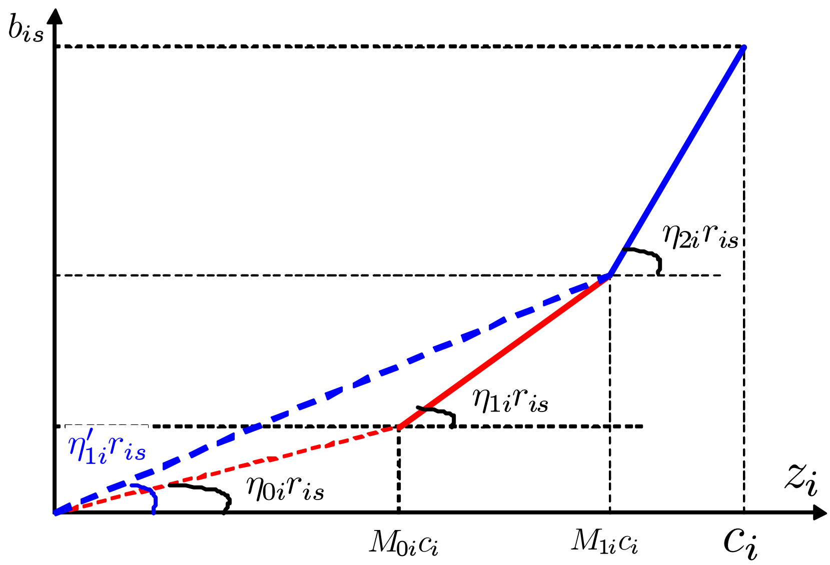


図 13: 2 段階区分線形関数

一般に凸関数の最小化問題として 2 段階以上の区分線形関数を取り扱う場合，決定変数を各区間ごと (図 13 の場合，$M_{0i}c_i$〜$M_{1i}c_i$, $M_{1i}c_i$〜c_i) に区切り，その和をもとの決定変数 (ここでは z_i) とするのが定石である．$\eta_{0i} \leq \eta_{1i} \leq \eta_{2i} \leq \cdots$ の場合にはこの定石を使うことができる．しかし，図 13 からも分かるように，$\eta_{0i} \geq \eta_{1i} \geq \eta_{2i} \geq \cdots$ の場合には，凸関数の最大化問題となるので，この定石を使うことができない．そこで，図 13 の 2 段階区分線形関数をもつプロジェクトを

- 下限比率 M_{0i}, 上限比率が M_{1i} の 1 段階区分線形関数をもつプロジェクト (1)
- 下限比率 M_{1i}, 上限比率が 1 の 1 段階区分線形関数をもつプロジェクト (2)

の 2 つの仮想的なプロジェクトを考え，どちらかのプロジェクトしか選択しないという排他条件を入れることによって，2 段階区分線形関数をもつプロジェクトをモデル化する．プロジェクト (1),(2) の採否を表す 0-1 変数をそれぞれ x_{1i}, x_{2i}，配分額を表す変数を z_{1i}, z_{2i} とすると，評点価値は以下のように定式化することができる．

$$
\begin{aligned}
b_{is}(z_{1i}, z_{2i}) &= b_{1is}(z_{1i}) + b_{2is}(z_{2i}) && (28)\\
b_{1is}(z_{1i}) &= M_{0i}r_{is}c_i\,(\eta_{0i} - \eta_{1i})\,x_{1i} + \eta_{1i}r_{is}z_{1i}, \quad M_{0i}c_ix_{1i} \leq z_{1i} \leq M_{1i}c_ix_{1i} && (29)\\
b_{2is}(z_{2i}) &= M_{1i}r_{is}c_i\,(\eta'_{1i} - \eta_{1i})\,x_{2i} + \eta_{1i}r_{is}z_{2i}, \quad M_{1i}c_ix_{2i} \leq z_{2i} \leq c_ix_{2i} && (30)\\
& x_{1i} + x_{2i} \leq 1, \quad x_{1i}, x_{2i} = 0 \text{ または } 1 && (31)
\end{aligned}
$$

ここで，$\eta'_{1i} = \eta_{1,i} - \frac{M_{0i}}{M_{1i}}(\eta_{1i} - \eta_{0i})$ である．(31) 式の条件より，x_{1i}, x_{2i} のどちらか 1 つしか 1 をとることができない．したがって，(29), (30) 式より，z_{1i}, z_{2i} もどちらか 1 つしか正の値をとることができず，それがプロジェクト i の配分額 z_i となる．$z_i = \max(z_{1i}, z_{2i})$，もしくは $z_i = z_{1i} + z_{2i}$ と書くことができる．

一般に，m 段階区分線形関数で，配分額を割り当てることのできる区分の集合を K_i とす

ると[22]，評点価値は以下のように定式化することができる．

$$
\begin{aligned}
b_{is}(\boldsymbol{z}_i) &= \sum_{k\in K_i} b_{kis}(z_{ki}) && (32)\\
b_{kis}(z_{ki}) &= M_{k-1,i} r_{is} c_i \left(\eta'_{k-1,i} - \eta_{ki}\right) x_{ki} + \eta_{ki} r_{is} z_{ki},\ (k\in K_i) && (33)\\
& M_{k-1,i} c_i x_{ki} \le z_{ki} \le M_{ki} c_i x_{ki},\ (k \in K_i),\ \text{ただし},\ M_{mi}=1 && (34)\\
& \sum_{k\in K_i} x_{ki} \le 1, \quad x_{ki}=0\ \text{または}\ 1\ (k\in K_i) && (35)
\end{aligned}
$$

ただし，$\boldsymbol{z}_i = (z_{1i},\ldots,z_{mi})^T$，$\eta'_{k-1,i} = \eta_{k-1,i} - \dfrac{1}{M_{k-1,i}} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-2} (\eta_{j+1,i} - \eta_{ji}) M_{ji}$ とする．プロジェクト i の配分額 z_i は $z_i = \max_k\ z_{ki}$ もしくは $z_i = \sum_{k\in K_i} z_{ki}$ となる．したがって，分散をリスク尺度とした m 段階区分線形評点価値関数を用いたモデル 2 は以下のように定式化することができる．

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \left[\sum_{k\in K_i} \left\{ M_{k-1,i} c_i \left(\eta'_{k-1,i} - \eta_{ki}\right) x_{ki} + \eta_{ki} z_{ki} \right\} \right] - \lambda \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} y_s^2 \right)\\
\text{制約条件}\quad & \sum_{i=1}^{n} (r_{is} - \overline{r}_i) \left[\sum_{k\in K_i} \left\{ M_{k-1,i} c_i \left(\eta'_{k-1,i} - \eta_{ki}\right) x_{ki} + \eta_{ki} z_{ki} \right\} \right] - y_s = 0,\\
& \qquad (s=1,\ldots,S)\\
& M_{k-1,i} c_i x_{ki} \le z_{ki} \le M_{ki} c_i x_{ki},\ (k\in K_i;\ i=1,\ldots,n)\\
& \sum_{k\in K_i} x_{ki} \le 1,\ (i=1,\ldots,n)\\
& \sum_{k\in K_i} \sum_{i=1}^{n} z_{ki} = C\\
& x_{ki} = 0\ \text{または}\ 1\ (k\in K_i;\ i=1,\ldots,n)
\end{aligned}
$$

5.3. N 次関数の線形近似

下限配分比率 M_{0i} 以外の区分点 $M_{1i},\ldots,M_{m-1,i}$ および評点の比例係数 $\eta_{0i},\ldots,\eta_{mi}$ を決定し，区分線形関数を設定することは一般的には難しいかもしれない．そこで，評点価値関数を N 次関数と考え，それを区分線形関数で近似する方法を説明する．ここでは，配分額 c_i に対する評点価値 b_{is} を簡単のため，$r_{is}c_i$ とし，図 14 に示すような $(0,0)$, $(c_i, r_{is}c_i)$ を通る N 次関数の線形近似関数に対する評点の比例係数を計算する．

N 次関数は (36) 式で記述することができる．

$$
f(z_i) = \left(\frac{r_{is}}{c_i^{N-1}} \right) z_i^N = r_{is} c_i \left(\frac{z_i}{c_i} \right)^N \tag{36}
$$

η_{ik}, η'_{ki} は以下のように計算することができる．

$$
\eta_{0i} \;=\; \frac{f(M_{0i}c_i)}{M_{0i}c_i r_{is}} = M_{0i}^{N-1}
$$

[22] $M_{0i}c_i$ 以上すべての区間で割り当てることが可能な場合，$K_i = \{1,\cdots,m\}$ となる．また，プロジェクト i によって区分数を可変とし，m_i とすることもできる．

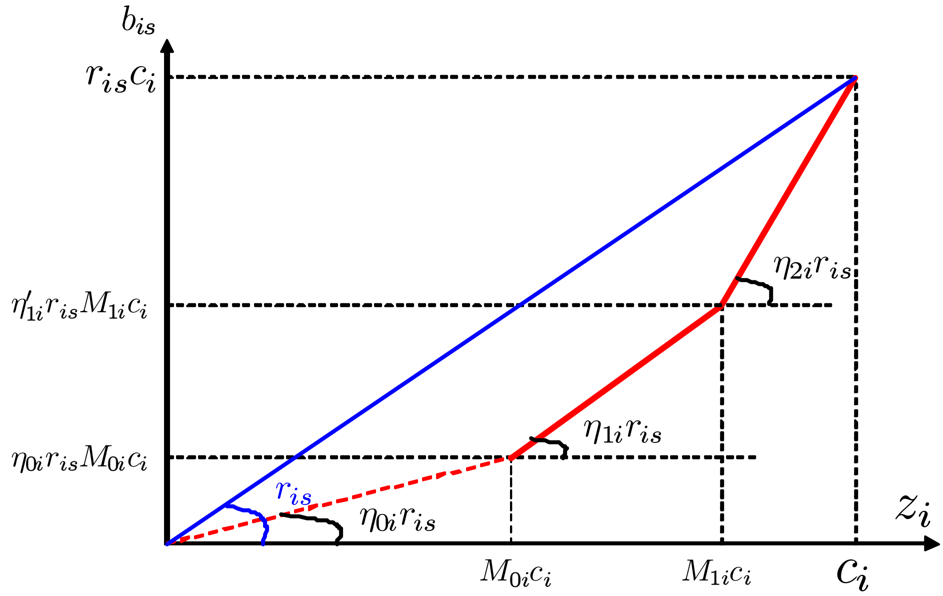


図 14: N 次関数の m 段階線形近似関数

$$\eta_{ki} = \frac{f(M_{ki}c_i) - f(M_{k-1,i}c_i)}{(M_{ki} - M_{k-1,i})c_i r_{is}} = \frac{M_{ki}^N - M_{k-1,i}^N}{M_{ki} - M_{k-1,i}} = \sum_{p=0}^{N-1} M_{k-1,i}^p M_{ki}^{N-p-1}, \ (k = 1, \ldots, m)$$

$$\eta'_{ki} = \frac{f(M_{ki}c_i)}{M_{ki}c_i r_{is}} = M_{ki}^{N-1}, \ (k = 1, \ldots, m)$$

5.4. 数値分析

評点価値関数が 2 次関数で，1 段階 $(m = 1)$ および 2 段階 $(m = 2)$ の区分線形関数近似を行った場合の数値分析例を示す．データおよび設定は 4 節と同じである．紙面の都合上，平均・分散モデルの結果のみを示す．

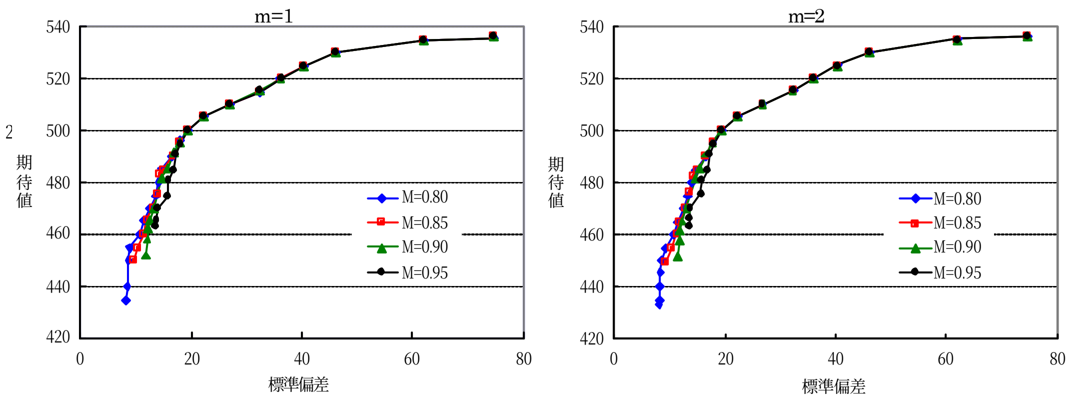


図 15: 評点価値の効率的フロンティア

図 15 に効率的フロンティアを示す．左図は 1 段階，右図は 2 段階の近似を行った場合である．図 9 と同様に下限配分比率 M を大きくすると，効率的フロンティアは右下にシフトする．2 段階近似の方が近似精度が高いので，2 次関数のような凸型関数では評点価値の近似値は小さくなり，非常に僅差であるが効率的フロンティアは右下になる．図 16 の左図に $M = 0.80$ の場合の配分比率ごとの採用プロジェクト数を示す．リターン水準 (評点価値の

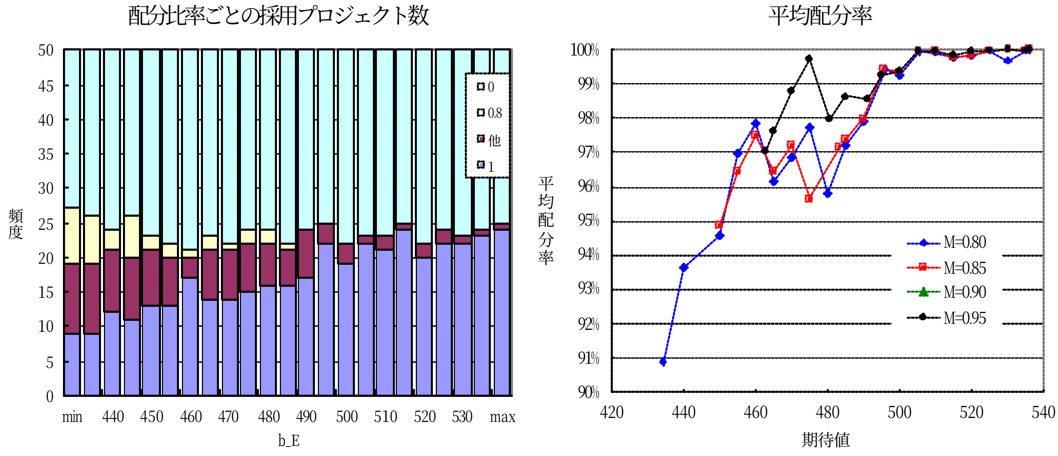


図 16: 採用プロジェクト数と平均配分率

期待値) b_E を大きくするにつれて，予算全額に投資する (配分比率が 1 である) プロジェクト数が増加する．この理由は，凸型関数は配分比率が高ければ高いほど予算額に対する評点価値の増加割合が大きくなるからである．低いリターン水準を要求された場合には，リスクを小さくするために分散効果が重視される．しかし，リターン水準が高い場合には同じ予算額に対して相対的に評点価値を高めるために配分比率を高め，その結果，配分比率が 1 となるプロジェクトが増えたと考えられる．また，図 16 の右図は 4 種類の下限配分比率 M に対する平均配分率を表す．期待値が大きくなるにつれて，平均配分率も大きくなり，1 に近づくことが分かる．

配分比率が必ず 1 となるのがモデル 1 である．そこで，モデル 1 とモデル 2 の効率的フロンティアを比べるために，図 17 を見てみよう．左図の $M = 0.80$ の場合を見ると，価値関数の期待値の大きいところでは，モデル 2 の 2 次関数近似の効率的フロンティアはモデル 1 とほぼ重なっている．また，評点価値が費用に比例する線形関数は，2 次関数近似よりも高い期待値を持つことになるので，効率的フロンティアは左上に位置する．次に，右図の $M = 0.95$ の場合を見てみよう．4.2.2 項でも述べたように，$M = 1$ のモデル 2 はモデル 1 と同じである．したがって，関数形にかかわらず，M が大きい場合にはモデル 1 に近づく．右図でそのことを確認することができる．

ところで，モデル 1 は N 次価値関数において $N \to \infty$ とした関数に相当すると考えることができる．したがって，N 次の評点価値関数はモデル 1 とモデル 2 の中間に位置する価値関数と考えることもできる．

6. モデルの追加的な検討

提案したモデルは基本モデルであり，通常のプロジェクト選択問題で導入されているいくつかの制約条件を明示的には含めていない．この理由はリスクを考慮した基本モデルに焦点を当てるためである．そこで，本節では以下の 3 点について検討する．

(1) 期間ごとの資金制約条件

1 期間ではなく，複数の期間にわたり，予算上限が設定されることがある．その場合も通常の資本予算問題と同様に，予算制約式を多期間にわたって導入すればよい．3.3 節のモデル 2 の場合，

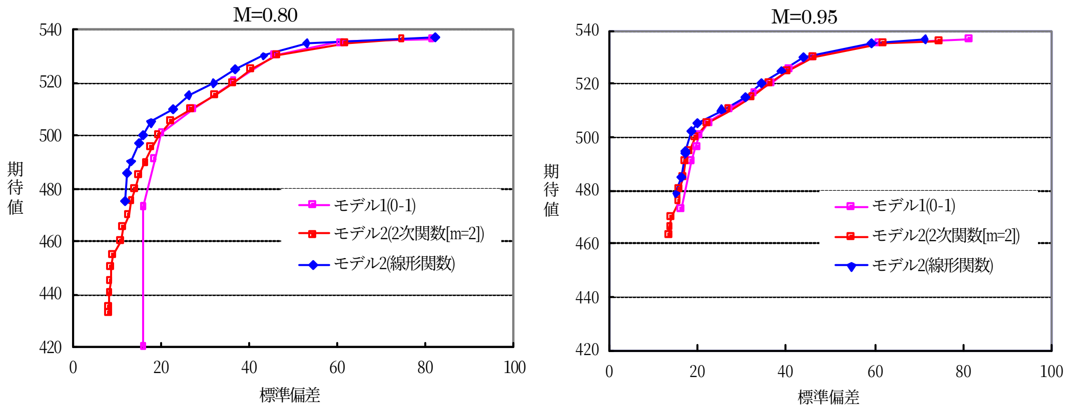


図 17: 効率的フロンティア

T : 期間数

C_t : 期間 t に利用可能な予算上限

z_{it} : 期間 t におけるプロジェクト i への配分額 (決定変数)

とすると，(13) 式を (37) 式に変更し，(38) 式を追加すればよい．

$$\sum_{i=1}^{n} z_{it} = C_t, \ (t = 1, \ldots, T) \tag{37}$$

$$z_i = \sum_{t=1}^{T} z_{it}, \ (i = 1, \ldots, n) \tag{38}$$

また，利用可能な予算を先送りできるならば (簡単のため金利を 0 とすると)，(37) 式を (39) 式に変更すればよい．

$$\sum_{t=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} z_{it} \leq \sum_{t=1}^{k} C_t, \ (k = 1, \ldots, T) \tag{39}$$

(2) プロジェクト間の相互依存性

たとえば，プロジェクト i とプロジェクト j が排反的である場合，

$$x_i + x_j \leq 1$$

という制約式を加えればよい．このタイプの制約式も一般的なプロジェクト選択問題で導入される制約条件と同じように記述すればよい．

(3) 投資タイミング

(1) とも関連するが，z_{it} が 0 ではない最初の期間 t が投資タイミングとなる．しかし，明示的に考慮するためには期間の間に存在する投資の影響 (効果) を制約式の中に含めるなど，多期間 (動的) モデルを導入する必要があり，本論文で提案したモデルを直接用いることはできない．

7. 結論と今後の課題

本研究では，研究開発プロジェクト選択問題に対し，研究開発プロジェクトの評価法として，複数の評価者による評点を用いてリスクを考慮した価値評価法を示し，2 種類のタイプ

の資本予算モデルを提案した．モデル1として標準的なタイプの資本予算モデル，モデル2として新しいタイプの予算配分モデルを示した．研究開発費の配分は，0-1だけでなく部分的に配分が可能である一方，ある程度の費用は配分される必要がある．モデル2は，標準的なタイプのモデルであるモデル1に比べて，実際の配分方法にも対応できるモデルである．このようなタイプのモデルは従来まったく開発されておらず，本研究の大きな貢献の一つである．一方，期待値を最大化する問題はリスクを考慮しない問題と同じであり，本研究で提案したモデルはより一般化したモデルとなっていることが分かる．

緻密な評価方法が必要であることに異論を唱えるつもりはないが，本質的な難しさもあり，現状では従来の評点法(スコア法)を用いるのが，最も現実的である．従来の方法からのスムーズな移行方法は，実務上極めて重要であり，本研究で提案したモデルは，複数の評価者による評点を用いてリスクを明示的に考慮したモデルであり，すぐにでも利用することができるだろう．

モデルの振る舞いを確かめるために仮想データを用いた数値実験を行った．可能であれば，実際の問題を取り扱った方がモデルの特徴も捉えやすいが，研究開発の評価は企業にとって機密事項であり，実際のデータを用いることは企業内部にいない限りほぼ不可能である．示した数値実験の結果は，実際の研究開発プロジェクト選択問題においても行う分析方法と同じであり，結果から得られた知見は十分に役に立つと考えている．また，3.4節で示したモデルは，50プロジェクト，20シナリオでも1秒以下で問題を解くことができ，実務的にも問題ないと考えてよいだろう[23]．今後の課題として，追加的な制約式を加えたときのモデルの振る舞いを調べたり，動的な予算配分を行うモデルの構築を検討する必要がある．

参考文献

[1] N.P. Archer and F. Ghasemzadeh : A decision support system for project portfolio selection, *Int. J. Technology Management*, **16** (1998), 105–114.

[2] P. ボイアー 著, 宮正義 監訳, 大上慎吾, 松浦良行, 中野誠, 大薗恵美 訳 : 技術価値評価 — R&Dが生み出す経済的価値を予測する, 日本経済新聞社, 2004. (原著 P. Boer : The valuation of technology : business and financial Issues in R&D (John Wiley & Sons, 1999).)

[3] J.J.Clark, T.J.Hindelang and R.E.Pritchard : Capital budgeting — planning and control of capital expenditures, third edition (Prentice-Hall, 1989).

[4] F. Ghasemzadeh, N. Archer and P. Iyogun : A zero-one model for project portfolio selection and scheduling, *Journal of the Operational Research Society*, **50** (1999), 745–755.

[5] F. Ghasemzadeh and N.P. Archer : Project portfolio selection through decision support, *Decision Support Systems*, **29** (2000), 73–88.

[6] 枇々木規雄 : 金融工学と最適化 (朝倉書店, 2001).

[7] D.S. Kira, M.I. Kusy, D.H. Murray and B.J. Goranson : A specific decision support system (SDSS) to develop an optimal project portfolio mix under uncertainty, *IEEE Transactions on Engineering Management*, **37-3** (1990), 213–221.

[23] 5節のモデルでも2段階ならば10数秒で解ける．

[8] H. Konno : Piecewise linear risk function and portfolio optimization, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **33-2** (1990), 139–156.

[9] ルーエンバーガー 著, 今野浩, 鈴木賢一, 枇々木規雄 訳 : 金融工学入門 (日本経済新聞社, 2003). (原著 D.G. Luenberger : Investment Science (Oxford University Press, 1997))

[10] R. ラズガイティス 著, 菊池純一, 石井康之 監訳, IPTT グループ 訳 : アーリーステージ知財の価値評価と価格設定 (中央経済社, 2004). (原著 R. Razgaitis : Early-stage technologies : valuation and pricing (John Wiley & Sons, 1999).)

[11] J.L. Ringuest, S.B. Graves and R.H. Case : Mean-Gini analysis in R&D portfolio selection, *European Journal of Operational Research*, **154** (2004), 157–169.

[12] 寺本義也, 山本尚利, 山本大輔 : 最新技術評価法 (日経 BP 社, 2003).

[13] R. Weber, B. Werners and H.-J. Zimmermann : Planning models for research and development, *European Journal of Operational Research*, **48** (1990), 175–188.

枇々木 規雄
〒223-8522 横浜市港北区日吉 3–14–1
慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

ABSTRACT

MEAN-VARIANCE CAPITAL BUDGETING MODEL FOR R & D PROJECT SELECTION

Norio Hibiki
Keio University

This paper discusses optimal selection of R & D projects under uncertainty. The stochastic optimization models for R & D project selection are not almost studied except Ringuest et al.(2004). We formulate two kinds of mean-variance capital budgeting models for R & D project selection. One is the standard model with zero-one variables, in which the value is zero if the project is rejected and one if the project is accepted. The other is the practical model with inequality constraints with zero-one variables, in which the value is zero if the project is rejected and more than lower limit if the project is accepted. Multiple scores evaluated by multiple specialists are used as future scenarios of projects. We run these models with hypothetical data and examine the results.