日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research
Society of Japan
2006 年 49 巻 62-88

キャッシュリザーブを用いたモーゲージ担保証券優先劣後構造の最適設計

沓名 拓郎
（株）豊田中央研究所

甲斐 良隆
関西学院大学

福島 雅夫
京都大学

(受理 2004 年 3 月 26 日; 再受理 2006 年 6 月 21 日)

和文概要　モーゲージ担保証券（Mortgage Backed Securities, MBS）とは，多数の住宅ローンを寄せ集めてローンプールを作り，その返済キャッシュフローを原資として発行される証券である．近年，住宅金融公庫によるこれまでの融資業務の段階的縮小と，民間住宅ローンの証券化支援業務の開始が決定された．これにより，今後日本において MBS はますます普及すると考えられる．住宅ローンでは，基本的に毎月の決められた返済以外に繰り上げ返済が認められており，繰上返済により返済キャッシュフローが変化する．このため，MBS には期前償還リスクが存在する．現在発行されている公庫 MBS はパススルー方式であり，流れ込む返済元利金は（繰上返済分も含んで）そのまま投資家に渡される．これに対し，返済キャッシュフローを人為的に再編成し，リスクの異なる複数の債券に分離して販売する方式（Collateralized Mortgage Obligation, CMO）が考えられている．本研究の目的は，優先劣後構造を用いた最適な CMO を設計するための手法を提案することである．期前償還リスクの影響下で不安定な返済キャッシュフローを，期前償還リスクの低い安定した部分（優先債券）と，期前償還リスクの高い不安定な部分（劣後債券）の 2 つのクラスに分ける．その際，より多くの優先債券を発行するため，各時点において返済金の一部分を次の時点までリザーブできると仮定する．本研究では，優先劣後構造を決定する問題を数理計画問題に定式化する．そして，シミュレーションに基づいた手法を用いて問題を近似し，その問題が等価な線形計画問題に再定式化できることを示す．さらに，提案した基本モデルおよびその修正モデルに対して数値実験を行い，それらのモデルの有効性を検証する．

キーワード: 金融，住宅ローンの証券化，数理モデル，線形計画，シミュレーション

1. はじめに

近年の経済環境の低迷や金利低下は，あらためて住宅金融公庫の財務リスクの大きさを認識させることになり，財投改革の一環として，2001 年に「特殊法人等整理合理化計画」が閣議決定され，公庫の 5 年以内の廃止と，それまでの融資業務の段階的縮小が決まった．また平行して，公庫による民間住宅ローンの証券化支援業務が開始され，公庫廃止後には同業務を専門に行う独立行政法人の設置が予定されている [10]．住宅ローンのリスクとして，信用リスク，流動性リスク，金利変動リスク，期前償還リスクなどが挙げられる [3, 5]．住宅ローンの証券化とは，融資機関がこれらのリスクすべてを負うのではなく，証券化機関や数多くの投資家が内在するリスクを認識・管理し，分担してこれを負う仕組みである．住宅ローンの証券化商品は MBS (Mortgage Backed Securities) と呼ばれ，1970 年に米国政府機関 GMNA (Government National Mortgage Association, Ginnie Mae) が発行したのがその始まりである [9]．MBS とは，多数の住宅ローンを寄せ集め，その返済キャッシュフローを原資として発行する証券のことである．米国では現在，5000 億ドルから 8000 億ドルの MBS の残高があり，その流通市場は国債に次ぐ巨大市場となっている [8]．日本においても，1999 年より本格的に MBS が組成され始め，現在その発行額は着実に増加している [10]．これまで，リスクヘッジの難しいといわれる長期固定ローンは，日本の民間金融機関ではあまり扱われて

こなかった．しかし，公庫の独立行政法人化と住宅ローン証券化支援業務の開始を受け，今後日本においてMBSはますます普及すると考えられる．また，安定した住宅ローンの供与は，経済成長，福利厚生にとって欠かすことができない．

住宅ローンでは，基本的に毎月の決められた返済以外に繰り上げ返済が認められている．これは債務者がコールオプションを保有していることを意味する．繰り上げ返済による期前償還が起こると，返済キャッシュフローが変化する．これらの理由から，MBSには期前償還リスクが存在する．期前償還リスクとは，期前償還が当初予想よりも遅いため手元流動性が不足するエクステンション・リスクと，逆に期前償還が当初予想よりも早いため発生する過剰な手元流動性を，予定していた利回り・期間で運用できなくなるコール・リスクのことである．

代表的なMBSの種類として，パススルー方式がある [3]．パススルー方式とは，証券化機関が個々の住宅ローンを束ねてローンプールをつくり，流れ込む返済元利金を（期前償還分も含んで）そのまま一定の手数料を差し引いて投資家に渡す方式である．この方式では，仕組みは簡単でわかりやすいが，各投資家は期前償還リスクをそのまま負うことになる．これに対し，返済キャッシュフローを人為的に再編成し，リスクの異なる複数の債券に分離して販売する方式（Collateralized Mortgage Obligation, CMO）が考えられている．リスクの異なる複数の債券に分離して販売することで，さまざまな運用スタイルを持つ投資家のニーズに応えることができるようになり，全体の発行コストが低減できると期待される．

本研究の目的は，優先劣後構造を用いた最適なCMOを設計するための手法を提案することである．優先劣後構造とは，期前償還リスクの影響下で不安定な返済キャッシュフローを，期前償還リスクの低い安定した部分（優先債券）と，期前償還リスクの高い不安定な部分（劣後債券）の２つのクラスに分けるためのスキームである．期前償還が早い場合の余剰キャッシュフローの受け取りと，逆に期前償還が遅い場合のキャッシュフローの不足を劣後債券が一手に担うことで，緩衝剤としての役割を果たし，安定した優先債券の発行が可能となる．MBS発行者にとって，安定した優先債券は発行価格が高く，少しでも多くの量を確保することが望ましい．本研究では，甲斐 [5] と同様に，ある時点での返済キャッシュフローをすべて投資家に渡してしまうのではなく，その一部分を次の時点までリザーブできると仮定することで，より柔軟な優先劣後構造の設計を目指す．CMOの設計におけるキャッシュリザーブは実務上よく行われており，主に数値シミュレーションに基づいた優先劣後構造の設計がなされているが [5]，数理計画法によるアプローチは著者らが知る限り見当たらない*．本研究では，MBSのキャッシュフローを数理的にモデル化し，最適化問題に定式化してそれを解くことで優先劣後構造を決定する．

本論文の構成について述べる．まず第2.節でMBSのキャッシュフローを数理的にモデル化し，優先劣後構造を決定する問題を数理計画問題に定式化する．次に，第3.節でシミュレーションに基づいた近似手法について述べる．第4.節で，問題を等価な線形計画問題に再定式化する手法について述べる．第5.節で修正モデルを提案し，第6.節で数値実験を行った結果と，それに対する考察を与える．最後に第7.節で結論を述べる．

*本論文の投稿後，文献 [4] において本論文のモデルを拡張した数理計画モデルが提案されている．

2. 優先劣後構造のモデル化

2.1. キャッシュリザーブを用いた優先劣後構造の設計

本研究では，ある時点での返済キャッシュフローをすべて投資家に渡してしまうのではなく，キャッシュフローの一部分を，次の時点までリザーブできると仮定する．あらかじめ，各時点での優先債券に対する支払予定額とリザーブの上限値を設定しておき，その上で，優先債券と劣後債券に対する支払いが各時点 t において次の手順で行われると仮定する．

t 時点の返済キャッシュフローと $t-1$ 時点のリザーブを合わせた中から：

1 優先債券購入者に対する支払いを行う；

2 優先債券購入者に対する支払い後に残ったキャッシュの中から，リザーブ上限値を越えない分をリザーブし，$t+1$ 時点以降の支払い用に備える；

3 最後に，リザーブ上限値を越えた分を劣後債券購入者に支払う；

ここで注意すべきことは，t 時点の返済キャッシュフローと $t-1$ 時点のキャッシュリザーブを合わせた額が，t 時点の優先債券に対する支払い予定額よりも少ない場合には，予定額よりも少ない金額しか支払われないということである．ただし，信用リスクがなくキャッシュフローの欠損は起こらないと仮定する．各時点での優先債券に対する支払い予定額と，各時点でのリザーブの上限値が優先劣後構造を表す決定変数であり，これらの値を決定することが目的となる．

2.2. モデルに用いる記号

以下のようにパラメータ，変数を定義する．

T：償還期間;

$C_t\ (t=1,\ldots,T)$：t 時点の返済キャッシュフロー（確率変数）;

$a_t\ (t=1,\ldots,T)$：t 時点の優先債券に対する支払い予定額;

$v_t\ (t=1,\ldots,T-1)$：t 時点のリザーブ上限;

以下，$\boldsymbol{a}_t=(a_1,\ldots,a_t),\ \boldsymbol{v}_t=(v_1,\ldots,v_t),\ \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_T,\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_T,\ \boldsymbol{C}_t=(C_1,\ldots,C_t)$ と表す．

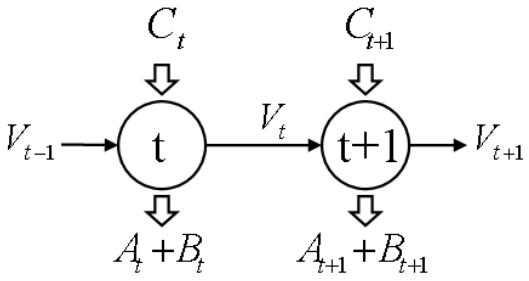

図 1: CMO のキャッシュフロー

A_t, B_t をそれぞれ t 時点の優先債券，劣後債券に対する支払額とし，V_t を t 時点のリザーブ額とする．t 時点の返済キャッシュフローと $t-1$ 時点のリザーブを合わせたキャッシュの中から，まずはじめに優先債券に対する支払いが行われ，その後リザーブ上限を越えた分が劣後債券へと支払われる．これより，次の関係式が成り立つ．ただし，$v_0=V_0=V_T=0$ とする．

$$A_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t) = \min\{a_t,\ C_t + V_{t-1}(\boldsymbol{a}_{t-1}, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_{t-1})\} \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{1}$$

$$V_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{C}_t) = \min\{v_t,\ C_t + V_{t-1}(\boldsymbol{a}_{t-1}, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_{t-1}) - A_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t)\} \quad (t = 1, \ldots, T-1) \tag{2}$$

$$B_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{C}_t) = C_t + V_{t-1}(\boldsymbol{a}_{t-1}, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_{t-1}) - A_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t) - V_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{C}_t) \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{3}$$

以下では $A_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t), V_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{C}_t), B_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{C}_t)$ を，単に A_t, V_t, B_t と書くこととする．返済キャッシュフロー C_t は確率変数なので，それと a_t, v_t によって定まる A_t, V_t, B_t も確率変数となる．

2.3. 優先債券に対する支払い不足額

優先債券に対する支払い予定額 a_t よりも実際の支払い額 A_t の方が少ない場合に，優先債券に対する支払い額が不足し，優先債券購入者にとっての損失が生じる．優先債券に対する t 時点の支払い不足額を表す関数 L_t を以下のように定義する．

$$L_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t) := a_t - A_t \tag{4}$$

$$= a_t - \min\{a_t,\ C_t + V_{t-1}\}$$

$$= \max\{0, a_t - C_t - V_{t-1}\} \tag{5}$$

(4) より，

$$A_t = a_t - L_t \tag{6}$$

となり，これを (2),(3) に代入して

$$V_t = \min\{v_t,\ C_t + V_{t-1} + L_t - a_t\}, \tag{7}$$

$$B_t = C_t + V_{t-1} + L_t - a_t - V_t \tag{8}$$

を得る．

2.4. 割引現在価値

住宅ローンの貸出金利を r_0 とし，利子率 r' $(< r_0)$ の優先債券を発行する場合を考える．そのとき，支払い予定額が $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_T)$ である優先債券の割引現在価値を表す関数は次式で与えられる†．

$$W(\boldsymbol{a}) := \sum_{t=1}^{T} \frac{a_t}{(1 + r')^t} \tag{9}$$

2.5. 基本モデル

MBS 発行者の目的として，次のものが挙げられる．

- 優先債券の発行量は多くしたい（優先債券の割引現在価値 $W(\boldsymbol{a})$ を大きくする）

†$W(\boldsymbol{a})$ は現時点で発行する優先債券の割引現在価値を表す．また，利子率 r' はすべて共通としたが，各時点で独立に $r'_t (t = 1, \ldots, T)$ と定義することも可能である．

- 優先債券に対する支払いは確実に行いたい（不足額 L_t を小さくする）
- リザーブ量は少なくしたい（リザーブ上限 v_t を小さくする）
- 劣後債券の性質も良くしたい（B_t の分散を小さくするなど）

３つ目のリザーブ量を少なくしたい理由として，次の理由が挙げられる．MBS 発行者が返済キャッシュフローをリザーブする場合，リザーブ期間が短く不確実なために，リザーブしたキャッシュを運用するのは一般的に難しいと考えられる．このことから，リザーブするキャッシュには利子がつかないことになり，リザーブする発行者にとっての損失になるからである‡．また，劣後債券の販売価格はその性質に依存するため，４つ目の劣後債券に関する目的が挙げられる．

本論文では，上で挙げた目的のうち，４つ目の劣後債券に関するものを除いた３つの目的を考慮したモデルを考える．具体的には，次の最適化問題を提案する．

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}} \quad & W(\boldsymbol{a}) - \sum_{t=1}^{T-1} \rho_t \cdot v_t \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t\left(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t\right) \right] \leq \mathrm{U}_L, \\ & \boldsymbol{a} \geq 0, \quad \boldsymbol{v} \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

ただし，γ_t, ρ_t は重み係数，U_L は設定パラメータであり，$\mathrm{E}[X]$ は X の期待値を表す．

第 6. 節の数値実験のように γ_t を設定するならば，一つ目の制約条件の左辺は，優先債券に対する不足額の期待現在割引価値を表すと考えられる．よってこの問題は，優先債券に対する期待割引不足額をある設定値 U_L 以下に抑えるという条件の下で，優先債券発行量とリザーブ量を考慮した MBS 発行者の効用関数を最大化する問題とみなすことができる．ここで設定パラメータ U_L とは，優先債券ならこれ以下の損失という市場のコンセンサス（つまり平均的投資家の優先債券に対する損失の許容水準）から自ずと決定される値である．この問題を解いて $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ を決定することで，式 (3) より劣後債券の支払額 $B_t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{C}_t)$ の分布も決まる．

3. サンプルパスを用いた近似

3.1. 期待値の計算

問題 (10) の制約条件中に現れる期待値は，次のように書き直すことができる．

$$\mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t) \right] = \int_{\boldsymbol{c} \in \Re^T} \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{c}_t) p(\boldsymbol{c}) d\boldsymbol{c} \tag{11}$$

ただし，$p(\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_T)$ の結合確率密度関数を表す．しかし，確率変数 $\boldsymbol{C}$ の分布は一般に既知ではないため，問題 (10) を解く上で，式 (11) 中に現れる積分計算をどのように扱うかが問題となる．ここでは，金利変動モデルと住宅ローンの期前償還モデル（後述）を用いて $\boldsymbol{C}$ のシミュレーションパスを発生させ，近似的に積分計算を行う．

次の記号を導入する．

‡理論上無リスクで利益を得られる裁定取引（アービトラージ）が存在するが，一般にその利子は非常に小さいと考えられるため，ここではリザーブキャッシュの利子は 0 としている．

I：発生させるシミュレーションパスの本数;
$\boldsymbol{r}^{(i)} = (r_1^{(i)}, \ldots, r_T^{(i)})$ $(i = 1, \ldots, I)$：金利変動モデルを用いて発生させた金利パス;
$\boldsymbol{c}^{(i)} = (c_1^{(i)}, \ldots, c_T^{(i)})$ $(i = 1, \ldots, I)$：金利パス $\boldsymbol{r}^{(i)}$ と期前償還モデルにより発生させた返済キャッシュフローパス.

これらのパスを用いると，期待値計算 (11) は次のように近似できる．ただし，$\boldsymbol{c}_t^{(i)} = (c_1^{(i)}, \ldots, c_t^{(i)})$ とする．

$$\mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{C}_t)\right] \approx \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{c}_t^{(i)}) \tag{12}$$

以降の節で，$\boldsymbol{r}^{(i)}$, $\boldsymbol{c}^{(i)}$ の生成方法について述べる．

3.2. 金利変動モデル

金利は，ある平均的なレベル m の周辺を m へと回帰するように変動していると考えられる．この性質を表した金利モデルとして，最初に提案されたのが次の Vasicek モデル [7] である．

$$r_{t+\triangle t} = r_t + \epsilon\,(m - r_t)\,\triangle t + \sigma \triangle B_t$$

ここで，r_t は時刻 t における金利水準，$\triangle t$ は微小時間間隔を表す．また，ϵ は平均への回帰の強さを表す係数，σ は拡散係数であり，$\triangle B_t$ は平均が 0，分散が $\triangle t$ のブラウン運動である．このモデルは扱いが簡単で，しかも金利の動きをよく記述している．しかしこのモデルは，金利が負になる場合があるという重大な欠点をもっている．一旦 r_t が小さくなると，拡散係数の影響で，次の時点で r_t が負になる可能性が大きくなるのである．この欠点を除くために提案されたのが，次の Cox-Ingersoll-Ross (CIR) モデル [2] である．

$$r_{t+\triangle t} = r_t + \epsilon\,(m - r_t)\,\triangle t + \sigma\sqrt{r_t}\triangle B_t \tag{13}$$

このモデルでは，r_t が小さくなると，ボラティリティも小さくなるので，r_t が負になることを防ぐことができる．非常に低金利である現在の日本市場を考慮し，今回は CIR モデルを用いて，金利のサンプルパスを発生させる．具体的には，式 (13) において，同じ初期値 r_0 から出発し，$\triangle B_t$ をランダムに発生させて 1 本のサンプルパスを得る．それを I 回繰り返して I 本のサンプルパス $\boldsymbol{r}^{(i)}$ を得る．第 6. 節の数値実験では，$\triangle t = 0.01$ と設定し，(13) を用いて生成した点列 $\{r_t\}$ から，100 反復毎に r_t を抜き出してサンプルパス $\boldsymbol{r}^{(i)}$ を生成した．

3.3. 期前償還モデルを用いた返済キャッシュフローパスの生成

住宅ローンでは，基本的に繰り上げ返済が認められているため，繰り上げ返済による期前償還リスクを考慮する必要がある．この節では，期前償還を考慮した返済キャッシュフローパスを生成する手法について述べる．ただし，債務者のデフォルトに対しては保証手当があるものとし，貸し出しは固定金利で行われるものとする．

3.3.1. 住宅ローン

返済期間 T 年，借入元本 x_0，借入金利 r_0 とする．このとき，1 年あたりの予定返済額 y は

$$x_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{y}{(1+r_0)^t} \qquad \text{より} \qquad y = x_0 \times \frac{r_0(1+r_0)^T}{(1+r_0)^T - 1}$$

となる．これより，期前償還がない場合の t 時点の元本残高を $\overline{x}_t$ $(t = 1, \ldots, T)$ とすると，

$$\overline{x}_t = \sum_{k=t+1}^{T} \frac{y}{(1+r_0)^{k-t}} = x_0 \times \frac{(1+r_0)^T - (1+r_0)^t}{(1+r_0)^T - 1} \tag{14}$$

となる．

3.3.2. 期前償還モデル

期前償還の起こる要因には，経済的な要因と非経済的な要因がある．経済的要因の主なものとして，金利低下によるローンの借り換えが挙げられる．非経済的要因として，借入実行からの経過期間，地域，年齢，季節などが挙げられる．また，金利低下により一旦期前償還が進むと，残されたローンプール内の質が変わり，次第に金利に対する感応性を失っていく「燃え尽き効果」と呼ばれる現象も存在する．他に，日本特有の要因として，ボーナス併用払い，ステップアップ金利，住宅減税期間などがある．

期前償還をモデル化したものとして，Schwartz and Torous モデル [6] がある．これは，期前償還率 π_t を，貸付金利と借換金利の差，燃え尽き効果，季節要因（今回は省略）により説明したモデルである．ここで期前償還率 π_t とは，ローン債務者が t 時点まで期前償還をしなかったという条件のもとで，次の瞬間に期前償還を行う確率のことである．Schwartz and Torous モデルでは，期前償還率 π_t は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\pi_t &= \hat{\pi}_t \cdot \exp\left\{\beta_1 k_t + \beta_2 l_t + \beta_3 m_t\right\}, \\
\hat{\pi}_t &= \kappa \frac{\omega\nu(\omega t)^{\nu-1}}{1+(\omega t)^{\nu}}, \\
k_t &= r_0 - r_{t-s}, \quad s \geq 0, \\
l_t &= (k_t)^3, \\
m_t &= \ln\left(\frac{x_t}{\overline{x}_t}\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

ここで，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は重み係数，κ, ω, ν はパラメータ，r_t は t 時点での借換金利（金利変動モデルにより計算），s は借換に要する時間（以下では $s = 0$ と仮定），x_t は期前償還を考慮した場合の t 時点の元本残高をあらわす．k_t は借入金利と借換金利の差であり，l_t は金利差の 3 乗である．また m_t は燃え尽き効果をあらわす．このモデルは米国 MBS を数多く観察して得られたモデルであり，このまま日本に適用できるかどうかは確かではない．しかし，日本の MBS 市場はまだ日が浅く，決定的なモデルが他に存在しないため，今回はこのモデルを用いる．

3.3.3. 返済キャッシュフローパスの生成

式 (14) を用いて，期前償還がない場合の元本残高 $\overline{x}_t$ $(t = 1, \ldots, T)$ を計算しておく．また，CIR モデルを用いて，借換金利のサンプルパス $r_t^{(i)}$ $(t = 1, \ldots, T, i = 1, \ldots, I)$ を計算しておく．期前償還を考慮した場合の $t-1$ 時点の元本残高 x_{t-1} の中から，期前償還率 π_{t-1} の割合で期前償還が起こり，さらに予定通りの返済率 $\overline{x}_t/\overline{x}_{t-1}$ で元本は減少する．x_{t-1} と x_t の差が t 時点の元本返済額となる．また，t 時点では $t-1$ 時点の元本残高に対する利子 $r_0 \cdot x_{t-1}$ を払う必要がある．よって，返済キャッシュフローパス $\boldsymbol{c}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, I)$ は，以下の手順で生成される．

step1. $t := 1,\ \overline{x}_0 := x_0,\ r_0^{(i)} := r_0$ とする．

step2. $r_{t-1}^{(i)},\ \overline{x}_{t-1},\ x_{t-1}$ を用いて式 (15) より π_{t-1} を計算する.
step3. t 時点の元本残高を計算する.

$$x_t := \frac{\overline{x}_t}{\overline{x}_{t-1}} \cdot (1-\pi_{t-1}) \cdot x_{t-1}$$

step4. t 時点の返済額を計算する.

$$\begin{aligned} c_t^{(i)} &:= (x_{t-1}-x_t) + r_0 \cdot x_{t-1} \\ &= (1+r_0)\, x_{t-1} - x_t \end{aligned}$$

step5. $t=T$ ならば終了. そうでなければ, $t := t+1$ として step2 へ.
以上の操作を, $i=1,\ldots,I$ に対して行い, I 本の返済キャッシュフローパス $\boldsymbol{c}^{(i)}$ を得る.

3.4. モデル

式 (12) の近似を行い, さらに (5), (7) によって定まる従属変数 $\boldsymbol{L} = (L_1^{(1)},\ldots,L_T^{(1)},\ldots,L_1^{(I)},\ldots,L_T^{(I)})$, $\boldsymbol{V} = (V_0^{(1)},\ldots,V_T^{(1)},\ldots,V_0^{(I)},\ldots,V_T^{(I)})$ $\left(\text{ただし } V_0^{(i)} = V_T^{(i)} = 0\right)$ を導入することにより, 問題 (10) は次のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v},\boldsymbol{L},\boldsymbol{V}} \quad & W(\boldsymbol{a}) - \sum_{t=1}^{T-1} \rho_t \cdot v_t \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t^{(i)} \le \mathrm{U}_L, \\ & L_t^{(i)} = \max\left\{0,\ a_t - c_t^{(i)} - V_{t-1}^{(i)}\right\}, \\ & V_t^{(i)} = \min\left\{v_t, c_t^{(i)} + V_{t-1}^{(i)} + L_t^{(i)} - a_t\right\}, \\ & \boldsymbol{a} \ge 0, \quad \boldsymbol{v} \ge 0, \quad V_0^{(i)} = V_T^{(i)} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

またこのとき, (6) と (8) より, 優先債券に対する支払額のサンプルパス $\boldsymbol{A}^{(i)} = \left(A_1^{(i)},\ldots,A_T^{(i)}\right)$ と, 劣後債に対する支払額のサンプルパス $\boldsymbol{B}^{(i)} = \left(B_1^{(i)},\ldots,B_T^{(i)}\right)$ はそれぞれ

$$A_t^{(i)} = a_t - L_t^{(i)}, \tag{17}$$

$$B_t^{(i)} = c_t^{(i)} + V_{t-1}^{(i)} + L_t^{(i)} - a_t - V_t^{(i)} \tag{18}$$

により求めることができる.

4. 線形計画モデル

問題 (16) は次の問題 (P_1) と等価である.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}_1) \qquad \max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v},\boldsymbol{L},\boldsymbol{V}} \quad & W(\boldsymbol{a}) - \sum_{t=1}^{T-1} \rho_t \cdot v_t \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t^{(i)} \le \mathrm{U}_L, \\
& L_t^{(i)} \ge 0, \\
& L_t^{(i)} \ge a_t - c_t^{(i)} - V_{t-1}^{(i)}, \\
& L_t^{(i)} = 0 \quad \text{or} \quad L_t^{(i)} = a_t - c_t^{(i)} - V_{t-1}^{(i)}, \qquad (19) \\
& V_t^{(i)} \le v_t, \\
& V_t^{(i)} \le c_t^{(i)} + V_{t-1}^{(i)} + L_t^{(i)} - a_t, \\
& V_t^{(i)} = v_t \quad \text{or} \quad V_t^{(i)} = c_t^{(i)} + V_{t-1}^{(i)} + L_t^{(i)} - a_t, \qquad (20) \\
& a_t \ge 0, \quad v_t \ge 0, \quad V_0^{(i)} = V_T^{(i)} = 0
\end{aligned}
$$

この問題は，相補性条件 (19),(20) を持ち，このままでは解くのが非常に難しい．この節では，この問題をある等価な線形計画問題に定式化する手法について述べる.

問題 (P_1) から制約 (19),(20) を取り除き，$V_t^{(i)}$ に関する非負条件 (24) を付け加えた次の問題を考える.

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v},\boldsymbol{L},\boldsymbol{V}} \quad & W(\boldsymbol{a}) - \sum_{t=1}^{T-1} \rho_t \cdot v_t \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t^{(i)} \le \mathrm{U}_L, \\
& L_t^{(i)} \ge 0, \\
& L_t^{(i)} \ge a_t - c_t^{(i)} - V_{t-1}^{(i)}, \qquad (21) \\
& V_t^{(i)} \le v_t, \qquad (22) \\
& V_t^{(i)} \le c_t^{(i)} + V_{t-1}^{(i)} + L_t^{(i)} - a_t, \qquad (23) \\
& V_t^{(i)} \ge 0, \qquad (24) \\
& a_t \ge 0, \\
& v_t \ge 0, \qquad (25) \\
& V_0^{(i)} = V_T^{(i)} = 0
\end{aligned}
$$

制約 (23),(24) より制約 (21) は取り除くことができ，さらに，制約 (22),(24) より制約 (25) も

取り除くことができる．結局，次の問題 (P_2) を得る．

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}_2) \qquad \max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{v},\boldsymbol{L},\boldsymbol{V}} \quad & W(\boldsymbol{a}) - \sum_{t=1}^{T-1} \rho_t \cdot v_t \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t^{(i)} \le \mathrm{U}_L, && (26)\\
& V_t^{(i)} \le c_t^{(i)} + V_{t-1}^{(i)} + L_t^{(i)} - a_t, && (27)\\
& 0 \le V_t^{(i)} \le v_t, \\
& L_t^{(i)} \ge 0, \quad a_t \ge 0, \quad V_0^{(i)} = V_T^{(i)} = 0
\end{aligned}
$$

ある自然な仮定のもとで，問題 (P_1) と問題 (P_2) が等価であることが示される（証明は付録を参照）．問題 (P_2) は線形計画問題であるから，単体法や内点法などにより効率的に解くことができる [1].

5. モデルの修正

5.1. 住宅ローン返済キャッシュフローの特徴

期前償還を含む住宅ローンの返済キャッシュフローでは，フローの時間的な前後相関が非常に強い．期前償還が頻繁に起こった場合には，期前償還が少なかった場合に比べて，償還期間の前半に大量の返済フローが発生し，そのかわりに後半の返済フローは少なくなる．図 2 は，期前償還が少なかった場合のパス（実線）と，期前償還が頻繁に起こった場合の返済フローパス（点線）の例である．キャッシュリザーブを用いて，優先債券の発行量を増やす

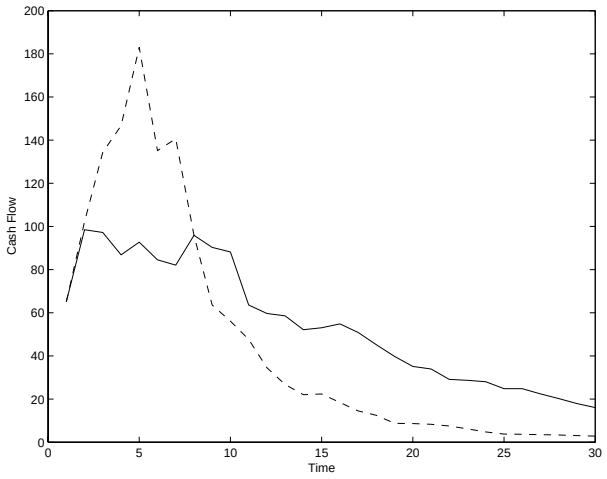

図 2: 期前償還によるフローの違い

ということは，期前償還が起こった場合に発生するフローの余剰部分をリザーブし，そのリザーブ分を，それ以降の時点で優先債券として発行することにほかならない．前節までのモデルでは，返済キャッシュフローに関係なく，時刻 t で共通のリザーブ上限 v_t を用いるとして定式化してきた．しかし，先に述べたような返済キャッシュフローの性質を考慮すれば，各時点で共通のリザーブ上限を用いるよりも，その時点までに期前償還された額の大きさに応じて，リザーブ上限を変化させたほうがよい結果が得られると考えられる．

5.2. 修正モデルの提案

t 時点までに期前償還された総額を Z_t とすると，Z_t は (15) 式で定義した期前償還率 π_t と，期前償還を考慮した場合の元本残高 x_t を用いて次のように計算される．

$$Z_t := \sum_{k=1}^{t-1} \pi_k \cdot x_k$$

リザーブ上限 v_t が，期前償還総額 Z_t の関数として次のように表される場合を考える．

$$v_t(\tau_t, \xi_t, Z_t) := \tau_t + \xi_t Z_t \quad (t = 1, \ldots, T-1)$$

この修正によって，モデルの決定変数が v_t から τ_t, ξ_t に変わったことに注意する．以下 $\boldsymbol{\tau}_t = (\tau_1, \ldots, \tau_t)$，$\boldsymbol{\xi}_t = (\xi_1, \ldots, \xi_t)$，$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{T-1}$，$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{T-1}$，$\boldsymbol{Z}_t = (Z_1, \ldots, Z_t)$，$\boldsymbol{v}_t(\boldsymbol{\tau}_t, \boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{Z}_t) = (v_1(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{Z}_1), \ldots, v_t(\boldsymbol{\tau}_t, \boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{Z}_t))$ と表す．

次のモデルを提案する．

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\xi}} \quad & W(\boldsymbol{a}) - \sum_{t=1}^{T-1} \rho_t \cdot \mathrm{E}\left[v_t(\tau_t, \xi_t, Z_t)\right] \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{E}\left[\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t\left(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{v}_{t-1}(\boldsymbol{\tau}_{t-1}, \boldsymbol{\xi}_{t-1}, \boldsymbol{Z}_{t-1}), \boldsymbol{C}_t\right)\right] \le \mathrm{U}_L, \\ & a_t \ge 0, \quad v_t(\tau_t, \xi_t, Z_t) \ge 0 \end{aligned} \tag{28}$$

以下，このモデルを修正モデルと呼ぶ．この修正モデルに対し，第 3. 節と同様のサンプルパスを用いた近似を行うことにより，次の問題を得る．

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{L},\boldsymbol{V}} \quad & W(\boldsymbol{a}) - \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T-1} \rho_t \cdot (\tau_t + \xi_t z_t^{(i)}) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t^{(i)} \le \mathrm{U}_L, \\ & L_t^{(i)} = \max\left\{0,\ a_t - c_t^{(i)} - V_{t-1}^{(i)}\right\}, \\ & V_t^{(i)} = \min\left\{\tau_t + \xi_t z_t^{(i)}, c_t^{(i)} + V_{t-1}^{(i)} + L_t^{(i)} - a_t\right\}, \\ & a_t \ge 0, \quad \tau_t + \xi_t z_t^{(i)} \ge 0, \quad V_0^{(i)} = V_T^{(i)} = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

ただし，$z_t^{(i)}$ はパス i における t 時点までの期前償還総額とする．また，この問題に対して，次の線形計画問題

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{L},\boldsymbol{V}} \quad & W(\boldsymbol{a}) - \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T-1} \rho_t \cdot (\tau_t + \xi_t z_t^{(i)}) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T} \gamma_t \cdot L_t^{(i)} \le \mathrm{U}_L, \\ & V_t^{(i)} \le c_t^{(i)} + V_{t-1}^{(i)} + L_t^{(i)} - a_t, \\ & 0 \le V_t^{(i)} \le \tau_t + \xi_t z_t^{(i)}, \\ & L_t^{(i)} \ge 0, \quad a_t \ge 0, \quad V_0^{(i)} = V_T^{(i)} = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

を考えると，第 4. 節と同様の議論により，問題 (30) を解くことで，問題 (29) の解を得ることができる．

6. 数値実験

この節では，本論文で提案したモデルに対して数値実験を行った結果を報告する．まず初めに実験環境について述べ，そのあと実験結果と，それに対する考察を述べる．

6.1. 実験環境

以下の仮定をおいた．

- 元本 $x_0 = 1000$ 億円，貸出金利 $r_0 = 0.05$，返済期間 $T = 30$ 年のローンプール;
- 借り換え金利は当初 5%で，その後 CIR モデルによって変動;
- 発行する優先債券の利子率は $r' = 0.04$.

CIR モデル (13)，期前償還モデル (15) 中のパラメータは表 1 のように設定した[§]．

表 1: パラメータ設定

CIR モデル		期前償還モデル	
ϵ	0.2	κ	1.5
m	0.05	ω	0.083
σ	0.02	ν	1.74
		β_1	34.2
		β_2	0
		β_3	0.3

モデルの近似に用いたサンプルパスの数は $I = 1000$ である．図 3 は実際に用いたサンプルパスを示している．

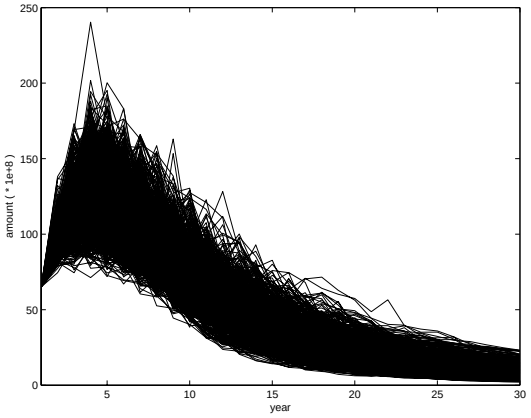

図 3: 用いた返済フローのサンプルパス（$I = 1000$）

問題はモデリング言語 SIMPLE を用いて実装し，NUOPT Version 6 を用いて解いた[¶]．実験は RedHat8 with Intel Pentium 4 CPU 2.80GHz, 1 GB memory 上で行った．$I = 1000$

[§]期前償還モデルのパラメータは甲斐 [5] を参考にした．
[¶]SIMPLE, NUOPT は Mathematical Systems, Inc. により開発された数理計画ソフトウェアである．

の場合，問題を解くのに要した時間は約 45 秒である‖.

6.2. モデル１

はじめに，リザーブ上限 v_t が過去の返済キャッシュフローに依存しない基本モデル (10) に対し実験を行った．以下このモデルをモデル１と呼ぶ.

問題中にあらわれるパラメータ γ_t, ρ_t は次のように設定した.

$$\gamma_t := \frac{1}{(1+r')^t} \quad , \qquad \rho_t := \frac{\rho_0}{(1+r')^t}$$

このとき，リザーブ上限 v_t の割引現在価値 $W(\boldsymbol{v})$ を

$$W(\boldsymbol{v}) \;:=\; \sum_{t=1}^{T-1} \frac{v_t}{(1+r')^t}$$

と定義すると，モデル１の目的関数は

$$W(\boldsymbol{a}) - \rho_0 \cdot W(\boldsymbol{v})$$

と書ける．ここで ρ_0 は，キャッシュリザーブを設定することで予想される機会損失とキャッシュリザーブの容量の比率，例えば，リザーブの平均滞留期間に相当する得べかりし運用益を表す.

6.2.1. ρ_0, U_L を変化させた結果

$\mathrm{U}_L = 0.1$ とし，ρ_0 を 0 から 1 まで 0.1 刻みで変化させて問題を解いたときの，各最適解における $W(\boldsymbol{a})$, $W(\boldsymbol{v})$ の値を表 2 に示す．また，同様に $\mathrm{U}_L = 0.01$ の場合の結果を表 3 に示す．図 4 は，表 2, 表 3 において $W(\boldsymbol{v})$ を横軸，$W(\boldsymbol{a})$ を縦軸にとったときのグラフを表す.

表 2: モデル１の実験結果 ($\mathrm{U}_L = 0.1$)

ρ_0	$W(\boldsymbol{a})$	$W(\boldsymbol{v})$
1.00	665.329012	0.000016
0.90	670.356264	5.228164
0.80	670.356334	5.228175
0.70	675.934293	12.965120
0.60	675.934359	12.965192
0.50	687.478028	33.167633
0.40	700.987603	61.421008
0.30	716.179808	102.538409
0.20	746.297396	228.257527
0.10	834.935921	862.815392
0.00	964.916426	> 10000

表 3: モデル１の実験結果 ($\mathrm{U}_L = 0.01$)

ρ_0	$W(\boldsymbol{a})$	$W(\boldsymbol{v})$
1.00	623.453907	0.000497
0.90	656.148754	34.002963
0.80	656.148776	34.002962
0.70	656.148806	34.002980
0.60	656.148863	34.002979
0.50	656.148866	34.002999
0.40	691.417999	108.860996
0.30	696.513779	125.377859
0.20	713.763086	200.229550
0.10	817.424007	960.052624
0.00	951.113801	> 10000

‖計算時間は，荒っぽくいえば，解くべき線形計画問題の制約条件の数の３乗に比例すると考えられる．また，提案モデルにおける制約条件の数はサンプルパスの数にほぼ比例する.

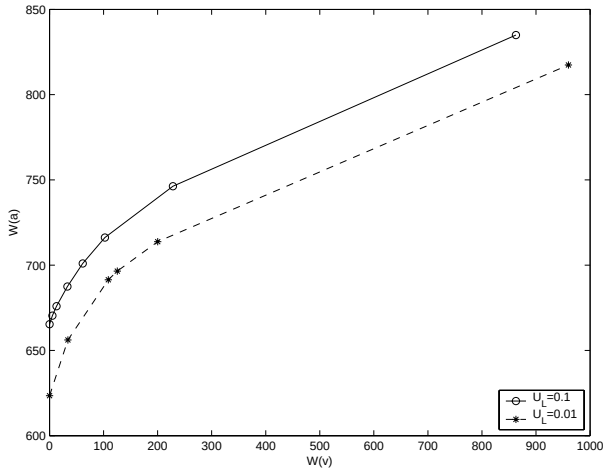

図 4: $W(\boldsymbol{v})$ と $W(\boldsymbol{a})$ の関係 (モデル 1)

考察

表 2,3 より，解における $W(\boldsymbol{v})$ の値が大きいほど，$W(\boldsymbol{a})$ の値が大きくなることが読み取れる．これは，キャッシュリザーブを大きくとることで，優先債券発行量を増やすことが可能となることを示しており，本モデルのねらい通り，キャッシュリザーブを用いることで柔軟な優先劣後構造の設計が可能となることが確認された．次に ρ_0 と $W(\boldsymbol{a})$，$W(\boldsymbol{v})$ の関係に注目すると，ρ_0 の値が大きくなるにしたがって $W(\boldsymbol{a})$，$W(\boldsymbol{v})$ ともに値が小さくなっている．例えば，$\rho_0 = 0$ とはリザーブすることによる機会損失が生じない場合であり，リザーブすることに対するデメリットが無い状況を意味するため，リザーブを可能な限り多くとって優先債券発行量を可能な限り増やした解が最適解として得られている．また $\rho_0 = 1$ とは，優先債券の利子率とリザーブによる機会損失率が一致する場合を表し，リザーブをすればするほど非効率となるため，リザーブをほとんどしない解が最適解として得られている．$0 < \rho < 1$ の場合は，想定される機会損失の大きさ ρ_0 に応じて最適なリザーブ上限と優先債券発行量が得られている．

図 4 より，$W(\boldsymbol{v})$ の小さいところほど $W(\boldsymbol{v})$ の増加に対する $W(\boldsymbol{a})$ の増加率が大きいことがわかる．これは，リザーブ量に対する優先債券の増加率は一定ではなく，リザーブが大きくなるほど非効率になることを意味する．また，同じグラフより，U_L の値を小さく設定することで，同じ $W(\boldsymbol{v})$ に対する $W(\boldsymbol{a})$ の値は小さくなることがわかる．U_L とは優先債券ならこれ以下の損失という市場のコンセンサスから決定される値であったので，これは，優先債券の安全性に対する市場の要求が厳しいほど，同じリザーブをしたとしても発行できる優先債券の量は少なくなることをあらわしており，自然な結果と言える．

6.2.2. 最適解の詳細

図 5 は，$(\mathrm{U}_L, \rho_0) = (0.1, 0.1)$ における結果の詳細をグラフに表したものである．図 5 には，問題を解いて得られた最適解における優先債券支払い予定額 a_t, リザーブ上限 v_t，平均リザーブ量 $\mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{V}}_t]$，各パスでの優先債券に対する支払い不足額 $L_t^{(i)}$ が示してある．ただし，$\mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{V}}_t]$ は (35), (36) 式により計算される $\tilde{V}_t^{(i)}$ を用いて

$$\mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{V}}_t] := \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} \tilde{V}_t^{(i)}$$

と計算する．図5の斜線部分は，図3のサンプルパスを表している．また図6に，各パスでの劣後債券に対する支払額 $B_t^{(i)}$ を示す．ただし，$B_t^{(i)}$ は (18) 式で計算する．図7は，図5の優先債券を発行し，リザーブを全くしなかったときに生じる優先債券に対する支払い不足額 $L_t^{(i)}$ が示してある．図8は，図5のリザーブ上限 v_t，平均リザーブ量 $\mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{V}}_t]$ と，図7の不足額 $L_t^{(i)}$ を重ねてグラフにあらわしたものである．また表4に，図5の各時点において優先債券に対する支払額が不足する（$L_t^{(i)} > 0$ となる）確率を示す．同様に，$(\mathrm{U}_L, \rho_0) = (0.1, 0.2)$ の場合を図9-12と表5に，また $(\mathrm{U}_L, \rho_0) = (0.01, 0.1)$ の場合を図13-16と表6に示す．

考察

図5と図9を比べると，ρ_0 の値を大きく設定することで，リザーブ上限 v_t と平均リザーブ量 $\mathbf{E}[\tilde{\boldsymbol{V}}_t]$ の小さい解が得られることがわかる．リザーブすることによる機会損失が大きい場合は，リザーブ量のより少ない解が最適解として得られるためである．また図8, 12, 16より，リザーブ上限はリザーブしない場合に生じる優先債券の不足額をカバーするように決まっていることがわかる．期前償還の多い期間前半 $(0 \le t \le 15)$ に余剰部分をリザーブしておき，それを期間中盤（$t = 10$ 前後）の優先債券支払いに用いることで安定した優先債券の発行量を増やすことに成功している．逆に，期間後半 $(15 \le t \le 30)$ はリザーブはほとんど行われていないため，期間後半にリザーブをしても優先債券を増やすことにはあまり寄与しないと考えられる．

次に優先債券の安全性に注目すると，表4-6からわかるように，優先債券に予定額が支払えない確率は，$(\mathrm{U}_L, \rho_0) = (0.1, 0.1)$ で 0.5% 以内，$(\mathrm{U}_L, \rho_0) = (0.1, 0.2)$ で 0.7% 以内，$(\mathrm{U}_L, \rho_0) = (0.01, 0.1)$ で 0.2% 以内に抑えられている．U_L の値を小さく設定することで，優先債券に対する支払いを確実にでき，市場の安全性に対する高い要求に応えることが可能となる．

図6, 10, 14からわかるように，劣後債券に対する支払いは非常にバラツキが大きくなっており，MBS キャッシュフローの不確実性の大部分を劣後債券が受けとめていることがわかる．

6.2.3. キャッシュリザーブによる元本相当額の変化

(17) と (18) で与えられる優先債券支払額 $A_t^{(i)}$，劣後債券支払額 $B_t^{(i)}$，およびリザーブ額 $\tilde{V}_t^{(i)}$ を，住宅ローンの貸出金利 $1 + r_0$ で割り引いた値の平均値をそれぞれ $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$, $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})]$, $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ とすると，それぞれ

$$\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})] := \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\frac{A_t^{(i)}}{(1+r_0)^t},$$

$$\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})] := \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\frac{B_t^{(i)}}{(1+r_0)^t},$$

$$\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})] := \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T-1}\frac{\tilde{V}_t^{(i)}}{(1+r_0)^t}$$

により計算できる．$\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$ と $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})]$ は，それぞれ住宅ローン元本に占める優先債券，劣後債券の量をあらわす．図17は，$\mathrm{U}_L = 0.1$ として ρ_0 を0から1まで変化させたときの，各最適解における $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$, $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})]$, $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ の関係を示している．

$\mathrm{U}_L = 0.1,\ \rho_0 = 0.1$ のとき.

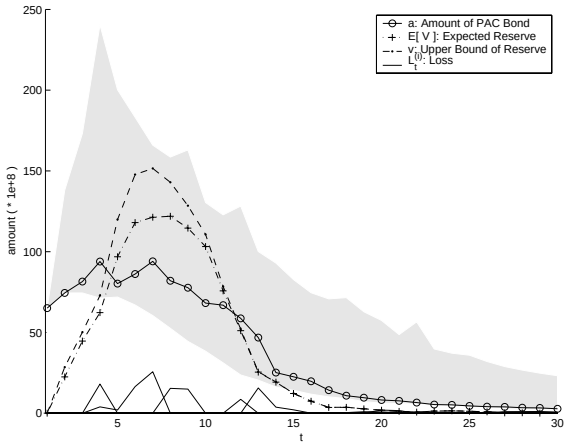

図 5: 優先債券 a_t，リザーブ上限 v_t，平均 $\mathbf{E}[V_t]$，不足額 $L_t^{(i)}$

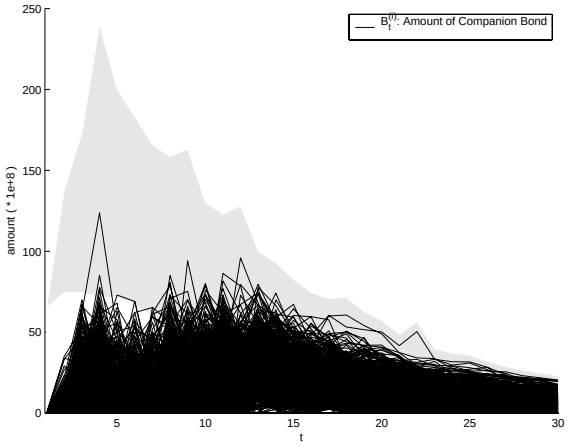

図 6: リザーブした場合の劣後債券 $B_t^{(i)}$

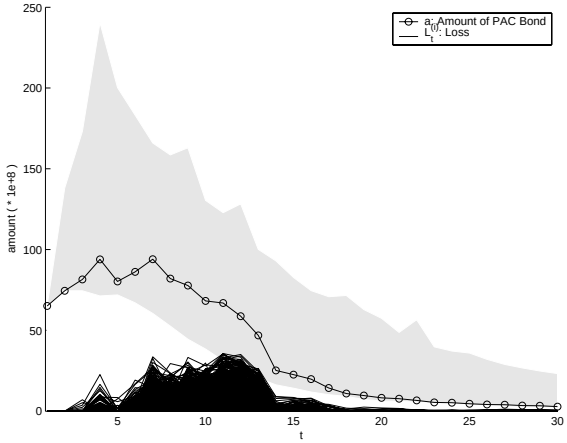

図 7: 優先債券 a_t, リザーブしない場合の不足額 $L_t^{(i)}$

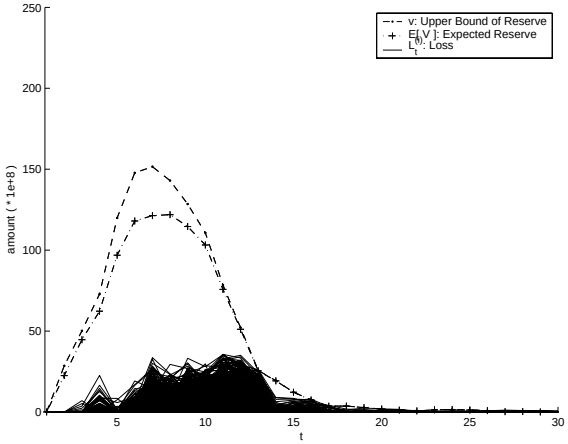

図 8: リザーブ上限 v_t，平均 $\mathbf{E}[V_t]$, 不足額 $L_t^{(i)}$

表 4: 図 5 の各時点で優先債券に対する支払額が不足する（$L_t^{(i)} > 0$ となる）確率

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probability (%)	0.0	0.0	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0.3	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.0	0.1	0.2	0.3
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1	0.4	0.5	0.4	0.5

$\mathrm{U}_L = 0.1,\ \rho_0 = 0.2$ のとき.

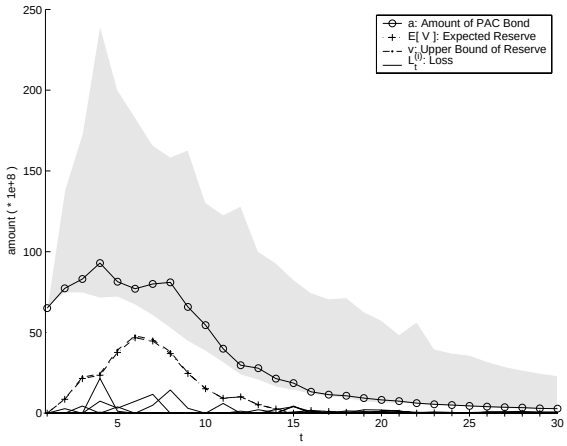

図 9: 優先債券 a_t，リザーブ上限 v_t，平均 $\mathbf{E}[V_t]$，不足額 $L_t^{(i)}$

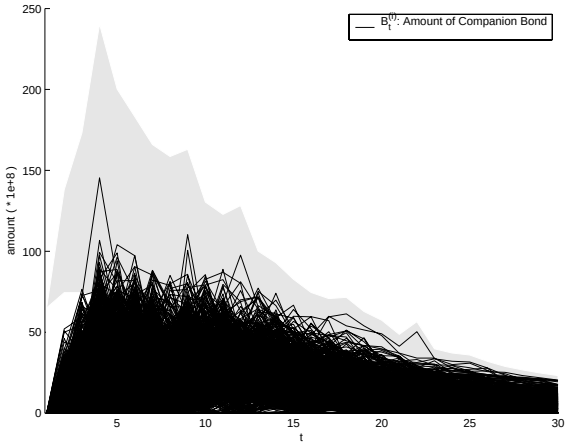

図 10: リザーブした場合の劣後債券 $B_t^{(i)}$

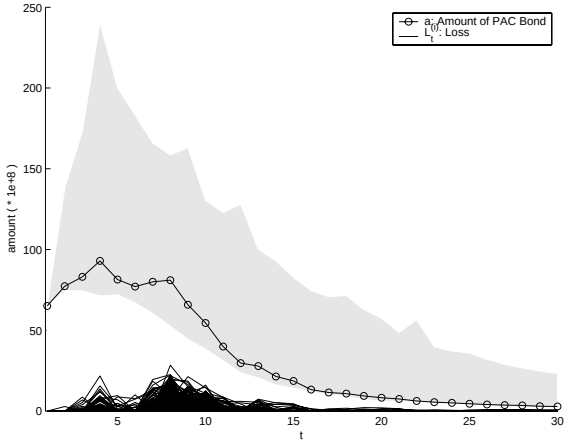

図 11: 優先債券 a_t, リザーブしない場合の不足額 $L_t^{(i)}$

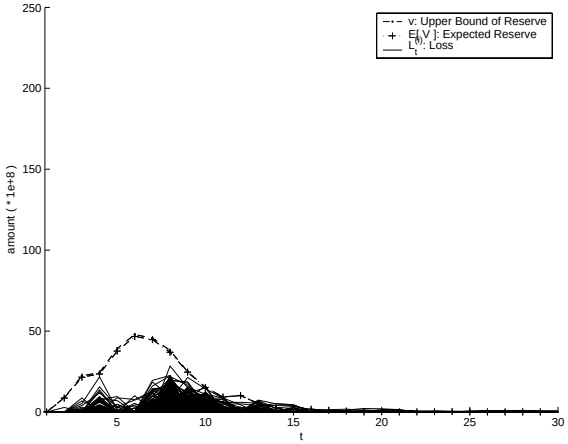

図 12: リザーブ上限 v_t，平均 $\mathbf{E}[V_t]$, 不足額 $L_t^{(i)}$

表 5: 図 9 の各時点で優先債券に対する支払額が不足する（$L_t^{(i)} > 0$）となる確率

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probability (%)	0.0	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0.2	0.1	0.3	0.2	0.7	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0.6	0.5	0.3	0.4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.6	0.5

$\mathrm{U}_L = 0.01, \rho_0 = 0.1$ のとき.

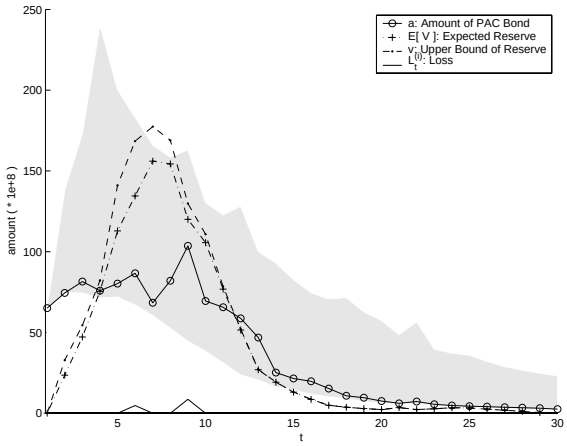

図 13: 優先債券 a_t，リザーブ上限 v_t，平均 $\mathbf{E}[V_t]$，不足額 $L_t^{(i)}$

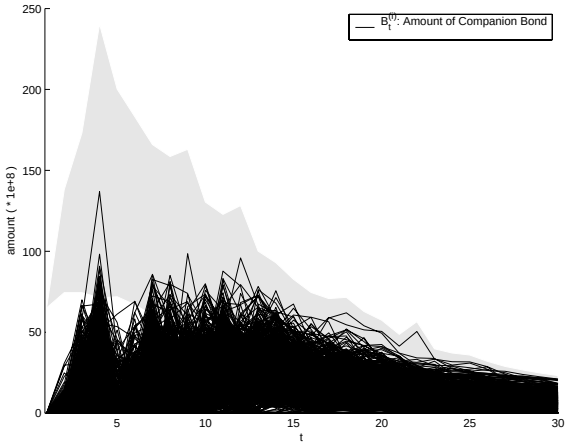

図 14: リザーブした場合の劣後債券 $B_t^{(i)}$

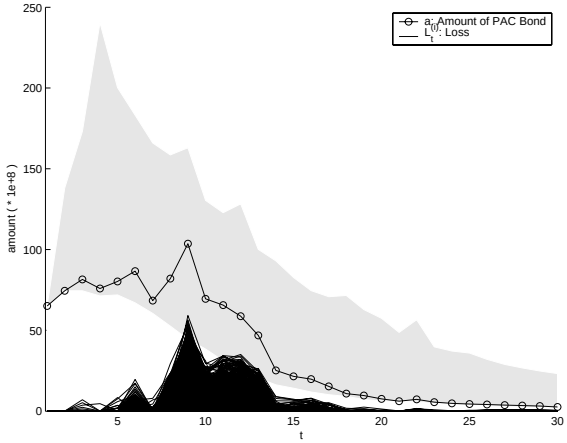

図 15: 優先債券 a_t, リザーブしない場合の不足額 $L_t^{(i)}$

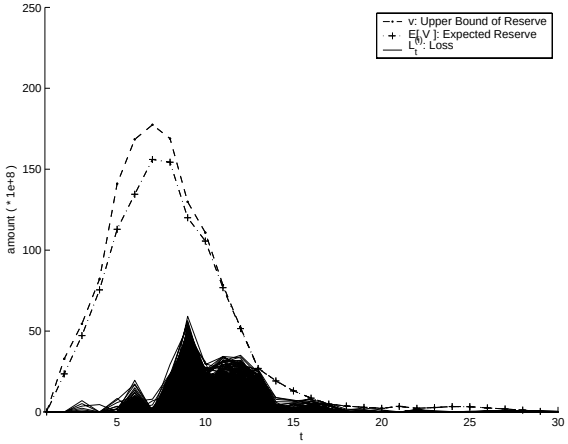

図 16: リザーブ上限 v_t，平均 $\mathbf{E}[V_t]$, 不足額 $L_t^{(i)}$

表 6: 図 13 の各時点で優先債券に対する支払額が不足する（$L_t^{(i)} > 0$ となる）確率

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probability (%)	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.0
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0.1	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2

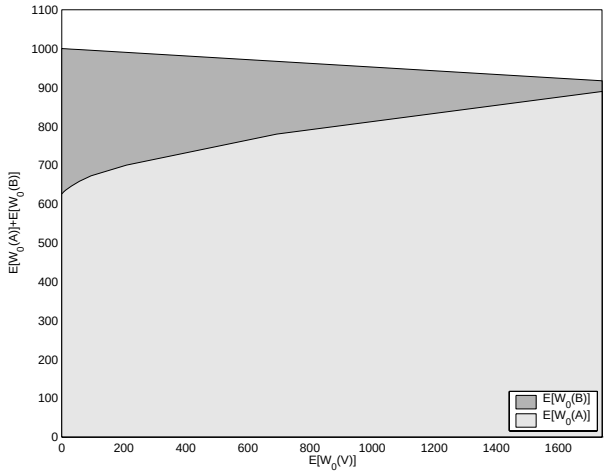

図 17: $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$, $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$, $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})]$ の関係 (モデル 1)

考察

図 17 より，$\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ が大きくなるほど $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$ は大きくなり, 逆に $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})]$ は小さくなることがわかる．これは，リザーブすることによって優先債券が増え，同時に劣後債券が減ることを意味している．しかし，図からわかるように，$\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ が大きくなるほど $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$ と $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})]$ の和は小さくなっている．このことは，キャッシュリザーブ $\tilde{V}_t^{(i)}$ に利子が付かないことに起因しており，以下のように説明できる．(3) より

$$A_t + B_t = C_t + \tilde{V}_{t-1} - \tilde{V}_t \quad (t = 1, \ldots, T)$$

が成り立つ．ところが，もしキャッシュリザーブが利率 r_V で安定的に運用できるなら，上式のかわりに

$$A_t + B_t = C_t + (1 + r_V)\tilde{V}_{t-1} - \tilde{V}_t \quad (t = 1, \ldots, T)$$

が成り立つ．この式の両辺に $\frac{1}{(1+r_0)^t}$ をかけて $t = 1, \ldots, T$ について足し，さらにその両辺に $p(\boldsymbol{c})$ をかけて積分すると

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{c}\in\Re^T} \sum_{t=1}^{T} \frac{A_t}{(1+r_0)^t} p(\boldsymbol{c})d\boldsymbol{c} + \int_{\boldsymbol{c}\in\Re^T} \sum_{t=1}^{T} \frac{B_t}{(1+r_0)^t} p(\boldsymbol{c})d\boldsymbol{c} \\ = \int_{\boldsymbol{c}\in\Re^T} \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r_0)^t} p(\boldsymbol{c})d\boldsymbol{c} + \frac{r_V - r_0}{1+r_0} \int_{\boldsymbol{c}\in\Re^T} \sum_{t=1}^{T} \frac{\tilde{V}_t}{(1+r_0)^t} p(\boldsymbol{c})d\boldsymbol{c} \quad (31)\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$\int_{\boldsymbol{c}\in\Re^T} \sum_{t=1}^{T} \frac{A_t}{(1+r_0)^t} p(\boldsymbol{c})d\boldsymbol{c} \approx \mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})],$$

$$\int_{\boldsymbol{c}\in\Re^T} \sum_{t=1}^{T} \frac{B_t}{(1+r_0)^t} p(\boldsymbol{c})d\boldsymbol{c} \approx \mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})],$$

$$\int_{\boldsymbol{c}\in\Re^T} \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r_0)^t} p(\boldsymbol{c})d\boldsymbol{c} \;=\; x_0,$$

$$\int_{\boldsymbol{c}\in\Re^T} \sum_{t=1}^{T} \frac{\tilde{V}_t}{(1+r_0)^t} p(\boldsymbol{c})d\boldsymbol{c} \;\approx\; \mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$$

に注意すると，(31) より

$$\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})] + \mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})] \approx x_0 + \frac{r_V - r_0}{1+r_0}\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$$

が成り立つ．上式に $x_0 = 1000, r_0 = 0.05$ を代入し，仮に $r_V = r_0$（リザーブが利率 r_0 で運用可能）と仮定すれば

$$\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})] + \mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})] \approx 1000 \tag{32}$$

となり，優先債券と劣後債券の元本相当額はリザーブ量に依存せずに保存されることになる．しかし，本モデルではリザーブに利子がつかない，つまり $r_V = 0$ と仮定しているため

$$\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})] + \mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})] \approx 1000 - 0.0476 \times \mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})] \tag{33}$$

となり，リザーブ量 $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ に比例して，元本相当額の和が減少することになる．

6.3. モデル２

次に，リザーブ上限 v_t が期前償還総額 Z_t の関数として与えられる修正モデルに対し，数値実験を行った．サンプルパス，γ_t, ρ_t はモデル１と同じものを用いた．以下，このモデルをモデル２と呼ぶ．

6.3.1. モデル１とモデル２の比較

図 18 は，モデル２において $\mathrm{U}_L = 0.1$ として ρ_0 を 0 から 1 まで変化させたときの，最適解における $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})], \mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})], \mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ の関係を示している．また，図 19 は，モデル １とモデル２に対し，横軸を $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$，縦軸を $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$ としたグラフである．

考察

図 18 より，モデル２を用いた場合も，モデル１の場合と同様にリザーブを増やすことで優先債が増え，劣後債券が減っていることがわかる．また，リザーブが増えるのに比例して $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})] + \mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})]$ は減少しているが，これは，モデル２に関してもモデル１と同様に (33) 式が成り立つためである．（ここで，(33) 式の右辺の係数はモデル１の場合と一致することに注意せよ．）

図 19 から，横軸 $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ の中間部分において，モデル１よりもモデル２の方が同じ $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ に対して $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$ が大きくなっていることがわかる．これは，同じ額のリザーブをした場合に，モデル２の方がより多くの優先債券を発行できていることを意味し，過去の期前償還総額に応じてリザーブ上限を変化させるモデル２の方が，より効率的な運用ができることを示している．また，$\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ の小さいところと大きいところではモデル１とモデル２の結果が一致しているが，その理由は次のように説明できる．$\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ の小さいところはほとんどリザーブをしない場合に対応しており，逆に $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$ の大きいところは可能な限り多くのリザーブをおこなう場合に対応しているが，これらの場合は，モデル２においてリザーブ上限を過去の期前償還総額に依存させる必要がなくなるため，モデル１とモデル２が発行できる優先債券量の差は小さくなる．

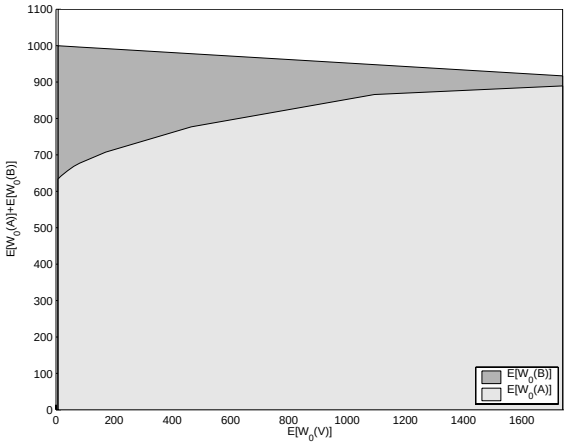

図 18: $\mathbf{E}[W_0(\tilde{\boldsymbol{V}})]$, $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{A})]$, $\mathbf{E}[W_0(\boldsymbol{B})]$ の関係 (モデル 2)

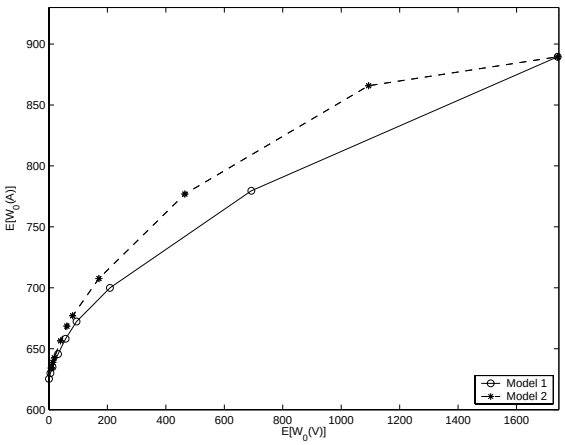

図 19: モデル 1 とモデル 2 の比較

7. 結論

本論文では，住宅ローンの返済キャッシュフローを安定な優先部分と不安定な劣後部分とに分けるための，優先劣後構造を最適に設計する手法を提案した．その際，より多くの優先債券発行を可能にするため，返済されたキャッシュを次の時点までリザーブできると仮定した．また，金利変動モデルと期前償還モデルにより生成したサンプルパスを用いて，返済キャッシュフローの確率密度関数を近似した．さらに，優先劣後構造を決定する問題が，等価な線形計画問題に定式化されることを示した．そして数値実験を行い，本手法により，優先債券に対する支払い不足額の期待割引現在価値をある設定値以下に抑えるという制約の下で，返済キャッシュフローを優先部分と劣後部分に分けられることを確かめた．また，キャッシュリザーブを許すことにより，優先債券発行量を増やせることを確かめた．さらに，基本モデルに対する改良モデルを提案し，改良モデルの方がよい性能を持つことを数値実験により確かめた．数値実験では 1000 本のサンプルパスを用いたが，実際の運用にあたっては，より精度の高い近似モデルを用いる必要がある．提案したモデルは効率的な解法が適用できる線形計画問題であり，サンプルパスの本数を増やしても問題の制約条件の数は 1 次関数的に増加するだけなので，かなり大きい問題でも実用的な計算時間で解くことができると考えられる．

本論文では，住宅ローン返済キャッシュフローにおける期前償還リスクのみを考慮した．しかし，返済キャッシュフローパスの生成において，ローン債務者のデフォルトを組み込んだパスを生成することで，デフォルトリスクも考慮した優先劣後構造が導き出せる [5]．また，MBS を発行したあとの各時点で，その時点での最適なリザーブ量を決定していくようにすれば，よりよいパフォーマンスが得られると予想される．

本研究で設定したモデルでは，優先債券と劣後債券の 2 つのクラスに分けることを考えたが，クラスの数をさらに増やすことで，より多様な投資家ニーズに応えることができるようになると考えられる．3 クラス以上の場合を今回の提案モデルそのままで扱うことはできないが，簡単な拡張方法としては，今回のモデルで求まった劣後債券をさらにいくつかのクラスに分け，それらのクラスに返済の優先順位をもたせることで，リスクの異なる債券として販売することが考えられる．

本手法では，劣後債券の性質（分散など）は考慮に入れていない．しかし，劣後債券の販

売価格はその性質に依存するため，優先債券とリザーブだけでなく，劣後債券の性質も同時に考慮したモデルを考える必要がある．ところが，例えば劣後債券の分散を考慮した場合，その問題は相補性条件を持つ非線形な問題に定式化され，サンプルパスを用いた大規模問題の解を求めるのは非常に難しくなる．優先債券とリザーブだけでなく，劣後債券の性質も同時に考慮したモデルを提案することが今後の課題である．

参考文献

[1] V. Chvátal: *Linear Programming* (W.H. Freeman, 1983).

[2] J.C. Cox, J.E. Ingersoll and S.A. Ross: A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, **53** (1985), 383–408.

[3] F.J. Fabozzi: *The Handbook of Mortgage-Backed Securities* (Probus Publishing Co, 1985).

[4] D. Huang, Y. Kai, F.J. Fabozzi, and M. Fukushima: An optimal design of collateralized mortgage obligation with PAC-companion structure using dynamic cash reserve. *European Journal of Operational Research*, to appear.

[5] 甲斐良隆: MBS 優先劣後構造の最適設計. 日本不動産金融工学学会 実務ジャーナル, **1** (2003), 2–25.

[6] E.S. Schwartz and W.N. Torous: Prepayment and the variation of mortgage-backed securities. *The Journal of Finance*, **44** (1989), 375–392.

[7] O.A. Vasicek: An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, **5** (1977), 177–188.

[8] Federal Reserve Board: `http://www.federalreserve.gov/`.

[9] Ginnie Mae: `http://www.ginniemae.gov/`.

[10] 住宅金融公庫: `http://www.jyukou.go.jp/`.

A 付録

補題 1. 問題 (P_2) の最適解において，制約 *(26)* は有効制約となる．

証明　背理法で示す．$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ を問題 (P_2) の最適解とし，

$$\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\gamma_t \cdot \overline{L}_t^{(i)} < \mathrm{U}_L \tag{34}$$

が成り立っていると仮定する．このとき

$$\begin{aligned}
\delta_1 &:= \mathrm{U}_L - \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\gamma_t \cdot \overline{L}_t^{(i)} > 0,\\
\breve{L}_1^{(i)} &:= \overline{L}_1^{(i)} + \frac{\delta_1}{\gamma_1} \quad (i = 1, \ldots, I),\\
\breve{a}_1 &:= \overline{a}_1 + \frac{\delta_1}{\gamma_1}
\end{aligned}$$

によって $\delta_1, \breve{L}_1^{(i)}, \breve{a}_1$ を定義する．$\overline{L}_1^{(i)}, \overline{a}_1$ を $\breve{L}_1^{(i)}, \breve{a}_1$ で置き換えた解を $(\breve{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \breve{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ と表す．

$$\begin{aligned}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\left(\gamma_1\breve{L}_1^{(i)}+\sum_{t=2}^{T}\gamma_t\cdot\overline{L}_t^{(i)}\right) &= \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\left(\gamma_1\overline{L}_1^{(i)}+\delta_1+\sum_{t=2}^{T}\gamma_t\cdot\overline{L}_t^{(i)}\right)\\ &= \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\gamma_t\cdot\overline{L}_t^{(i)}+\delta_1=\mathrm{U}_L\end{aligned}$$

より，$(\breve{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \breve{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ は制約 (26) を満たす．また $\overline{V}_t^{(i)} \le c_t^{(i)} + \overline{V}_{t-1}^{(i)} + \overline{L}_t^{(i)} - \overline{a}_t$ より

$$\overline{V}_t^{(i)} \le c_t^{(i)} + \overline{V}_{t-1}^{(i)} + (\overline{L}_t^{(i)} + \frac{\delta_1}{\gamma_1}) - (\overline{a}_t + \frac{\delta_1}{\gamma_1}),$$

すなわち

$$\overline{V}_t^{(i)} \le c_t^{(i)} + \overline{V}_{t-1}^{(i)} + \breve{L}_t^{(i)} - \breve{a}_t$$

が成り立ち，$(\breve{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \breve{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ は制約 (27) を満たす．よって $(\breve{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \breve{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ は問題 (P_2) の実行可能解となる．しかしこのとき

$$W(\breve{\boldsymbol{a}}) - W(\overline{\boldsymbol{a}}) = \frac{\delta_1}{\gamma_1(1+r')} > 0$$

が成り立ち，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ よりも $(\breve{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \breve{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ の方が目的関数値が大きくなる．これは $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ が最適解であることに矛盾する．よって問題 (P_2) の最適解 $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ において，制約 (26) は有効制約となる． □

次の定理は，$\gamma_t > \gamma_{t+1}$ $(t = 1, \ldots, T-1)$ という自然な仮定のもとで，問題 (P_1) と問題 (P_2) が等価であることを示している．

定理 1. 問題 (P_2) の最適解を $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ とする．$\gamma_t > \gamma_{t+1}$ $(t = 1, \ldots, T-1)$ のとき，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ は問題 (P_1) の最適解となる．ただし $\tilde{\boldsymbol{V}} = (\tilde{V}_0^{(1)}, \ldots, \tilde{V}_T^{(1)}, \ldots, \tilde{V}_0^{(I)}, \ldots, \tilde{V}_T^{(I)})$ は

$$\tilde{V}_1^{(i)} := \min\{\overline{v}_1,\ c_1^{(i)} + \overline{L}_1^{(i)} - \overline{a}_1\}, \tag{35}$$

$$\tilde{V}_t^{(i)} := \min\{\overline{v}_t,\ c_t^{(i)} + \tilde{V}_{t-1}^{(i)} + \overline{L}_t^{(i)} - \overline{a}_t\} \quad (t = 2, \ldots, T-1), \tag{36}$$

$$\tilde{V}_0^{(i)} := 0, \quad \tilde{V}_T^{(i)} := 0$$

によって与えられる．

証明 $\overline{V}_0^{(i)} = 0$ であり，最適解 $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ において

$$\begin{gathered}\overline{V}_1^{(i)} \le c_1^{(i)} + \overline{L}_1^{(i)} - \overline{a}_1,\\ 0 \le \overline{V}_1^{(i)} \le \overline{v}_1\end{gathered}$$

が成り立っている．これより，(35) により与えられる $\tilde{V}_1^{(i)}$ に対して $\tilde{V}_1^{(i)} \ge \overline{V}_1^{(i)}$ が成り立つので，$\tilde{V}_1^{(i)} \ge 0$ が成り立つ．さらに，$t = 2, \ldots, T-1$ に対し，(36) により $\tilde{V}_t^{(i)}$ を帰納的に定める．ある $t \in \{2, \ldots, T-1\}$ に対し，$\tilde{V}_{t-1}^{(i)} \ge \overline{V}_{t-1}^{(i)}$ が成り立っていると仮定すると，

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t^{(i)} &= \min\{\overline{v}_t,\ c_t^{(i)} + \tilde{V}_{t-1}^{(i)} + \overline{L}_t^{(i)} - \overline{a}_t\}\\ &\ge \min\{\overline{v}_t,\ c_t^{(i)} + \overline{V}_{t-1}^{(i)} + \overline{L}_t^{(i)} - \overline{a}_t\}\\ &\ge \overline{V}_t^{(i)} \ge 0\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，2番目と最後の不等式は $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ が問題 (P_2) の制約条件を満たすことから従う．よって $\tilde{V}_1^{(i)} \geq \overline{V}_1^{(i)}$ より，帰納的に $\tilde{V}_t^{(i)} \geq 0$ $(t = 2, \ldots, T-1)$ が成り立つ．これより，解 $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ は，問題 (P_2) の実行可能解となる．また，このときの目的関数値は，最適解 $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \overline{\boldsymbol{V}})$ における目的関数値と同じなので，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ も問題 (P_2) の最適解となる．

問題 (P_2) における $L_t^{(i)}$ に関する下限制約は

$$L_t^{(i)} \geq 0, \quad L_t^{(i)} \geq a_t + V_t^{(i)} - c_t^{(i)} - V_{t-1}^{(i)} \tag{37}$$

である．最適解 $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ において，制約 (37) の少なくとも一方で等号が成立することを背理法によって示す．ある $i_1 \in \{1, \ldots, I\},\ t_1 \in \{1, \ldots, T\}$ に対して，

$$\overline{L}_{t_1}^{(i_1)} > 0 \quad \text{and} \quad \overline{L}_{t_1}^{(i_1)} > \overline{a}_{t_1} + \tilde{V}_{t_1}^{(i_1)} - c_{t_1}^{(i_1)} - \tilde{V}_{t_1-1}^{(i_1)}$$

が成り立っていると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}
\delta_2 &:= \min\{\overline{L}_{t_1}^{(i_1)},\ \overline{L}_{t_1}^{(i_1)} - \overline{a}_{t_1} - \tilde{V}_{t_1}^{(i_1)} + c_{t_1}^{(i_1)} + \tilde{V}_{t_1-1}^{(i_1)}\} > 0, \\
\check{L}_{t_1}^{(i_1)} &:= \overline{L}_{t_1}^{(i_1)} - \delta_2 + \frac{\delta_2}{I} = \max\left\{\frac{\delta_2}{I}, \left(\overline{a}_{t_1} + \frac{\delta_2}{I}\right) + \tilde{V}_{t_1}^{(i_1)} - c_{t_1}^{(i_1)} - \tilde{V}_{t_1-1}^{(i_1)}\right\} > 0, \\
\check{L}_{t_1}^{(i)} &:= \overline{L}_{t_1}^{(i)} + \frac{\delta_2}{I} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, I,\ i \neq i_1), \\
\check{a}_{t_1} &:= \overline{a}_{t_1} + \frac{\delta_2}{I} > 0
\end{aligned}$$

によって $\delta_2, \check{L}_{t_1}^{(i)}, \check{a}_{t_1}$ を定義する．$\overline{L}_{t_1}^{(i)}, \overline{a}_{t_1}$ を $\check{L}_{t_1}^{(i)}, \check{a}_{t_1}$ で置き換えた解を $(\check{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \check{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ とあらわす．

$$\check{L}_{t_1}^{(i_1)} = \max\left\{\frac{\delta_2}{I}, \check{a}_t + \tilde{V}_{t_1}^{(i_1)} - c_{t_1}^{(i_1)} - \tilde{V}_{t_1-1}^{(i_1)}\right\} \geq \check{a}_{t_1} + \tilde{V}_{t_1}^{(i_1)} - c_{t_1}^{(i_1)} - \tilde{V}_{t_1-1}^{(i_1)}$$

が成り立ち，また

$$\overline{L}_{t_1}^{(i)} \geq \overline{a}_{t_1} + \tilde{V}_{t_1}^{(i)} - c_{t_1}^{(i)} - \tilde{V}_{t_1-1}^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, I, i \neq i_1)$$

より

$$\left(\overline{L}_{t_1}^{(i)} + \frac{\delta_2}{I}\right) \geq \left(\overline{a}_{t_1} + \frac{\delta_2}{I}\right) + \tilde{V}_{t_1}^{(i)} - c_{t_1}^{(i)} - \tilde{V}_{t_1-1}^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, I, i \neq i_1),$$

すなわち

$$\check{L}_{t_1}^{(i)} \geq \check{a}_{t_1} + \tilde{V}_{t_1}^{(i)} - c_{t_1}^{(i)} - \tilde{V}_{t_1-1}^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, I, i \neq i_1)$$

が成り立つので，$(\check{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \check{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ は制約 (27) を満たす．また

$$\sum_{i=1}^{I} \check{L}_{t_1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{I} \overline{L}_{t_1}^{(i)}$$

が成り立つので，$(\check{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \check{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ は制約 (26) を満たす．よって $(\check{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \check{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ は問題 (P_2) の実行可能解となる．しかしこのとき

$$W(\check{\boldsymbol{a}}) - W(\overline{\boldsymbol{a}}) = \frac{\delta_2}{I(1+r')^{t_1}} > 0$$

が成り立ち，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ よりも $(\check{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \check{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ の方が目的関数値が大きくなる．これは $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ が最適解であることに矛盾する．よって，最適解 $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ において制約 (37) の少なくとも一方で等号が成立することが証明された．これより，すべての $i \in \{1, \ldots, I\}$ と $t \in \{1, \ldots, T\}$ に対して

$$\overline{L}_t^{(i)} = \max\{0,\ \overline{a}_t + \tilde{V}_t^{(i)} - c_t^{(i)} - \tilde{V}_{t-1}^{(i)}\} \tag{38}$$

が成り立つ．

添字集合 J_t, K_t を

$$\begin{aligned} J_t &:= \left\{ j \in \{1, \ldots, I\} \mid \overline{L}_t^{(j)} = 0,\ \overline{L}_t^{(j)} \geq \overline{a}_t + \tilde{V}_t^{(j)} - c_t^{(j)} - \tilde{V}_{t-1}^{(j)} \right\}, \\ K_t &:= \left\{ k \in \{1, \ldots, I\} \mid \overline{L}_t^{(k)} \geq 0,\ \overline{L}_t^{(k)} = \overline{a}_t + \tilde{V}_t^{(k)} - c_t^{(k)} - \tilde{V}_{t-1}^{(k)} \right\} \end{aligned}$$

と定義すれば，(38) より $J_t \cup K_t = \{1, \ldots, I\}$ が成り立つ．

集合 S の補集合を S^c とあらわす．すべての $i \in J_t^c \cap K_t,\ t \in \{1, \ldots, T-1\}$ に対し，$\tilde{V}_t^{(i)} = 0$ となることを背理法によって示す．ある $i_2 \in J_{t_2}^c \cap K_{t_2},\ t_2 \in \{1, \ldots, T-1\}$ に対し，$\tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} > 0$ が成り立っていると仮定する．$i_2 \in J_{t_2}^c \cap K_{t_2}$ より，

$$\overline{L}_{t_2}^{(i_2)} = \overline{a}_{t_2} + \tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} - c_{t_2}^{(i_2)} - \tilde{V}_{t_2-1}^{(i_2)} > 0 \tag{39}$$

が成り立っている．ここで，

$$\begin{aligned} \delta_3 &:= \min\left\{ \tilde{V}_{t_2}^{(i_2)},\ \overline{a}_{t_2}^{(i_2)} + \tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} - c_{t_2}^{(i_2)} - \tilde{V}_{t_2-1}^{(i_2)} \right\} > 0, \qquad (40) \\ \hat{V}_{t_2}^{(i_2)} &:= \tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} - \delta_3 \\ &= \max\left\{ 0,\ c_{t_2}^{(i_2)} + \tilde{V}_{t_2-1}^{(i_2)} - \overline{a}_{t_2}^{(i_2)} \right\} \geq 0, \\ \hat{L}_{t_2}^{(i_2)} &:= \overline{L}_{t_2}^{(i_2)} - \delta_3 \\ &= \max\left\{ \overline{L}_{t_2}^{(i_2)} - \tilde{V}_{t_2}^{(i_2)},\ \overline{L}_{t_2}^{(i_2)} - \overline{a}_{t_2}^{(i_2)} - \tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} + c_{t_2}^{(i_2)} + \tilde{V}_{t_2-1}^{(i_2)} \right\} \\ &= \max\left\{ \overline{L}_{t_2}^{(i_2)} - \tilde{V}_{t_2}^{(i_2)},\ 0 \right\} \qquad (\text{by (39)}) \\ &\geq 0, \\ \hat{L}_{t_2+1}^{(i_2)} &:= \overline{L}_{t_2+1}^{(i_2)} + \delta_3 > 0 \qquad \left(\text{by } \overline{L}_{t_2+1}^{(i_2)} \geq 0 \text{ and (40)} \right) \end{aligned}$$

によって $\delta_3, \hat{V}_{t_2}^{(i_2)}, \hat{L}_{t_2}^{(i_2)}, \hat{L}_{t_2+1}^{(i_2)}$ を定義する．$\tilde{V}_{t_2}^{(i_2)}, \overline{L}_{t_2}^{(i_2)}, \overline{L}_{t_2+1}^{(i_2)}$ を $\hat{V}_{t_2}^{(i_2)}, \hat{L}_{t_2}^{(i_2)}, \hat{L}_{t_2+1}^{(i_2)}$ で置き換えた解を $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{L}}, \hat{\boldsymbol{V}})$ とあらわす．$\tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} \leq v_{t_2}$ より $\hat{V}_{t_2}^{(i_2)} < v_{t_2}$ が成り立ち，さらに $\tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} \leq c_{t_2}^{(i_2)} + \tilde{V}_{t_2-1}^{(i_2)} + \overline{L}_{t_2}^{(i_2)} - \overline{a}_{t_2}$ より

$$\left(\tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} - \delta_3 \right) \ \leq \ c_{t_2}^{(i_2)} + \tilde{V}_{t_2-1}^{(i_2)} + \left(\overline{L}_{t_2}^{(i_2)} - \delta_3 \right) - \overline{a}_{t_2},$$

すなわち

$$\hat{V}_{t_2}^{(i_2)} \leq c_{t_2}^{(i_2)} + \tilde{V}_{t_2-1}^{(i_2)} + \hat{L}_{t_2}^{(i_2)} - \overline{a}_{t_2}$$

が成り立つ．また，$\tilde{V}_{t_2+1}^{(i_2)} \leq c_{t_2+1}^{(i_2)} + \tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} + \overline{L}_{t_2+1}^{(i_2)} - \overline{a}_{t_2+1}$ より

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{t_2+1}^{(i_2)} &\leq c_{t_2+1}^{(i_2)} + \left(\tilde{V}_{t_2}^{(i_2)} - \delta_3\right) + \left(\overline{L}_{t_2+1}^{(i_2)} + \delta_3\right) - \overline{a}_{t_2+1} \\ &= c_{t_2+1}^{(i_2)} + \hat{V}_{t_2}^{(i_2)} + \hat{L}_{t_2+1}^{(i_2)} - \overline{a}_{t_2+1}\end{aligned}$$

が成り立つので，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{L}}, \hat{\boldsymbol{V}})$ は問題 (P_2) の実行可能解となる．また，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{L}}, \hat{\boldsymbol{V}})$ の目的関数値は最適解 $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ の目的関数値と同じなので，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{L}}, \hat{\boldsymbol{V}})$ も問題 (P_2) の最適解となる．$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ と $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{L}}, \hat{\boldsymbol{V}})$ はともに最適解なので，補題 1 より

$$\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\gamma_t \cdot \overline{L}_t^{(i)} = \mathrm{U}_L, \tag{41}$$

$$\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\gamma_t \cdot \hat{L}_t^{(i)} = \mathrm{U}_L \tag{42}$$

が成り立つ．ただし，$\hat{L}_t^{(i)} := \overline{L}_t^{(i)}$ $((i,t) \neq (i_2,t_2),(i_2,t_2+1))$ である．(41) から (42) を引くと

$$\frac{1}{I}\left(\gamma_{t_2} \cdot \overline{L}_{t_2}^{(i_2)} + \gamma_{t_2+1} \cdot \overline{L}_{t_2+1}^{(i_2)}\right) - \frac{1}{I}\left(\gamma_{t_2} \cdot \hat{L}_{t_2}^{(i_2)} + \gamma_{t_2+1} \cdot \hat{L}_{t_2+1}^{(i_2)}\right) = 0,$$

すなわち

$$(\gamma_{t_2} - \gamma_{t_2+1})\delta_3 = 0 \tag{43}$$

を得る．これは $\gamma_{t_2} > \gamma_{t_2+1}$ と (40) に矛盾する．よって，すべての $i \in J_t^c \cap K_t$, $t \in \{1,\ldots,T-1\}$ に対し，$\tilde{V}_t^{(i)} = 0$ となることが証明された．これは，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ が，条件 (19) を満たすことを意味する．また，(35) と (36) より，$(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ は，条件 (20) を満たす．よって $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ は，問題 (P_1) の実行可能解となる．

問題 (P_1)，問題 (P_2) の実行可能領域を，それぞれ X_1, X_2 とあらわすと，$X_1 \subseteq X_2$ が成り立ち，さらに問題 (P_1) と問題 (P_2) の目的関数は共通なので，

$$(\text{問題 } (\mathrm{P}_1) \text{ の最適値}) \leq (\text{問題 } (\mathrm{P}_2) \text{ の最適値}) \tag{44}$$

が成り立つ．解 $(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{V}})$ は，問題 (P_2) の最適解かつ問題 (P_1) の実行可能解であったので，(44) より，問題 (P_1) の最適解となることが示された． □

沓名拓郎
（株）豊田中央研究所 デジタルエンジニアリング研究室
〒 480-1192 愛知県愛知郡長久手町大字長湫字横道 41-1
E-mail: kutsuna@mosk.tytlabs.co.jp

ABSTRACT

OPTIMAL DESIGN OF PAC-COMPANION STRUCTURE FOR MORTGAGE BACKED SECURITIES USING CASH RESERVE

Takuro Kutsuna
Toyota Central R&D Labs.,Inc.

Yoshitaka Kai
Kwansei Gakuin University

Masao Fukushima
Kyoto University

Mortgage backed security (MBS) is a product of mortgage securitization, which is issued backed by the repayment cash flow from a loan pool consisting of many mortgage loans. Collateralized mortgage obligation (CMO) is a form of MBS, in which repayment cash flow from a loan pool is reorganized and bonds with various risks are issued.

In this paper, we propose a method of designing CMO with PAC-companion structure. We divide repayment cash flow into two parts; a part in which principal repayment schedule must be satisfied (planned amortization class, PAC) and an unstable high-prepayment risk part (companion). We allow the repaid cash to be reserved in order to repay PAC bondholders in the following periods. We formulate the problem of determining an optimal PAC-companion structure as a mathematical programming problem and use a simulation-based approach to approximate the problem. We show that our model can be reformulated as an equivalent linear programming problem. Furthermore, we propose a modified model which yields a higher performance than the basic model. Finally we conduct numerical experiments and report the results.

©日本オペレーションズ・リサーチ学会　和文論文誌 2006 年 49 巻