日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research
Society of Japan
2006 年 49 巻 19-31

償還条項付き永久アメリカンオプションの価格式について

鈴木 淳生　　澤木 勝茂
南山大学

(受理 2005 年 2 月 9 日; 再受理 2005 年 11 月 24 日)

和文概要　ゲームオプションは買い手が任意の時刻で権利を行使することができるのと同様に，売り手も任意の時刻でペナルティを支払うことで契約をキャンセルすることができるオプションである．このペナルティが十分に大きければ売り手はキャンセルすることは最適ではないので，ゲームオプションはアメリカンオプションに退化する．本論文では，満期が無限のゲームオプションを永久ダブルバリアオプションとして定式化をおこない, 価格式を導出する．

キーワード: 金融, 最適停止問題, 永久アメリカンオプション

1. はじめに

Black-Scholes[1] によるヨーロピアンオプションの価格式が導出されてから様々なオプションが提案されてきた．アメリカンプットオプションの価格式に関しては，満期前に権利行使の可能性があること，危険資産の価格が不確実であることから閉じた形の解析解は存在しない．しかしながら，満期が無限の場合は価格式は時刻に依存せず，Black-Scholes の偏微分方程式が常微分方程式になることから，Merton[9] により解析解が導出されている．

従来，オプションは買い手のみが権利を行使する金融商品であったが，Kifer[5] により提案されたゲームオプションは売り手にもオプション契約をキャンセルする権利を与えたもので，Dynkin ゲームの理論を用いて解析される．これはアメリカンオプションに償還条項を付与したものと考えることができるので，本論文では償還条項付きアメリカンオプションと呼ぶことにする．償還条項付きアメリカンオプションでは買い手は満期までの任意の時刻で権利行使を，売り手は満期までの任意の時刻で償還することができる．ただし，償還するときに売り手は買い手に対して，ペナルティを支払わなければならない．このペナルティが十分に大きければ，売り手は償還することはなく，償還条項付きアメリカンオプションは通常のアメリカンオプションに退化する．

満期が無限である償還条項付きアメリカンプットについて，Kyprianou[6] は株式に配当がない場合について，ペイオフ関数を割引き，リスク中立確率の下での期待値をとることにより価格式を求めている．[6] では，株価が権利行使価格と等しくなったときに売り手は契約をキャンセルすることをファイナンスの観点から説明しているが，そうなることが最適であることを論証している訳ではない．

これに対し本論文では，Kyprianou[6] で示された定理を微分方程式を用いて証明する．そして売り手が償還することがあるならば，それは株価が権利行使価格に等しい場合であることを示し，価格式と買い手の最適行使境界を導出する．さらに Kyprianou[6] では言及され

ていない株式に配当がある場合の価格式を導出する．

本論文の構成は次のとおりである．第2節で無危険資産，危険資産からなる資本市場において裁定機会が存在しないための理論的枠組を述べ，満期が有限の場合の償還条項付きアメリカンオプションを最適停止問題として定式化する．第3節では満期が無限である永久アメリカンオプションについての結果をまとめる．この結果は既存の研究結果をまとめたものであるが，第4節の結果と比較する上で興味深いので整理する．第4節では償還条項付き永久アメリカンプットオプションの価格式を株式に配当がない場合は偏微分方程式を用いて，配当がある場合はBrown運動の最小到達時刻に関する性質を用いて導出する．第5節では買い手の行使境界，価格式の数値計算の結果をグラフとして提示する．最後に第6節でまとめと今後の課題を述べる．

2. 償還条項付きアメリカンオプション

本論文で考える資本市場は連続的に取引される2種類の資産から成るものとする．これらの資産のうち1つは無危険資産であり，時刻tにおける価格をB_t，無危険利子率をrとするとB_tは

$$dB_t = rB_t dt,\ B_0 > 0,\ r \geq 0 \tag{2.1}$$

をみたす．もう1つの資産は危険資産であり，時刻tにおける価格をX_tとするとX_tは確率微分方程式

$$dX_t = \mu X_t dt + \kappa X_t dW_t \tag{2.2}$$

をみたす．ここでμ,κは定数，W_tは完備な確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上で定義される標準Brown運動とする．また，W_tによって生成されるフィルトレーションを

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s; 0 \leq s \leq t\},\ \forall t \in [0, T],$$

と定義する．$\mathcal{N}$を$\mathcal{F}_T^W$のP-零集合とし，以下フィルトレーションは

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}),\ \forall t \in [0, T]$$

とする．(2.1), (2.2)を解くとそれぞれ，

$$B_t = B_0 e^{rt},\ B_0 > 0,\ r \geq 0,$$

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\kappa^2}{2}\right)t + \kappa W_t\right\}$$

となる．同値マルチンゲール測度$\tilde{P}$をPに対して

$$\frac{d\tilde{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{F}} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\kappa}\right)^2 T - \left(\frac{\mu - r}{\kappa}\right) W_T\right\}$$

と定義する．

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\kappa} t$$

とおけば，$\tilde{P}$の下で$\tilde{W}_t$は標準Brown運動となる．これを用いると(2.2)は

$$dX_t = rX_t dt + \kappa X_t d\tilde{W}_t \tag{2.3}$$

と書ける．

次に初期資産 $Z_0 = z$ をもつ投資家を考える．この投資家の時刻 t での危険資産，無危険資産の保有量をそれぞれ，α_t,β_t とする．ただし，以下の条件をみたすものとする．

$$\int_0^T (\alpha_t X_t)^2 dt < \infty, \ \int_0^T (\beta_t B_t)^2 dt < \infty.$$

時刻 t でのポートフォリオ π_t を $\pi_t = (\alpha_t, \beta_t)$ とすると，π の下での時刻 t でのこのときの投資家の資産は次のようになる．

$$Z_t^\pi = \alpha_t X_t + \beta_t B_t. \tag{2.4}$$

市場とポートフォリオに関していくつかの制約を課す．まず，市場は完全なもの，すなわち，取引は連続で行われ，資産は無限に分割可能，取引費用 · 税金はかからず，空売りの制限もないとする．次にポートフォリオは自己充足的である．すなわち，(2.4) で定義された Z_t^π が

$$Z_t^\pi = z + \int_0^t \alpha_u dX_u + \int_0^t \beta_u dB_u \tag{2.5}$$

をみたすならば，ポートフォリオ π_t は自己充足的である．(2.5) を微分形で書くと

$$dZ_t^\pi = \alpha_t dX_t + \beta_t dB_t \tag{2.6}$$

であり，(2.6) に (2.1), (2.3) を代入して整理すると，

$$dZ_t^\pi = rZ_t^\pi dt + \kappa \alpha_t X_t d\tilde{W}_t$$

となる．$Z_0^\pi = z > 0$ である自己充足的なポートフォリオ π に対し，Z_t^π の割引現在価値を $M_t^\pi = e^{-rt} Z_t^\pi$ とする．伊藤の公式から，

$$\begin{aligned} dM_t^\pi &= -re^{-rt} Z_t^\pi dt + e^{-rt} dZ_t^\pi \\ &= -re^{-rt} Z_t^\pi dt + e^{-rt}(rZ_t^\pi dt + \kappa \alpha_t X_t) d\tilde{W}_t \\ &= e^{-rt} \kappa \alpha_t X_t d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

となり，積分形で書くと

$$M_t^\pi = M_0^\pi + \kappa \int_0^t e^{-ru} \alpha_u X_u d\tilde{W}_u$$

となる．ここで，$\tilde{E}[\int_0^T (\alpha_t X_t)^2 dt] < \infty$ を仮定すると，M_t^π は $\tilde{P}$ の下でマルチンゲールとなる．すなわち，$\tilde{E}[M_t^\pi] = z$ となり，どのような取引戦略 π をとったとしても資産の期待値は，初期の資産 z に等しく，正の正味現在価値を生成することはできない．すなわち，本論文で考える市場は確率測度 $\tilde{P}$ が存在するならば，裁定機会は存在しない．

以下では危険資産を株式，無危険資産を債券とする．このオプションは売り手 A と買い手 B の間の契約 (満期は T) であり，任意の時刻において A は契約のキャンセルを，B は権利を行使することができる．B が権利を行使する前に A が時刻 $\sigma \in [0, T]$ でキャンセルした場合，B は $f_1(X_\sigma)$ を受けとる．一方，B が時刻 $\tau \in [0, T]$ で権利を行使するならば A から $f_2(X_\tau)$ を受けとる．A のキャンセルと B の権利行使が同時の場合は B の権利が優先し，A は B に $f_2(X_\tau)$ 支払う．例えば，オプションがプットオプションであるならば $f_1(X_\sigma)$, $f_2(X_\tau)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} f_1(X_\sigma) &= (K - X_\sigma)^+ + \delta, \\ f_2(X_\tau) &= (K - X_\tau)^+. \end{aligned}$$

ただし，時刻 σ,τ での株価をそれぞれ X_σ, X_τ，権利行使価格を K とする．このときの δ は A が契約をキャンセルしたことに対するペナルティと考えることができる．このペナルティ δ が十分に大きいなら A は満期までにキャンセルをしないので，償還条項付きアメリカンオプションは通常のアメリカンオプションに退化する．

アメリカンオプションが買い手の最適停止問題として定式化されたのに対して，償還条項付きアメリカンオプションは Dynkin ゲームの枠組みによる 2 人最適停止問題として定式化される．売り手 A が停止時刻 $\sigma \in [0,T]$ でキャンセルし，買い手 B は停止時刻 $\tau \in [0,T]$ で権利行使するならば A は B に停止時刻 $\sigma \wedge \tau = \min(\sigma,\tau)$ で

$$R(\sigma,\tau) = f_1(X_\sigma)1_{\{\sigma<\tau\}} + f_2(X_\tau)1_{\{\tau\le\sigma\}}$$

を支払う．唯一つの同値マルチンゲール測度 $\tilde{P}$ が存在する完備な市場において，時刻 0 での公正な価格は $\inf_\sigma \sup_\tau \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau-t)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t]$ であることを次の定理 1 で述べる．ただし，$\tilde{E}$ は確率測度 $\tilde{P}$ の下での期待値である．アメリカンオプションと同様に，買い手は $\tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau-t)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t]$ が最大になるように停止時刻を τ を選択する．一方，売り手はこの価格が最小になるように停止時刻 σ を選択する．これは 2 人ゼロ和 Dynkin ゲームであり，2 人停止問題である．

$\mathcal{T}_{t,T}$ を区間 $[t,T]$ に値をとる停止時刻の集合とする．すべての $t \in [0,T]$ に対して確率 1 で $Z^\pi_{\sigma\wedge t} \ge R(\sigma,t)$ となるような停止時刻 $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$ と自己充足的なポートフォリオ π の組 (σ,π) を満期 T の償還条項付きアメリカンオプションのヘッジという．この償還条項付きアメリカンオプションの価格は

$$V^*(0) = \inf\{V \ge 0 | \exists(\sigma,\pi) \text{ with } Z^\pi_0 = V\}$$

で定義される．ただし，(σ,π) は V のヘッジである．

定理 1. 任意の時刻 $t \in [0,T]$ に対する償還条項付きアメリカンオプションの価格 $V^*(t)$ は

$$\begin{aligned} V^*(t) &= \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau-t)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau-t)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

であり，最適な停止時刻は

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \inf\{t \in [0,T) | V^*(t) \ge f_1(X_t)\} \wedge T, \\ \hat{\tau} &= \inf\{t \in [0,T) | V^*(t) \le f_2(X_t)\} \wedge T \end{aligned}$$

で与えられる．

(証明) Kifer[5] を参照.

$\mathcal{T}_{0,\infty}$ を区間 $[0,\infty]$ に値をとる停止時刻の集合とする．定理 1 と確率過程 X_t がマルコフ性をもつことから次の系を得る．

系 1. 永久ゲームオプションの価格式 $V(x)$ は

$$\begin{aligned} V(x) &= \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}R(\sigma,\tau)|X_0 = x] \\ &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}R(\sigma,\tau)|X_0 = x] \end{aligned}$$

と書くことができる．

償還条項付きアメリカンコールについては，通常のアメリカンコールと同様に次のことがいえる．

定理 2. 償還条項付きアメリカンコールにおいて買い手は満期まで権利を行使しないことが最適となり，売り手のみの最適停止問題に退化する．

(証明) $e^{-rt}X_t$ は確率測度 $\tilde{P}$ の下でマルチンゲールである．$f(X_t) = e^{-rt}(X_t - K)^+$ とすると f は $f : R \to R$ で非減少凸関数である．よって関数 $f(X_t)$ は劣マルチンゲールである．ゆえに任意抽出定理より償還条項付きアメリカンコールの価格式 $V^{cc}(0)$ は定理 1 より，

$$V^{cc}(0) \;=\; \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \tilde{E}[(e^{-r\sigma}(X_\sigma - K)^+ + \delta)1_{\{\sigma<T\}} + e^{-rT}(X_T - K)^+ 1_{\{\sigma=T\}}]$$

で与えられる． □

3. 償還条項付き永久アメリカンプットオプション

償還条項付き永久アメリカンプットオプションは，ペナルティが償還条項のない永久アメリカンプットの価格を権利行使価格で評価した値より大きいならば，永久アメリカンプットに退化する．株式に配当がない場合，永久アメリカンプットの価格式を $V^{ap}(x)$ とすると $\delta > V^{ap}(K)$ のときに，株式に配当がある場合，永久アメリカンプットの価格式を $V_\xi^{ap}(x)$ とすると $\delta > V_\xi^{ap}(K)$ のとき, 償還条項付き永久アメリカンは永久アメリカンに退化するので売り手はキャンセルすることは最適ではない．

3.1. 配当がない場合

株式に配当がない場合の償還条項付き永久アメリカンプットオプションの価格 $V(x)$ は株価が x のとき，定理 1 の系 1 より，

$$V(x) = \sup_\tau \inf_\sigma J^x(\sigma, \tau)$$

で与えられる．ただし，

$$J^x(\sigma,\tau) = \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}\{((K - X_\sigma)^+ + \delta)1_{\{\sigma<\tau\}} + (K - X_\tau)^+ 1_{\{\tau\le\sigma\}}\}|X_0 = x]$$

であり，X_t は確率微分方程式 (2.3) をみたすものである．

定理 3. $r > 0$ のとき，償還条項付き永久アメリカンプットオプションの価格を $V(x)$ とすると $V(x)$ は

$$V(x) = \begin{cases} K - x & 0 \le x \le b^* \\ (K - b^*)\dfrac{\left(\dfrac{K}{x}\right)^\gamma - \dfrac{x}{K}}{\left(\dfrac{K}{b^*}\right)^\gamma - \dfrac{b^*}{K}} + \delta\dfrac{\dfrac{x}{b^*} - \left(\dfrac{b^*}{x}\right)^\gamma}{\dfrac{K}{b^*} - \left(\dfrac{b^*}{K}\right)^\gamma} & b^* < x < K \\ \delta\left(\dfrac{K}{x}\right)^\gamma & x \ge K \end{cases}$$

で与えられる．ただし，b^* は買い手の最適行使境界，K は売り手の行使境界である．また，$b = u_0 K$ であり，$\epsilon = \delta/K$ とすれば u_0 は方程式

$$u^{\gamma+1} - (\gamma+1)(1+\epsilon)u + \gamma = 0 \tag{3.1}$$

の $0 < u < 1$ をみたす解である．

(証明) はじめに $x \geq K$ の場合を考える．このとき買い手のペイオフは $(K-x)^+ = 0$ なので買い手は権利を行使しない．よって，売り手のみが最適停止時刻を選択する問題となる．売り手が償還する株価を $X_t = a$ とする．配当のない償還条項付き永久アメリカンプットオプションの価格 $V(x)$ は $\gamma = 2r/\kappa^2$ とすると，

$$V(x) = \delta E[e^{-r\sigma_a}|X_0 = x] = \delta\left(\frac{a}{x}\right)^{\gamma}$$

となる．ここで，σ_a は X_t の点 a への最小到達時刻である．売り手は $V(x)$ が最小になるように a を選ぶので $V(x) = V(x,a)$ とし，a について偏微分をする．

$$\frac{\partial V(x,a)}{\partial a} = \frac{\delta\gamma}{x}\left(\frac{a}{x}\right)^{\gamma-1} > 0$$

より，$V(x,a)$ は a について単調増加であるから $a = K$ のとき $V(x)$ は最小値をとる．よって売り手は $a = K$ で償還することが最適である．

次に $b < x < K$ の場合を考える．このとき $V(x)$ は

$$\frac{1}{2}\kappa^2 x^2 \frac{d^2V}{dx^2} + rx\frac{dV}{dx} - rV = 0 \tag{3.2}$$

をみたす．

(3.2) の一般解は

$$V(x) = B_1 x^{\alpha_1} + B_2 x^{\alpha_2}$$

と表せる．ここで α_1, α_2 は方程式

$$\frac{1}{2}\kappa^2\alpha(\alpha-1) + r\alpha - r = 0$$

の解である．これを α について解くと，

$$\alpha = 1, -\gamma$$

であるから，

$$V(x) = B_1 x^{-\gamma} + B_2 x \tag{3.3}$$

となる．以上から $V(x)$ は

$$V(x) = \begin{cases} K - x & 0 \leq x \leq b \\ B_1 x^{-\gamma} + B_2 x & b < x < K \\ \delta\left(\frac{K}{x}\right)^{\gamma} & x \geq K \end{cases}$$

と書ける．次に，b, B_1, B_2 を条件

$$V(b) = B_1 b^{-\gamma} + B_2 b = K - b \tag{3.4}$$

$$V(K) = B_1 K^{-\gamma} + B_2 K = \delta \tag{3.5}$$

$$V'(b) = -\gamma B_1 b^{-\gamma-1} + B_2 = -1 \tag{3.6}$$

の下で解く．(3.4), (3.5) より，

$$B_1 = \frac{K^2 - b(\delta + K)}{b^{-\gamma}K - bK^{-\gamma}}, \quad B_2 = \frac{-K^{-\gamma}(K-b) + b^{-\gamma}\delta}{b^{-\gamma}K - bK^{-\gamma}}$$

となる．これを (3.6) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
-\gamma\frac{K^2-b(\delta+K)}{b^{-\gamma}K-bK^{-\gamma}}b^{-\gamma-1}+\frac{-K^{-\gamma}(K-b)+b^{-\gamma}\delta}{b^{-\gamma}K-bK^{-\gamma}} &= -1\\
\Longleftrightarrow -\gamma\frac{\frac{K}{b}-(\epsilon+1)}{\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma}-\frac{b}{K}}\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma}+\frac{-(K-b)K^{-1}+\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma}\epsilon}{\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma}-\frac{b}{K}} &= -1
\end{aligned}
$$

を得る．上式を整理して，

$$
\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma}\left\{-\gamma\frac{K}{b}+(\epsilon+1)(\gamma+1)-\left(\frac{K}{b}\right)^{-\gamma}\right\}=0
$$

を得る．$(K/b)^{\gamma}>0$ より，

$$
-\gamma u^{-1}+(\epsilon+1)(\gamma+1)-u^{\gamma}=0
$$

をみたす u を求める．ただし，$u=b/K$ とおいた．次に，

$$
g(u)\equiv -u^{\gamma}-\gamma u^{-1}+(\epsilon+1)(\gamma+1)
$$

として関数 $g(u)$ の増減を調べる．

$$
g'(u)=-\gamma u^{\gamma-1}+\gamma u^{-2}=-\gamma u^{-2}(u^{\gamma+1}-1)=0
$$

より，$u=1$ のとき $g'(u)=0$ となる．$g(u)$ は $0<u<1$ で増加，$u>1$ で減少するので $u=1$ で最大値 $\epsilon(\gamma+1)$ をとる．また，$\lim_{u\to 0}g(u)=-\infty, \lim_{u\to\infty}g(u)=-\infty$ より，$g(u)=0$ の解は $0<u_0<1, u_1>1$ であるが，$b<K$ より u_1 は不適であるので買い手の最適行使境界は $b^*=u_0K$ である．

B_1, B_2 を (3.3) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \frac{K^2-b(\delta+K)}{b^{-\gamma}K-bK^{-\gamma}}x^{-\gamma}+\frac{-K^{-\gamma}(K-b)+b^{-\gamma}\delta}{b^{-\gamma}K-bK^{-\gamma}}x\\
&= \frac{(K-b)-b\dfrac{\delta}{K}}{\left(\dfrac{K}{b}\right)^{\gamma}-\dfrac{b}{K}}\left(\frac{K}{x}\right)^{\gamma}+\frac{-(K-b)+\left(\dfrac{K}{b}\right)^{\gamma}\delta}{\left(\dfrac{K}{b}\right)^{\gamma}-\dfrac{b}{K}}\frac{x}{K}\\
&= (K-b)\frac{\left(\dfrac{K}{x}\right)^{\gamma}-\dfrac{x}{K}}{\left(\dfrac{K}{b}\right)^{\gamma}-\dfrac{b}{K}}+\delta\frac{\left(\dfrac{K}{b}\right)^{\gamma}\dfrac{x}{K}-\dfrac{b}{K}\left(\dfrac{K}{x}\right)^{\gamma}}{\left(\dfrac{K}{b}\right)^{\gamma}-\dfrac{b}{K}}\\
&= (K-b)\frac{\left(\dfrac{K}{x}\right)^{\gamma}-\dfrac{x}{K}}{\left(\dfrac{K}{b}\right)^{\gamma}-\dfrac{b}{K}}+\delta\frac{\dfrac{x}{b}-\left(\dfrac{b}{x}\right)^{\gamma}}{\dfrac{K}{b}-\left(\dfrac{b}{K}\right)^{\gamma}}
\end{aligned}
$$

となる． □

注 1. (3.1) を ϵ について微分すると，$\frac{\partial u}{\partial\epsilon}=\frac{u}{u^{\gamma}-(1+\epsilon)}$ となる．$0<u<1$ より，任意の $\epsilon>0$ に対して $\frac{\partial u}{\partial\epsilon}<0$ である．$u=b/K, \epsilon=\delta/K$ より，買い手の行使境界 b は δ の減少関数である．

系 2. $r=0$ のとき，買い手の最適行使境界は $b=0$ となるので価格式は

$$V(x)=\begin{cases}(\delta-K)\dfrac{x}{K}+K & 0<x<K\\ \delta & x\geq K\end{cases}$$

となる．一方，償還条項のない永久アメリカンプットは前節の定理 5 より，株価によらず $V^{ap}(x)=K$ となる．

(略証) $r=0$ のとき，$\gamma=0$ となるので価格式は

$$V(x)=\begin{cases}B_1'+B_2'x, & 0<x<K\\ \delta & x\geq K\end{cases}$$

となる．条件 $V(K)=\delta, V(0)=K$ より $B_1'=K, B_2'=(\delta-K)/K$ であるので，系を得る． □

償還条項付き永久アメリカンプットの価格式は，$r>0$ のとき x に関して下に凸であるが，$r=0$ のときは $\delta>K$ の場合は上に凸，$\delta<K$ の場合は下に凸であることがわかる．また，価格式 $V(x)$ は x に関して $0<x<K$，$x\geq K$ のそれぞれの区間において線形である．

注 2. $V^{ap}(K)=\delta_1$ とする．$\delta>\delta_1$ ならば償還条項付き永久アメリカンプットオプションは永久アメリカンプットオプションに退化する．このときの価格式は

$$V(x)=V^{ap}(x)=\begin{cases}K-x & 0\leq x\leq b_1\\ (K-b_1)\left(\dfrac{b_1}{x}\right)^{\gamma} & b_1<x<\infty\end{cases}$$

で与えられる．ただし $b_1=\frac{\gamma K}{\gamma+1}$，$\gamma=2r/\kappa^2$ である．

3.2. 配当がある場合

株式に配当がある場合の償還条項付き永久アメリカンプットオプションの価格 $V_\xi(x)$ は配当がない場合と同様に，株価の初期値が x のとき，定理 1 の系より，

$$V_\xi(x)=\sup_{\tau}\inf_{\sigma}J^x(\sigma,\tau)$$

で与えられる．ただし，

$$J^x(\sigma,\tau)=\tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}\{((K-X_\sigma)^+ +\delta)1_{\{\sigma<\tau\}}+(K-X_\tau)^+1_{\{\tau\leq\sigma\}}\}|X_0=x]$$

であり，配当率を ξ とすると X_t は確率微分方程式

$$dX_t=(r-\xi)X_tdt+\kappa X_td\tilde{W}_t \tag{3.7}$$

をみたす．ここで ξ は配当率である．$0<b<x<a<\infty$ に対して，

$$V^x(a,b)=\tilde{E}[e^{-r(\sigma_a^x\wedge\tau_b^x)}((K-X_{\sigma_a^x})^+ +\delta)1_{\{\sigma_a^x<\tau_b^x\}}+\{(K-X_{\tau_b^x}^x)^+1_{\{\tau_b^x\leq\sigma_a^x\}}] \tag{3.8}$$

とする．ここで X_t^x は時刻 $t=0$ で x を出発する (3.7) の解である．σ_a^x,τ_b^x はそれぞれ，X_t^x の点 a,b への最小到達時刻，すなわち，

$$\begin{aligned}\sigma_a^x &= \inf\{t>0|X_t^x=a\}\\ \tau_b^x &= \inf\{t>0|X_t^x=b\}\end{aligned}$$

である．

補題 1. $\nu = \frac{r-\xi}{\kappa} - \frac{1}{2}\kappa$, $\gamma_1 = \frac{1}{\kappa}(\sqrt{\nu^2+2r}+\nu)$, $\gamma_2 = \frac{1}{\kappa}(\sqrt{\nu^2+2r}-\nu)$ とすると

$$\tilde{E}[e^{-r\sigma_a^x}1_{\{\sigma_a^x<\tau_b^x\}}] = \frac{\left(\frac{b}{x}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma_2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma_2}} \tag{3.9}$$

$$\tilde{E}[e^{-r\tau_b^x}1_{\{\tau_b^x<\sigma_a^x\}}] = \frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma_2}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_2}} \tag{3.10}$$

が成り立つ.

(証明) (3.9) を示す．確率測度 $\tilde{P}$ の下で X_t^x は

$$X_t^x = x\exp\left\{\left(r-\xi-\frac{\kappa^2}{2}\right)t+\kappa\tilde{W}_t\right\}$$

と書くことができる．次に

$$L_t = \exp\left(-\frac{1}{2}\nu^2 t - \nu\tilde{W}_t\right)$$

と定義する．$d\hat{P} = L_T d\tilde{P}$ とすれば Girsanov の定理より $\hat{W}_t \equiv \tilde{W}_t + \nu t$ は確率測度 $\hat{P}$ の下で標準 Brown 運動である．

$$\begin{aligned} T_\lambda &= \inf\{t>0|\hat{W}_t=\lambda\} \\ T_\rho &= \inf\{t>0|\hat{W}_t=\rho\} \end{aligned}$$

とすると，$X_t^x = x\exp(\kappa\hat{W}_t)$ より，$\log X_t^x = \log x + \kappa\hat{W}_t$ であるから,

$$\begin{aligned} \sigma_a^x &= T_\lambda, \quad a.s., \quad \lambda = \frac{1}{\kappa}\log\frac{a}{x}, \\ \tau_b^x &= T_\rho, \quad a.s., \quad \rho = \frac{1}{\kappa}\log\frac{b}{x} \end{aligned}$$

がいえる．また,

$$\begin{aligned} L_{T_\lambda}^{-1} &= \exp\left(\frac{1}{2}\nu^2 T_\lambda + \nu\tilde{W}_{T_\lambda}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\nu^2 T_\lambda + \nu\hat{W}_{T_\lambda}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\nu^2 T_\lambda + \nu\lambda\right) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \tilde{E}[e^{-r\sigma_a^x}1_{\{\sigma_a^x<\tau_b^x\}}] &= \tilde{E}[e^{-rT_\lambda}1_{\{T_\lambda<T_\rho\}}] \\ &= \hat{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\nu^2 T_\lambda + \nu\lambda\right)e^{-rT_\lambda}1_{\{T_\lambda<T_\rho\}}\right] \\ &= e^{\nu\lambda}\hat{E}\left[\exp\left\{-\left(r+\frac{1}{2}\nu^2\right)T_\lambda\right\}1_{\{T_\lambda<T_\rho\}}\right] \end{aligned}$$

となる．Karatzas and Shreve[4] より

$$\hat{E}\left[\exp\left\{-\left(r+\frac{1}{2}\nu^2\right)T_\lambda\right\}1_{\{T_\lambda<T_\rho\}}\right]=\frac{\sinh\rho\sqrt{\nu^2+2r}}{\sinh(\rho-\lambda)\sqrt{\nu^2+2r}}$$

であるので

$$\begin{aligned}\tilde{E}[e^{-r\sigma_a^x}1_{\{\sigma_a^x<\tau_b^x\}}] &= \frac{\sinh\rho\sqrt{\nu^2+2r}}{\sinh(\rho-\lambda)\sqrt{\nu^2+2r}}\frac{e^{\nu\rho}}{e^{\nu(\rho-\lambda)}}\\ &= \frac{e^{\kappa\rho\gamma_1}-e^{-\kappa\rho\gamma_2}}{e^{\kappa(\rho-\lambda)\gamma_1}-e^{-\kappa(\rho-\lambda)\gamma_2}}\\ &= \frac{\left(\frac{b}{x}\right)^{\gamma_1}-\left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma_2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_1}-\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma_2}}\end{aligned}$$

となる．同様に (3.10) も示すことができる． □

定理 4. $0<b<x<a<\infty$ のとき，$V^x(a,b)$ は

$$V^x(a,b)=((K-a)^+ +\delta)\frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma_2}-\left(\frac{b}{x}\right)^{\gamma_1}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma_2}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_1}}+(K-b)^+\frac{\left(\frac{a}{x}\right)^{\gamma_1}-\left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma_2}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma_1}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_2}} \tag{3.11}$$

$a=\infty$ のとき，

$$V^x(\infty,b)=(K-b)^+\left(\frac{b}{x}\right)^{\gamma_1} \tag{3.12}$$

で与えられる．

(証明) (3.8) は

$$V^x(a,b)=((K-a)^+ +\delta)\tilde{E}[e^{-r\sigma_a^x}1_{\{\sigma_a^x<\tau_b^x\}}]+(K-b)^+\tilde{E}[e^{-r\tau_b^x}1_{\{\tau_b^x\le\sigma_a^x\}}]$$

と書くことができる．よって補題より (3.11) が示された．(3.11) において $a\to\infty$ とすれば (3.12) が得られる．以上から定理が示された． □

注 3. $V_\xi^{ap}(K)=\delta_2$ とする．株式に配当がある場合，$\delta>\delta_2$ ならば償還条項付き永久アメリカンプットオプションは永久アメリカンプットオプションに退化する．このときの価格式は

$$V(x)=V_\xi^{ap}(x)=\begin{cases}K-x & 0\le x\le b_2\\ (K-b_2)\left(\frac{b_2}{x}\right)^{\gamma_1}, & b_2<x<\infty\end{cases}$$

で与えられる．ただし $b_2=\frac{\gamma_1 K}{\gamma_1+1}$ である．

注 4. 配当がない場合は $\gamma_2=1$，配当がある場合 $\gamma_2>1$ である．よって，両者の価格式を比較すれば後者が高く評価されることがわかる．

4. 数値例

本節では，買い手の行使境界と償還条項付き永久アメリカンプットオプションの価格式の数値例を与える．ただし本節を通して権利行使価格 $K = 100$，ボラティリティ $\kappa = 0.3$，図 1，図 2 では無危険利子率 $r = 0.045$ とした．

図 1 は (3.1) より，ペナルティ δ を変化させて買い手の行使境界を図示した．これから，δ が増加すると買い手の行使境界は減少し，$\delta = 25$ では $b = 50$ となる．これは通常の永久アメリカンプットオプションの行使境界と一致する．図 2 において，実線は下から順に，$\delta = 5$, 10, 15, 20, 25 と変化させたときの償還条項付き永久アメリカンプットの価格式 $V(x)$ を描いたものである．$\delta = 25$ のとき，上で述べたように，通常の永久アメリカンプットの価格式と等しくなる．また，$V(x)$ が $(K - x)^+ \leq V(x) \leq (K - x)^+ + \delta$ をみたし，$x = K$ で微分不可能であることも確認できる．図 3 において，実線は配当のある償還条項付き永久アメリカンプットを，点線は配当のある永久アメリカンプットを表している. 償還条項が永久アメリカンをより低く評価していることがわかる．また，権利行使時の利得関数 $(K - x)^+$ より大きいことも確認できる. ここで売り手の最適行使境界 $a = K, r = 0.1$，$\delta = 10$, 配当率 $\xi = 0.09$ とした. 図 4 において配当の有無による価格式の変化を図示した. 配当がある場合 $\gamma_2 > 1$, 配当がない場合は $\gamma_2 = 1$ である．両者の価格式を比較すれば後者が高く評価される. 実線が株式に配当がある場合，点線は配当のない場合である. 配当があることにより価格が高く評価されていることがわかる.

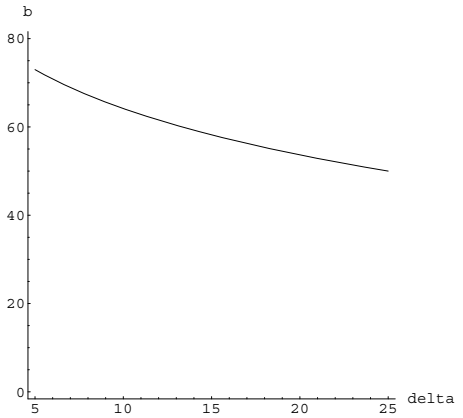

図 1: δ を変化させたときの買い手の行使境界

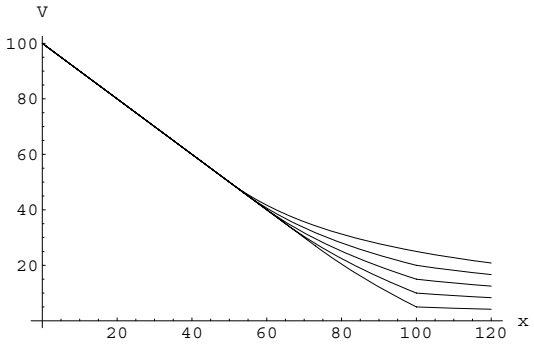

図 2: 配当がない場合の価格式

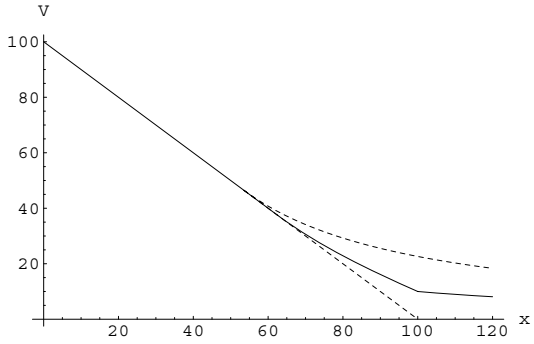

図 3: 配当がある場合の価格式

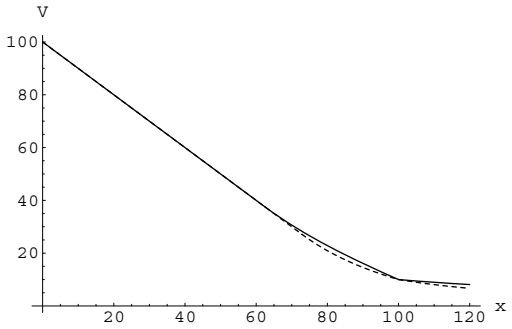

図 4: 配当の有無による比較

5. まとめと今後の課題

本論文では，買い手が任意の時刻で権利が行使でき，売り手が任意の時刻で償還することができる償還条項付き永久アメリカンプットオプションの価格式を導出した．株式に配当がない場合は Kyprianou[6] とは異なる方法で求めた．一方，配当がある場合は，Brown 運動の最小到達時刻に関する性質，Girsanov の定理を用いることにより導出した．配当がない場合，売り手は償還することがあるならば株価が権利行使価格と一致したときであることを示し，買い手の行使境界 b の数値例を与えた．配当がある場合には $V^x(a,b)$ を a,b について偏微分し，$\frac{\partial V^x}{\partial a}=0, \frac{\partial V^x}{\partial b}=0$ を解くことにより，$V^x(a,b^*) \leq V^x(a^*,b^*) \leq V^x(a,b^*)$ が成り立つような鞍点 (a^*,b^*) を求めることが必要となる．このような鞍点 (a^*,b^*) が存在するならば，$V^x(a^*,b^*)=\inf_a \sup_b V^x(a,b)=\sup_b \inf_a V^x(a,b)$ であることも示すことができる．

また今後の課題として，株価が幾何 Brown 運動以外の確率過程にしたがう場合があげられる．このとき市場は完備でないので，ヘッジポートフォリオが存在するとは限らない． また無危険利子率，ボラティリティといった定数が別の確率過程にしたがうと仮定した場合に本論文を拡張することも今後の課題である．

謝辞

本論文を作成するにあたり，査読者の方から貴重なコメントを頂きました．記して感謝いたします．

参考文献

[1] F. Black and M. Scholes: The pricing of options corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81** (1973), 637–659.

[2] E.B. Dynkin: Game variant of a problem on optimal stopping. *Soviet Mathematics Doklady*, **10** (1969), 270–274.

[3] I. Karatzas and S.E. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, (Springer, 1988).

[4] I. Karatzas and S.E. Shreve: *Methods of Mathematical Finance*, (Springer, 1998).

[5] Y. Kifer: Game options. *Finance and Stochastics*, **4** (2000), 443–463.

[6] A.E. Kyprianou: Some calculations for Israeli options. *Finance and Stochastics*,**8** (2004), 73–86.

[7] D. Lamberton and B. Lapeyre: *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* (Chapman and Hall, 1995).

[8] H.P. McKean: A free-boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics. *Industrial Management Review*, **6** (1965), 32–39.

[9] R.C. Merton: Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973), 141–183.

鈴木淳生
南山大学数理情報研究科
〒 489-0863 愛知県瀬戸市せいれい町 27
E-mail: d04mm001@nanzan-u.ac.jp

ABSTRACT

THE PRICING OF CALLABLE PERPETUAL AMERICAN OPTIONS

Atsuo Suzuki Katsushige Sawaki
Nanzan University

In this paper we deal with game option introduced by Kifer which is a contract that the buyer and the seller have both the rights to exercise and to cancel it at any time, respectively. Since game option can be canceled or called by the seller, it is a callable American option.
First, we review some results on the pricing of the non-callable perpetual American options to emphasize a comparison with our results. Secondly, we derive the value function of the callable perpetual option by solving differential equation and investigate the optimal boundaries of the seller and the buyer. The value function is not differentiable at the stock price which equals strike price. Finally, when the stock pays continuously dividends with a positive rate, we can obtain the pricing formula of callable American perpetual options by applying first hitting time approach of Brownian motion.
Also some numerical results are presented to demonstrate analytical properties of the value function.