

局面転換を考慮した確率金利モデルによるポートフォリオの金利リスク評価と その流動性預金への応用

室町 幸雄
東京都立大学

(受理 2020 年 6 月 01 日; 再受理 2021 年 1 月 19 日)

和文概要 本稿では、局面遷移を考慮した確率金利モデルを用いた資産・負債の金利リスク計測について提案し、数値例を示す。もとにするモデルは、金利過程のパラメータ値が局面に依存するものとして、局面遷移過程を有限状態連続時間のマルコフ連鎖で表現した確率金利モデルであり、モンテカルロ・シミュレーションを用いて将来の金利シナリオを発生し、資産・負債の金利リスクを数値的に計測する。提案モデルは過去の金利動向の特徴を踏まえたもので、無裁定理論を用いて将来の金利期間構造を導出すれば任意の満期の金利に依存する資産・負債モデルの構築が可能である。また、モンテカルロ・シミュレーションを用いるので、同時点の金利だけでなくタイムラグを考慮したモデリングも可能であるなど、さまざまな柔軟性を備えている。数値例からは、このモデルでは将来金利がマイナス方向に深く進まず、まるで金利に下限があるかのように振る舞うことや、現在までの金利動向を維持しつつ、極端な金利上昇シナリオ発生の可能性を織り込んだリスク量の算出が可能であることがわかった。また、応用例として流動性預金の金利リスクを計測したところ、現在までのトレンドを維持しつつ極端な事象も発生させられるモデルであることも確認できた。

キーワード: 金融, リスク管理, 金利リスク, 確率金利モデル, マルコフ局面転換モデル, 流動性預金

1. はじめに

国際的な活動を行う金融機関に課される国際金融規制の中で最も有名なものはバーゼル規制であろう。これは1988年の自己資本規制（バーゼルI）から始まり、金融の複雑化と計測技術の高度化を踏まえて2007年にバーゼルIIへ進み、間もなく発生した世界金融危機を経て、現在はバーゼルIII（Basel Committee on Banking Supervision (2019), 全国銀行協会事務局 (2016)などを参照）が段階的に施行され、より広い領域に、より多角的な視点から、より厳しい規制が適用されるようになってきた。

現在のバーゼル規制では、金融機関が複数の選択肢の中からリスク計測手法を選択できる。リスク量は積み上げ方式で算出され、例えば感応度法（sensitivities-based method, Basel Committee on Banking Supervision (2019)などを参照）の評価式はテイラー展開をもとにリスクファクターとファクター感応度にさまざまな調整を加えた積み上げ方式であり、一般的でもっともらしいが、背後に明確な確率モデルがあるわけではない。また、リスク評価は資本額対比で行われるが、資産・負債の特性から確率論的評価を行う部分とそうでない部分が混在し、それらは補い合う構成になっているとも言えるが、では全体でどうなのかといった議論はなく、統一感の欠如は否めない。もっとも、リスク計測において背後の確率モデルの存在が必須というわけではない。例えば、Basel Committee on Banking Supervision (2016)の銀行勘定の金利リスク（Interest Rate Risk in the Banking Book, IRRBB）で課されている、特定の金利変動シナリオが実現したときの経済的価値変化の計測は、背後に確

率モデルがなくてもリスク管理に有益な結果を提供してくれる。しかし、それらのシナリオがどの程度の確率で発生するかという蓋然性は定量的に議論できない。

また、複数の資産・負債クラスのリスク量の統合評価は、各クラスの価値または損失額という相互に関連性のある確率変数の和の分布の裾の形状を議論することに相当するが、共通の確率モデルを適用して統一的に評価する場合、資産・負債クラスごとのリスク量も、統合リスク量も適宜算出可能である。一方、共通の確率モデルを使わず、資産・負債クラスごとに異なる手法と尺度でリスク量を計測する場合、リスク量の合算は困難であり、合算手法やパラメータ値の選択により合算値が大きく変動するという重大な問題が生じる。

これらのことは、資産・負債クラスの特徴を反映したリスク管理をそれぞれ進めるという現在の方向性だけでなく、リスクを統一的に評価するための確率モデルと共通尺度の採用も検討の必要があることを示唆し、特にこれは資産・負債に幅広く、かつ多大な影響を与える金利リスクで必要と考えられる。本稿では、資産と負債、特に多様な負債の金利リスクを統一的に評価するための確率金利モデルの候補をシンプルな形で提案する。

本稿で取り上げるのは局面遷移を取り込んだ確率金利モデルである。局面（レジーム）とは離散的な状態空間モデルにおけるそれぞれの状態を指し、複数の局面間をある確率で遷移すると考えるのが局面転換モデルである。

図1に、1996年12月～2020年2月の円短期金利（LIBORの月末値）を示す。この図から、過去の金利の動きにはいくつかの局面（高金利・高変動局面、低金利・安定局面など）が存在すると解釈して、局面の遷移をマルコフ過程で表現し、確率金利モデル（本稿ではVasicekモデルを使用）のパラメータが局面毎に異なる値をとるモデルを考える。

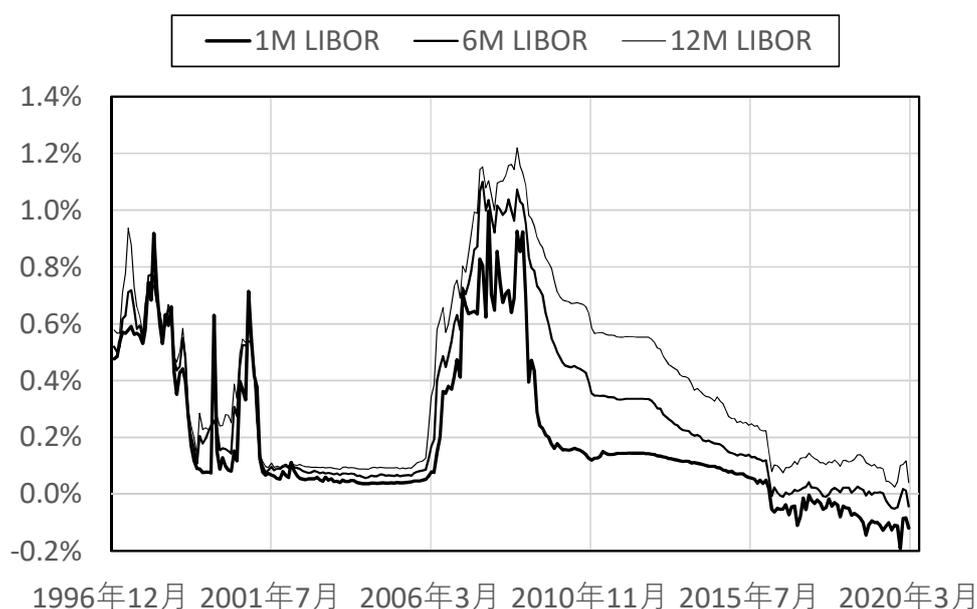


図1: LIBORの動向（Bloombergのデータより作成）

局面転換を考慮した確率モデルは、これまで金融政策などの実証分析（Inoue and Okimoto (2008), Ang and Timmermann (2012) など）、金利期間構造の動的分析（Dai et al. (2007) など）、デリバティブの価格付け（Elliott and Siu (2009) など）などに使われてきたが、適切な理論構成の下で金融リスク計測に活用されたことはこれまでなかった。しかし、このモデルは過去の金利動向の特性を捉えたものでもあり、既存のモデル以上に現実的なモデルを

構築できると考えている。例えば、後に数値例で示すが、現在のマイナス金利環境の継続性を考慮しつつ、今以上の金利低下を避け、将来の金利上昇を自然に織り込むモデルを構築できる。応用においては、負債には金利に依存して残高が変化するものがあるが、それが近年では金利依存性が見られなくなったという指摘も、局面ごとに依存性が異なると考えればマイナス金利局面に限った特性と解釈できる。

本稿の構成は以下である。2節では、局面転換を考慮した確率金利モデルをシンプルな形で提案し、それをを用いた金利リスクの計測について説明する。3節ではその数値例を示し、4節では流動性預金の金利リスク計測への応用例を示して、5節でまとめる。

2. 提案モデル

本節では、局面転換を考慮した確率金利モデルによる金利リスクの計測について説明する。

2.1. 時価評価基準のリスク計測モデルと確率測度

具体的なモデルの説明の前に、本項ではリスク計測モデルの理論について説明する。

Kijima and Muromachi (2000) は、ポートフォリオの金利リスクと信用リスクを統合評価するフレームワークを提案した。リスク計測モデルは、ある将来時刻 T の将来価値の分布に基づく価値ベースのモデルと、時刻 T までに発生しうる潜在的な損失額の分布に基づく損失額ベースのモデルに分けられる。時価の変動を扱う市場リスク計測モデルは前者に属し、多くの信用リスク計測モデルは後者に属する。Kijima and Muromachi (2000) は前者に属し、金利やデフォルト強度などのリスクファクター（資産価格に影響を与える変数）を確率微分方程式などの確率モデルで表現し、現在価値と将来価値には無裁定価格を使い、モンテカルロ・シミュレーションを用いてリスクホライズン（リスク計測期間の最終時点） T におけるポートフォリオの将来価値分布を構築する。将来価値分布が得られれば、実務で使われる VaR (Value at Risk) や ES (Expected Shortfall) などの統計学的なリスク量は適宜算出できる（室町 (2007) などを参照）。

このフレームワークの顕著な特徴は2つの確率測度、観測確率（実確率、統計的確率ともいう）と価格付けのための確率（リスク中立確率など）の両方を用いる点である。リスク計測で考察する将来シナリオは現実に発生するシナリオを扱うので、シナリオ生成には観測確率を使用する。一方、現在の状況から現在価値を、将来の状況からその時刻における将来価値を算出する際は無裁定価格、すなわち、リスク中立確率のような価格付けのための確率を用いて得られる将来キャッシュフローの割引現在価値の期待値を使用する。そのため、価値ベースのリスク計測を行うには、観測確率下の確率モデルとリスク中立確率下の確率モデルの両方が必要である。

このとき、ポートフォリオのリスク計測の実行手順は以下のようになる。

1. 現在 $t = 0$ におけるリスクファクター値を初期値として、リスクホライズン $t = T$ までのリスクファクターの将来シナリオを、与えられた確率モデルをもとにモンテカルロ・シミュレーションで発生させる。ここでは観測確率を使用する。
2. 時刻 T におけるリスクファクター値をもとに全資産の時刻 T における無裁定価格を算出し、その総和をとることで、手順1で発生したシナリオにおけるポートフォリオの将来価値を算出する。もしも時刻 T の価格評価にモンテカルロ法を使う場合、時刻 T 以降の将来シナリオをリスク中立確率などの価格付けのための確率下で生成して将来キャッシュフロー列を算出し、その時刻 T における割引価値の期待値を無裁定価格とする。
3. 手順1-2を、シナリオごとに算出されるポートフォリオの将来価値が統計処理をするた

めに十分な数に達するまで繰り返し、全シナリオのポートフォリオの将来価値から将来価値分布を構築して、その分布をもとにリスク量を算出する。ここで得られるリスク量は観測確率下の時刻 T における将来価値ベースの値である。

価値ベースのリスク計測で観測確率下のリスク量を算出するには、観測確率下とリスク中立確率下の確率モデルを与えて上記の手順 1-3 を踏む必要がある。価格付けモデルでは、無裁定価格は価格付けのための確率、例えばリスク中立確率における将来キャッシュフローの割引現在価値の期待値で与えられるので、リスク中立確率下のリスクファクターの確率モデルのみ与えればよい。しかし、そこで生成される将来シナリオは観測確率下のものではないので、リスク計測時の将来シナリオとしては使えない。

2.2. 観測確率 P 下のモデル

以下は、Elliott et al. (2007), Elliott and Siu (2009) に沿って記述する。時刻を $t, t \geq 0$, 現在を $t = 0$ として、フィルター付確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ で表す。 P は観測確率で、すべてのフィルトレーションは通常条件を満たすものとする。

まず、観測確率 P 下の局面転換を連続時間、有限状態のマルコフ連鎖モデルで考える。 K 個の状態 (局面, レジームとも呼ぶ) $k \in \{1, \dots, K\}$ が存在するとして、時刻 t における状態をマルコフ連鎖 $\mathbf{X}(t)$ で表現する。 $\mathbf{X}(t) \in \{e_1, \dots, e_K\}$ は K 次元の確率過程ベクトルで、ベクトル e_j は第 j 成分 $(e_j)_i = \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ), すなわち、第 j 成分のみ 1 でその他の成分は 0 の単位ベクトルで、時刻 t に局面 j にあることを示す。 $\mathbf{X}(t)$ の無限小生成作用素 (infinitesimal generator) Q は定常的であると仮定して、

$$Q = (q_{ij})_{i,j=1,2,\dots,K}, \quad q_{ij} = \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{\mathbf{X}(t+\Delta t) = e_j | \mathbf{X}(t) = e_i\}}{\Delta t} & , j \neq i \\ -\sum_{k \neq i} q_{ik} & , j = i \end{cases} \quad (2.1)$$

とすると、 K 次元ベクトル $\mathbf{M}(t)$ を P -マルチンゲールとして、

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t Q\mathbf{X}(s)ds + \mathbf{M}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

と表現できる。遷移確率行列 $\mathcal{P}(t)$ を

$$\mathcal{P}(t) = (p_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,K}, \quad p_{ij}(t) = P\{\mathbf{X}(s+t) = e_j | \mathbf{X}(s) = e_i\}, \quad s, t \geq 0 \quad (2.3)$$

で定義すると、 \mathcal{I}_K を K 次単位行列として、 $\mathcal{P}(t)$ は

$$\frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = Q\mathcal{P}(t), \quad \mathcal{P}(0) = \mathcal{I}_K \quad (2.4)$$

の解で、

$$\mathcal{P}(t) = \exp\{tQ\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k Q^k}{k!} \quad (2.5)$$

で与えられる。

時刻 $t, t \geq 0$ における無リスクの瞬間的な短期金利 $r(t)$ は、観測確率 P のもとで、

$$dr(t) = a(\langle \mathbf{m}, \mathbf{X}(t) \rangle - r(t))dt + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}(t) \rangle dz(t), \quad k = 1, \dots, K, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

に従うものとする。ただし、 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_K)^\top$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_K)^\top$ はそれぞれ K 次元定数ベクトル、 a と σ_k , $k = 1, \dots, K$ は正定数、 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ はベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} の内積、 $z(t)$ は確率 P のもとにおける標準ブラウン運動で、 $z(t)$ と $\mathbf{X}(t)$ は独立と仮定する。

評価対象となるデリバティブを含む証券の最長満期よりも先の将来時点を $T > 0$ とし、任意の時刻 t , $0 \leq t \leq T$ に対して $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{0 \leq t \leq T}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\mathbf{X}(s) : 0 \leq s \leq t)$, $\mathcal{F}^r = (\mathcal{F}_t^r)_{0 \leq t \leq T}$, $\mathcal{F}_t^r = \sigma(r(s) : 0 \leq s \leq t)$ とし、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X \vee \mathcal{F}^r$, すなわち $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^r$ が成り立つとする。さらに、 $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_T^X \vee \mathcal{F}_t^r$, $0 \leq t \leq T$ とする。

2.3. リスク中立確率 \tilde{P} と \tilde{P} 下のモデル、およびデリバティブの価格付け

次に、 P と同値な確率測度 P^X における $\mathbf{X}(t)$ の無限小生成作用素 Q^X もまた定常的であると仮定して、(2.1) と同様に $Q^X = (q_{ij}^X)_{i,j=1,2,\dots,K}$ を定義する。このとき、 P から P^X への測度変換を与えるラドン・ニコディム微分は、

$$q_{ij}^X = (1 + \kappa_{ij})q_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, K \quad (2.7)$$

を満たす定数 $\kappa_{ij} > -1$ と、

$$H^i(t) = 1_{\{\mathbf{X}(t) = \mathbf{e}_i\}}, \quad i = 1, \dots, K, \quad (2.8)$$

$$H^{ij}(t) = \sum_{0 < u \leq t} H^i(u-)H^j(u), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (2.9)$$

$$\eta^X(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \sum_{k,\ell=1}^K \kappa_{k\ell} q_{k\ell} H^k(u) du \right\} \prod_{0 < u \leq t} \left(1 + \sum_{k,\ell=1}^K \kappa_{k\ell} \Delta H^{k\ell}(u) \right) \quad (2.10)$$

($\Delta H^{k\ell}(u) = H^{k\ell}(u) - H^{k\ell}(u-)$) を用いて、

$$\left. \frac{dP^X}{dP} \right|_{\mathcal{F}_T^X} = \eta^X(T), \quad (2.11)$$

と表現できる。確率 P^X 下では、(2.3) と同様に P^X 下の遷移確率行列 $P^X(t)$ を定義すると、(2.2), (2.4), (2.5) で Q を Q^X , $P(t)$ を $P^X(t)$, $\mathbf{M}(t)$ を P^X -マルチンゲール $\mathbf{M}^X(t)$ に置換した式が成立する。

Elliott et al. (2007) によると、リスク性資産の価格過程 $S(t)$ が

$$dS(t) = \mu(t, S(t), \mathbf{X}(t))S(t)dt + \sigma(t, S(t), \mathbf{X}(t))S(t)dz(t), \quad t \geq 0 \quad (2.12)$$

に従うとき、

$$\eta^r(t) = \frac{r(t) - \mu(t, S(t), \mathbf{X}(t))}{\sigma(t, S(t), \mathbf{X}(t))} \quad (2.13)$$

を用いて、 $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T$ が与えられたときの P^X から同値な確率測度 P^η へのラドン・ニコディム微分を

$$\left. \frac{dP^\eta}{dP^X} \right|_{\mathcal{G}_T} = \exp \left\{ \int_0^T \eta^r(s) dz(s) - \frac{1}{2} \int_0^T (\eta^r(s))^2 ds \right\} \quad (2.14)$$

で定義すると¹, ギルサノフの定理より,

$$z^\eta(t) = z(t) - \int_0^t \eta^r(u) du \quad (2.15)$$

は P^η のもとにおける標準ブラウン運動になり, bank account $B(t) = \exp \left\{ \int_0^t r(u) du \right\}$ を基準財とするリスク性資産の相対価格は (\mathcal{G}, P^η) -局所マルチンゲールになる. ここで, それらの相対価格が (\mathcal{G}, P^η) -マルチンゲールになると仮定すると, \mathcal{G}_t が与えられたときのヨーロッパ・デリバティブの価格 $V(t|\mathcal{G}_t)$ は, 通常のリスク中立化法と同様に,

$$V(t|\mathcal{G}_t) = E^{P^\eta} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(u) du \right\} G(S(\tau)) \middle| \mathcal{G}_t \right] \quad (2.16)$$

で与えられ, さらに, \mathcal{F}_t が与えられたときの価格 $V(t)$ は, 条件付期待値の chain rule より,

$$V(t) = E^{P^\eta} [V(t|\mathcal{G}_t) | \mathcal{F}_t] = E^{P^\eta} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(u) du \right\} G(S(\tau)) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.17)$$

で与えられる. ここで, $G(S(\tau))$ はデリバティブの満期 τ , $t \leq \tau \leq T$ のペイオフ関数で, $E^{P^\eta}[\cdot]$ は確率 P^η 下の条件付期待値演算子である.

以下では, 通常使用される表現にあわせて P^η をリスク中立確率と呼び \tilde{P} で表し, $\tilde{P} = P^\eta$ のもとにおける標準ブラウン運動 $z^\eta(t)$ を $\tilde{z}(t)$, Q^X を \tilde{Q} , $P^X(t)$ を $\tilde{P}(t)$, $M^X(t)$ を $\tilde{M}(t)$ で表す. 一般に, 局面遷移を用いて記述される市場モデルは非完備で, P と同値なリスク中立確率 \tilde{P} は複数存在し, P^η はその一つに過ぎないので, (2.17) で与えられる価格は無裁定価格の一つの候補に過ぎない. しかし, Elliott et al. (2005) によると, 確率測度 P^η は最小エントロピーマルチンゲール測度 (MEMM) なので, 合理的な基準に基づいて選択される無裁定価格の一つである. なお, 標準ブラウン運動 $z(t)$ に対するリスクの市場価格を $\lambda(t)$ で表すと, $\lambda(t) = -\eta^r(t)$ である.

(2.6) と (2.15) より, リスク中立確率 \tilde{P} のもとにおける無リスクの短期金利過程は,

$$dr(t) = (\langle \phi(t), \mathbf{X}(t) \rangle - ar(t)) dt + \langle \sigma, \mathbf{X}(t) \rangle d\tilde{z}(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.18)$$

と表現できる. ただし,

$$\phi(t) = a\mathbf{m} + \eta^r(t)\sigma = a\mathbf{m} - \lambda(t)\sigma \quad (2.19)$$

である. (2.19) より, 一般に $\phi(t)$ は K 次元確率過程ベクトルであるが, 実務的に使いやすいモデルにするため, 本稿では次の仮定を用いる.

仮定 2.1. リスクの市場価格 $\lambda(t) = -\eta^r(t)$ は時刻 t の確定関数である.

仮定 2.1 より²,

$$\phi_k(t) = am_k - \sigma_k \lambda(t), \quad k = 1, \dots, K \quad (2.20)$$

は時刻 t の確定関数なので, 局面 k における確率金利モデルは観測確率 P 下では Vasicek モデル, リスク中立確率 \tilde{P} 下では拡張 Vasicek モデル (または Hull-White モデル, Hull and White(1990)) となる.

¹この測度変換を risk-neutral regime-switching Esscher transform と呼ぶ. (2.14) の右辺は $dM_{0,t} = M_{0,t} d\eta^r(t)$, $M_{0,0} = 1$ で与えられる stochastic exponential $M_{0,T} = \varepsilon(\eta^r)_T$ である.

²仮定 2.1 は $\lambda(t)$ の推定を容易にするための一つの提案で, どの局面にいても $\lambda(t)$ は同じで確定値をとるという考え方である. 一般に $\lambda(t)$ は \mathcal{F}_t -適度な確率過程なので, 局面 $\mathbf{X}(t)$ に依存してもよい. $\lambda(t)$ のモデルによる推定結果や計算結果の相違の議論は今後の課題である.

2.4. 将来の金利期間構造

本稿の設定の下では Elliott and Siu (2009) と同じ議論を展開できる．その結果のみ示すと、時刻 t における満期 T の割引債価格は、 $r(t) = r$, $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}$ として

$$\begin{aligned} P(t, T, r, \mathbf{X}) &= \tilde{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(u) du \right\} \middle| r(t) = r, \mathbf{X}(t) = \mathbf{X} \right] \\ &= \exp \{ \langle \mathbf{A}(t, T), \mathbf{X} \rangle - B(t, T)r \} \end{aligned} \quad (2.21)$$

で与えられる．ただし、

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (2.22)$$

であり、 $\mathbf{A}(t, T) = (A_1(t, T), \dots, A_K(t, T))^\top$, $A_i(t, T) = \log \bar{A}_i(t, T)$ と表現すると、 $\bar{\mathbf{A}}(t, T) = (\bar{A}_1(t, T), \dots, \bar{A}_K(t, T))^\top$ は境界条件を $\bar{A}_i(T, T) = 1$, $i = 1, \dots, K$ とする連立常微分方程式

$$\frac{d\bar{A}_i(t, T)}{dt} + \left\{ \frac{1}{2} \sigma_i^2 B^2(t, T) - \phi_i(t) B(t, T) \right\} \bar{A}_i(t, T) + \sum_{j=1}^K \bar{A}_j(t, T) \tilde{q}_{ji} = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.23)$$

の解である．実際にはこの問題は、満期 T における終端条件 $\bar{A}_i(T, T) = 1$, $i = 1, \dots, K$ を初期条件として時刻 t に関してバックワードに現在時点 $t = 0$ まで計算する．その場合、コルモゴロフの前向き方程式 (2.23) ではなく、コルモゴロフの後向き方程式

$$\frac{d\bar{A}_i(t, T)}{dt} + \left\{ \frac{1}{2} \sigma_i^2 B^2(t, T) - \phi_i(t) B(t, T) \right\} \bar{A}_i(t, T) + \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij} \bar{A}_j(t, T) = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.24)$$

を解くことになる．(2.24) は Runge-Kutta 法などで数値的に容易に解けて、時刻 t における満期 T のゼロレート（割引債の最終利回り）は、

$$R(t, T, r(t), \mathbf{X}(t)) = - \frac{\log P(t, T, r(t), \mathbf{X}(t))}{T - t} \quad (2.25)$$

で与えられる．

2.5. 金利リスクの計測手順

将来時刻（リスクホライズン） T , $T > 0$ におけるポートフォリオの金利リスクは以下の手順で計測する．

金利リスクの計測手順

1. $(r(0), \mathbf{X}(0))$ を初期値として、(2.5) で与えられる推移確率行列 $\mathcal{P}(t)$ と確率微分方程式 (2.6) に従い、モンテカルロ・シミュレーションにより観測確率 P 下の離散時点上の将来シナリオのサンプルパス $(r(t_i), \mathbf{X}(t_i))$, $i = 1, \dots, n$, $t_n = T$ を生成する．ここで、 t_i , $i = 1, \dots, n$ はキャッシュフローの評価が必要な将来時刻である．
2. 将来時刻 t_i , $i = 1, \dots, n$ における金利期間構造を、手順 1 で生成した $(r(t_i), \mathbf{X}(t_i))$ から (2.21) と (2.25) を使って算出する．

3. 生成した金利期間構造をもとに、資産・負債から生じるキャッシュフローや資産・負債価格を算出する。資産・負債を金利デリバティブとして評価できるならば、(2.17)を用いて無裁定価格を算出してもよい。
4. 将来シナリオの総数が統計処理をするために十分な数に達するまで、手順1-3を繰り返す。十分な数の将来シナリオが得られたら、手順5に進む。
5. 生成した将来シナリオを統計処理するなどして、資産・負債のリスク量を算出する。

算出すべきリスク量は規制の種類や資産・負債の種類などにより異なるので VaR (Value at Risk) や ES (Expected Shortfall) に限定されないが、将来シナリオから生成される将来価値分布などから算出できる。その一例として、4節では流動性預金の金利リスク評価への応用例を示す。

2.6. モデルパラメータの推定

本項では提案モデルのパラメータ推定の概略を述べる。提案モデルに必要なパラメータは、

- 1) 局面数： K ,
- 2) Vasicek モデルのパラメータ： $a, (m_k, \sigma_k), k = 1, \dots, K$,
- 3) 初期滞留確率： $\rho_k = P\{\mathbf{X}(0) = \mathbf{e}_k\}, k = 1, \dots, K$,
- 4) P 下の無限小生成作用素： $\mathcal{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,K}$,
- 5) \tilde{P} 下の無限小生成作用素： $\tilde{\mathcal{Q}} = (\tilde{q}_{ij})_{i,j=1,\dots,K}$,
- 6) 標準ブラウン運動 $z(t)$ のリスクの市場価格： $\lambda(t)$,

である。以下では、1) の局面数 K は与えられているとする。

まず、観測確率 P 下のパラメータ 2)–4) に関しては、サンプリング間隔 Δt の短期金利 (例えば1ヶ月 LIBOR などを代理変数として使用) の観測データ $\{r_0, r_1, \dots, r_W\}$ から EM アルゴリズムを用いて推定できる。ただし、このアルゴリズムで直接推定するのは $\mathcal{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,K}$ ではなく、定常的な一期間の遷移確率行列 $\mathcal{P}(\Delta t) = (p_{ij}(\Delta t))_{i,j=1,\dots,K}$,

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{\mathbf{X}(t + \Delta t) = \mathbf{e}_j | \mathbf{X}(t) = \mathbf{e}_i\}, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (2.26)$$

と、2)–3) である。本稿では紙面の都合で EM アルゴリズムの具体的な数式や推定手順は省略する。EM アルゴリズムに関しては石島 (2005), 小西ら (2008), 中川 (2015) などを参照されたい。4) の無限小生成作用素 $\mathcal{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,K}$ は、

$$q_{ii} = - \sum_{j \neq i} q_{ij}, \quad i = 1, \dots, K, \quad q_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (2.27)$$

の制約条件のもとで (2.5) から推定する。1) の局面数 K に関しては、複数の K 値を設定して K ごとに上記の推定をそれぞれ行い、AIC などの統計量が最小となる K を採用することが望ましい。本稿の数値例では、予備的な推計結果をもとに $K = 3$ を選択している。

パラメータ 5)–6) は、既に推定された観測確率 P 下のパラメータと、現在 $t = 0$ における金利期間構造の観測データをもとに推定する。パラメータは同時推定が理想的であるが、ここでは簡便な二段階法を提案する。簡単のため、現在の局面は初期滞留確率 ρ_k が最も高いところにある、すなわち、 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{e}_{\hat{k}}, \hat{k} = \arg \max_k \rho_k$ とするが、初期分布 3) を考慮しても推定可能であることは確認済である。

1. 現在の金利期間構造に最もよく適合するように、5) の $\tilde{\mathcal{Q}} = (\tilde{q}_{ij})_{i,j=1,\dots,K}$ を求める。例えば、(2.27) および $\lambda(t) = 0$ を制約条件とし、現時点における期間 i 年 ($i = 1, 2, \dots, 10$)

のゼロレートを $R_{obs}(0, i)$ として、ゼロレートの相対誤差の二乗和

$$F = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{R(0, i; r(0), \mathbf{X}(0)) - R_{obs}(0, i)}{R_{obs}(0, i)} \right)^2 \quad (2.28)$$

を最小化する \tilde{Q} を最適化の数値計算パッケージを用いて求める。

2. 6) の $\lambda(t)$ を、現時点における金利期間構造を再現するように求める。例えば、 $\lambda(t)$ を階段関数、すなわち、 $t \in [i-1, i)$ において $\lambda(t) = \lambda_i$ (一定) と仮定して、 $R(0, i; r(0), \mathbf{X}(0)) = R_{obs}(0, i)$, $i = 1, \dots, 10$ を満たすように λ_i を i の小さい順に求める。

上記の方法を用いれば、モデルから算出される各年のゼロレートは現在の観測値に必ず一致するが、これは平均的に $\lambda(t) = 0$ となることを暗に想定した簡便法に過ぎないので、推定バイアスの存在を否定できない。より適切で安定的な推定法の提案は今後の課題である。

3. 将来の金利シナリオの数値例

本節では提案モデルによる将来の金利シナリオの数値例を示す。まず、実際のデータに基づく観測確率 P 下のパラメータと、 $t = 0$ における金利期間構造を与えたときの \tilde{P} 下のパラメータの例を示す。次に、設定したパラメータのもとで将来金利のシミュレーションを行い、将来の短期金利の分布と金利期間構造を示す。

本稿はモデルの説明を主目的とするので、以下では、提案モデルと、常に局面2に留まると仮定した場合（拡張 Vasicek モデルと呼ぶ）の結果を比較することで、局面遷移が将来の金利に与える効果を定量的に示す。局面数 K はあらかじめ与えることとし、パラメータ推定とその結果の詳細は省略する。これらは稿を改めて議論したい。

3.1. 観測確率 P 下のパラメータ：推定結果の例と以後の計算のための設定

表1は、 $K = 3$ と仮定して、2003年1月–2018年2月の1ヶ月 LIBOR の月末値の時系列データから EM アルゴリズムを用いて推定した結果である³。

表 1: 3局面時のパラメータの推定値

regime k	a	m_k (%)	σ_k (%)
1	0.26	-0.05 %	0.01 %
2	0.26	0.10 %	0.05 %
3	0.26	0.70 %	0.48 %

観測確率 P 下の \hat{Q} は、非対角成分の非負制約のもとで

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -0.0375 & 0.0375 & 0.0000 \\ 0.0736 & -0.2143 & 0.1407 \\ 0.0000 & 0.1594 & -0.1594 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

と推定され、 \hat{Q} から1年間の局面遷移確率行列を計算すると、

$$\begin{pmatrix} 0.9644 & 0.0333 & 0.0023 \\ 0.0653 & 0.8175 & 0.1172 \\ 0.0051 & 0.1329 & 0.8620 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

³ $K = 1, 2, 3$ に対してそれぞれパラメータ推定を行ったところ、AIC は $K = 3$ で最も低かった。まだ限られた例でしか分析していないので、本格的な分析は稿を改めて議論したい。

となった。

図2に、データから推定された各時点における各レジームの滞留確率を示す。この結果によると、2003年1月の初期滞留確率は局面2で100%、2018年2月の滞留確率は局面2で43%、局面3で57%であった。この予備的な推定結果では、各時点の金利の変動性が滞留確率に強く影響し、変動の激しい時期は局面3、平穏な時期は局面1の滞留確率が高くなり、必ずしも金利水準を反映するわけではないように見える。これが一般的な特徴なのか、あるいは局面数を増やせば各レジームの特徴が変化して金利水準を反映するようになるのか、といった検討は今後の課題である。

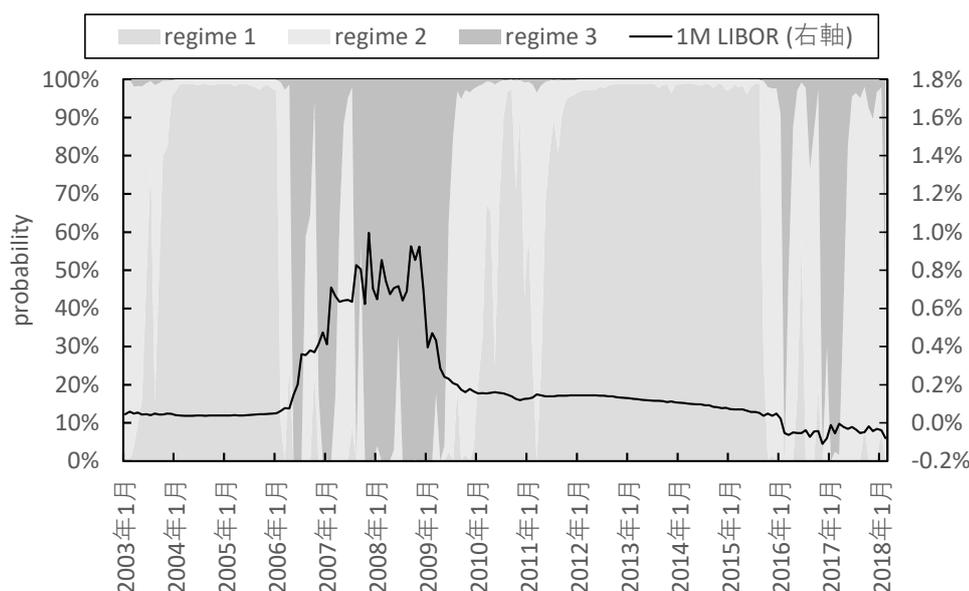


図2: 各時点のレジーム滞留確率と 1M LIBOR

上記の推定結果をもとに、以後の数値例で使用する設定を検討する。

表1の推定値 $\hat{m} = (-0.0005, 0.001, 0.007)$ は近年継続する超低金利環境を反映してどれも値が小さく、当然差も小さいため、提案モデルの特性が現れにくい。そこで、提案モデルの特性を明確に示すため、以下では $(m_2, m_3) = (0.011, 0.027)$ として計算を行う⁴。具体的には、以下の計算では表1ではなく表2の値を使用する。また、計算の初期値には $\mathbf{X}(0) = (1, 0, 0)$ 、すなわち初期時点では局面1とする。図2によれば局面3または局面2を使用の方が適切であるが、局面は金利水準の相違を反映すると捉える方が負債の評価では好ましいと考えて、近年の金利水準 ($r(0) \simeq -0.1\%$) をもとに初期状態を局面1とした。また、本稿の趣旨である提案モデルの局面転換の影響を明確に示すにもその設定が効果的とも考えた。これらの設定に関しては、提案モデルの特性、金利データの特性をまだ掌握できていない現時点での筆者の判断に過ぎないが、モデルの提案に付ける数値例としては好ましいと考えている。

3.2. 現在の金利期間構造へのフィッティング

次に、現在観測される金利期間構造へフィッティングすることで残りのモデルパラメータを推定する。3.1節で設定した P 下のモデルパラメータを使用し、近年の金利水準（短期金利

⁴推定値をそのまま使用した場合の結果は室町 (2019) を参照されたい。

表 2: 以下の計算で用いるパラメータ値

regime k	a	m_k (%)	σ_k (%)
1	0.26	-0.05 %	0.01 %
2	0.26	1.10 %	0.05 %
3	0.26	2.70 %	0.48 %

$\simeq -0.1\%$) をもとに, $t = 0$ におけるゼロレートを

$$R(T) = -0.001 + 0.0016T - 0.00005T^2, \quad 0 \leq T \leq 10, \quad (3.3)$$

(T は満期 (年), $R(T) = 0.01$ は 1.0% を表す) で与える. この設定は近年の実際の金利期間構造よりも長短金利差が大きい, そのような場合でも表現できることを示すために敢えて設定した. また, リスクの市場価格 $\lambda(t)$ は 1 年ごとに一定, すなわち $\lambda(t) = \lambda_i, i - 1 \leq t < i, i = 1, \dots, 10$ と仮定する.

2.6 節の二段階法で推定したところ, リスク中立確率 \tilde{P} 下の無限小生成作用素

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -1.1182 & 0.3507 & 0.7675 \\ 0.0782 & -0.1785 & 0.1003 \\ 0 & 0.2200 & -0.2200 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

および表 3 の結果が得られた. 図 3 に, 制約条件として与えたゼロレートのデータ (×印) と, 推定値を用いてモデルから算出された金利期間構造を示す. ここで, 推定結果 1 は推定結果すべてを用いた場合, 推定結果 2 は $\lambda(t) = 0$ として \tilde{Q} だけでデータにあわせようとした場合である. この比較は, \tilde{Q} だけでどの程度入力データを再現できるか, $\lambda(t)$ がどの程度補正しているかを示している. 図 3 の 2 年未満のカーブにはやや不自然な歪曲が見られるが, これは \tilde{Q} だけでは短期部分の入力データとの乖離が大きく, それを $\lambda(t)$ で強引に合わせていることを示している. しかし, より短い間隔, 例えば 0.5 年ごとにゼロレートの入力データを設定したり, 短期部分の荷重を重くして \tilde{Q} を推定するなどの工夫により, この不自然な歪曲を低減させることも可能である⁵.

表 3: リスクの市場価格の推定値 (提案モデル)

t (年)	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]
$\lambda(t)$	-1.5097	0.9951	-0.4411	0.8240	-0.5776
t (年)	[5, 6]	[6, 7]	[7, 8]	[8, 9]	[9, 10]
$\lambda(t)$	0.5095	-0.6344	0.3332	-0.5395	0.334

拡張 Vasicek モデルでは $a = 0.1$ とする. 一方, Janosi et al. (2003) が提案した, 金利期間構造の時系列データから Vasicek モデルのパラメータ (a, σ) を推定する方法を用いて分析したところ, $(\hat{a}, \hat{\sigma}) = (0.0001, 0.0006)$ が得られた. 拡張 Vasicek モデルの設定値では, この結果と比較すると, 金利は上昇しやすくなるが, 変動性はやや低下する. 本稿の数値例の目

⁵この設定のもとで初期局面を局面 2 にすると, \tilde{Q} だけで概ね金利期間構造を再現できて, $\lambda(t)$ は 1 桁小さくなった. このようなパラメータ推定に関する分析結果を示すことも今後の課題である.

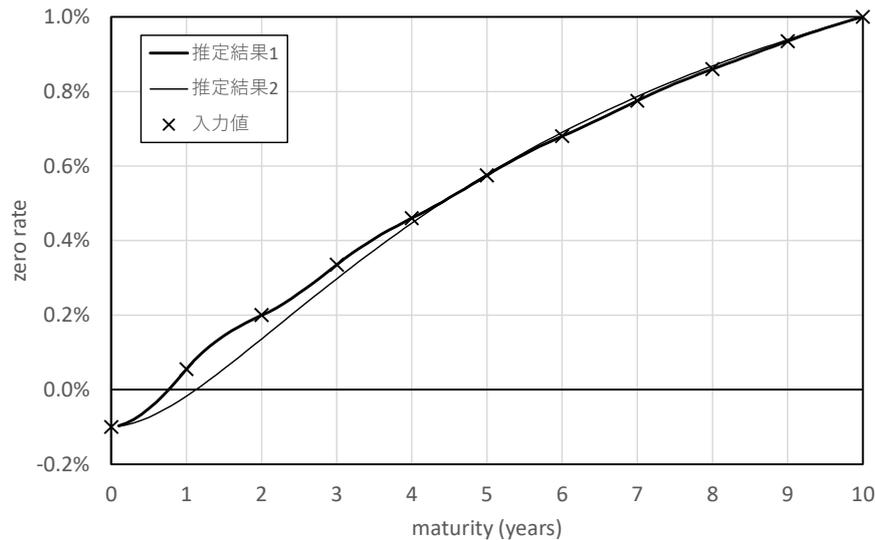


図 3: ゼロレートの期間構造：入力値とカリブレーション結果（提案モデル）

的は局面遷移の効果を示すことなので、モデルによるパラメータ推定値の相違は稿を改めて議論する⁶。なお、拡張 Vasicek モデルでは \tilde{Q} を使用しないので、現在の金利期間構造から $\lambda(t)$ を直接推定できる。このときのリスクの市場価格を表 4 に示す。

表 4: リスクの市場価格の推定値（拡張 Vasicek モデル）

t (年)	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]
$\lambda(t)$	-4.0886	-4.0035	-3.7730	-4.1248	-3.3205
t (年)	[5, 6]	[6, 7]	[7, 8]	[8, 9]	[9, 10]
$\lambda(t)$	-3.6295	-2.7657	-2.8948	-1.9652	-1.9206

3.3. 将来の短期金利の分布と金利期間構造

本項では、3.2 節のパラメータを使用した提案モデルと拡張 Vasicek モデルのモンテカルロ・シミュレーションの結果を比較して、局面遷移が将来の金利分布に与える効果を示す。シミュレーションでは $t = 0$ で局面 $\mathbf{X}(0) = (1, 0, 0)$ （提案モデルでのみ使用）、短期金利 $r(0) = -0.001$ （-0.1%）を初期値とし、タイムステップ 1/60 年（0.2ヶ月）で 10 年後までの計算を 10,000 回行った。計算時間は Intel Core i7-8700 CPU @3.20GHz の PC で約 28 秒であった。

図 4 に、拡張 Vasicek モデルによる瞬間的な短期金利 $r(t)$ の将来（2, 4, 6, 8, 10 年後）の分布を示す。横軸は短期金利（short rate）、縦軸は頻度（frequency）である。拡張 Vasicek モデルでは将来の短期金利は正規分布に従い、分布は広がりながら平均回帰水準 1.1% のある右方向へと推移する。図 5 にはパーセント点および average（平均値）の時間推移を示す。この図からも、分布が緩やかに広がりながら全体として上昇していくことがわかる。なお、図 5 の average は将来の各時点における短期金利の分布から求めた平均値を繋いだ線で、対応するサンプルパスがあるわけではない。これは後述する幾つかの図でも同様である。

図 6 は提案モデルによる短期金利 $r(t)$ の将来（2, 4, 6, 8, 10 年後）の分布である。この図によると、提案モデルでは短期金利の初期値付近にできる分布のピークはその後数年間

⁶ $(\hat{a}, \hat{\sigma}) = (0.0001, 0.0006)$ による計算結果は室町 (2019) を参照されたい。

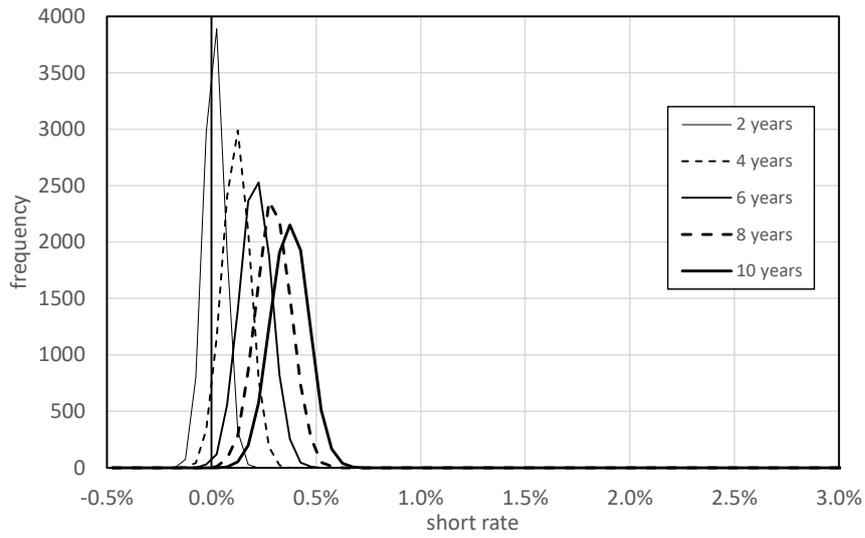


図 4: 将来の短期金利の分布 (拡張 Vasicek モデル)

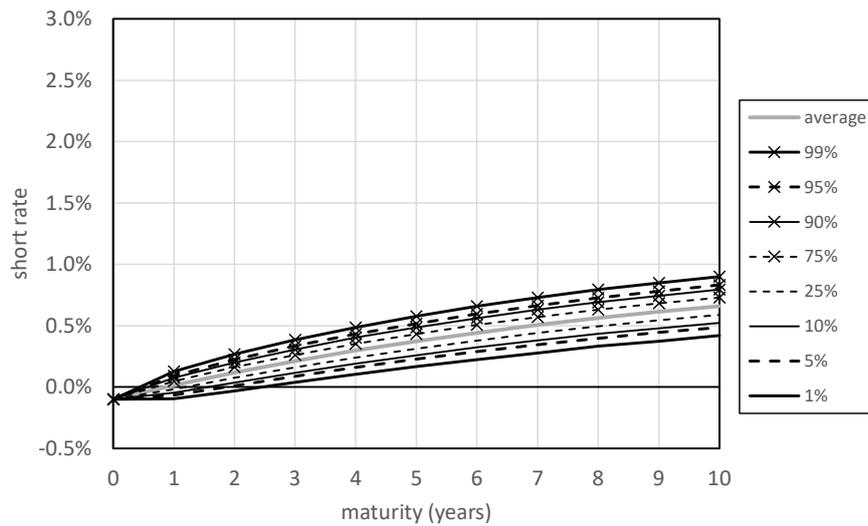


図 5: 将来の短期金利のパーセント点の時間推移 (拡張 Vasicek モデル)

鋭い形状のまま維持されるが、時間が経つにつれて右裾が延びていく。図4と図6をそれぞれ拡大したものが図7と図8である。これらの図から、拡張 Vasicek モデルでは右裾が急速に減衰し、10年経っても0.8%を越える将来シナリオはほとんど現れないが、提案モデルでは右裾が次第に延びて2%以上のシナリオも現れる一方で、分布の左裾はほとんど変わらない。提案モデルで分布の左裾がほぼ変わらないのは、初期値より低金利側には局面が存在しないことと、局面1のボラティリティ ($\sigma_1 = 0.01\%$) が非常に小さいからである。一方、分布の右裾が次第に伸びていくのは高金利局面への遷移の効果である。局面2や局面3へ遷移すると平均回帰水準が高くなり、平均回帰力 $a = 0.26$ が通常の Vasicek モデルよりも高いため⁷、平均回帰水準へと緩やかに推移する。10年後では0.8%付近までである程度の分布が見られるが、これは局面2または局面3へ遷移したシナリオに対応するものである。しかし局面3への遷移確率は低く、平均回帰係数 a もそれほど高くないので、1.0%以上の分布はなだらかに低下する。これらの結果、図4のように分布のピークが高金利方向に推移することも、ピーク付近で分布が広がることもなく、当初の形状をあまり変えず徐々にピークを下げ、右裾だけが時間とともに延びていく。

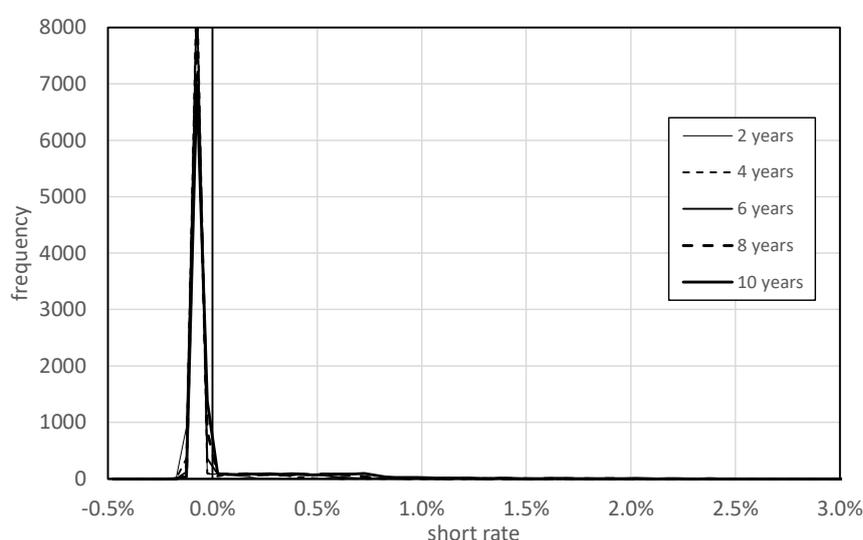


図 6: 将来の短期金利の分布 (提案モデル)

図9は提案モデルによるパーセント点の時間推移であるが、ここにも上述の結果が反映されている。1%点や5%点だけでなく25%点まで10年経ってもあまり変化しないが、averageは時間とともに緩やかに上昇し、確率90%以上のパーセント点はそれぞれ特定の時点から急速に上昇する。図8からもわかるように、提案モデルによる将来の短期金利は右裾が長く伸びた極めて非対称性の強い分布に従うが、この特徴は時間の経過とともに顕著になる。この分布の非対称性は、averageが当初は90%点と同水準にあり、10年後でも75%点を越える水準にあることにも表れている。

図10と図11に、同じ乱数による1年毎のゼロレートカーブの時間推移を示す。横軸の1年から10年にかけて伸びるカーブは1年後の期間0年から9年までのゼロレートカーブ、横軸の3年から10年にかけて伸びるカーブは3年後の期間0年から7年までのゼロレートカーブで、他のカーブも同様の意味を持つ⁸。提案モデルでは、3年目から4年目の間に局面2に

⁷デリバティブの価格付けでは感覚的に $a \leq 0.1$ で、これは本稿の予備的な推定結果とも整合的である。

⁸参考のため、将来の各時点における短期金利の1%点と99%点も図に示した。

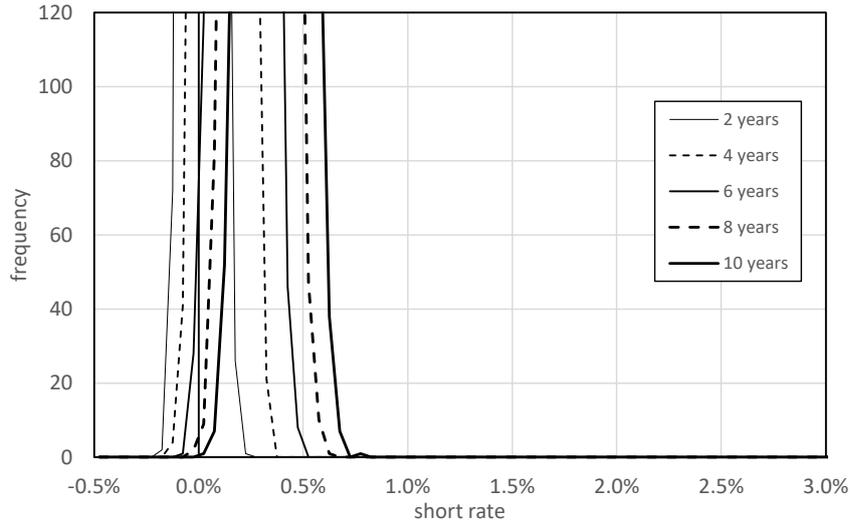


図 7: 将来の短期金利の分布 (拡張 Vasicek モデル, 拡大図)

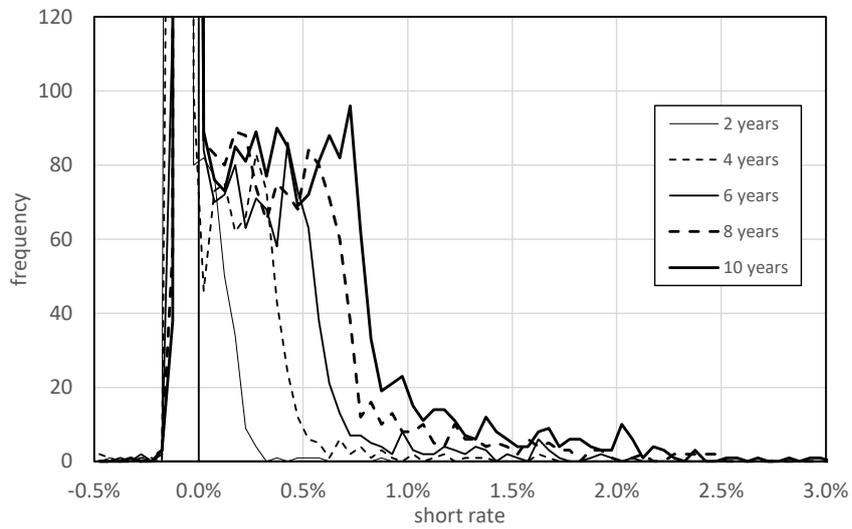


図 8: 将来の短期金利の分布 (提案モデル, 拡大図)

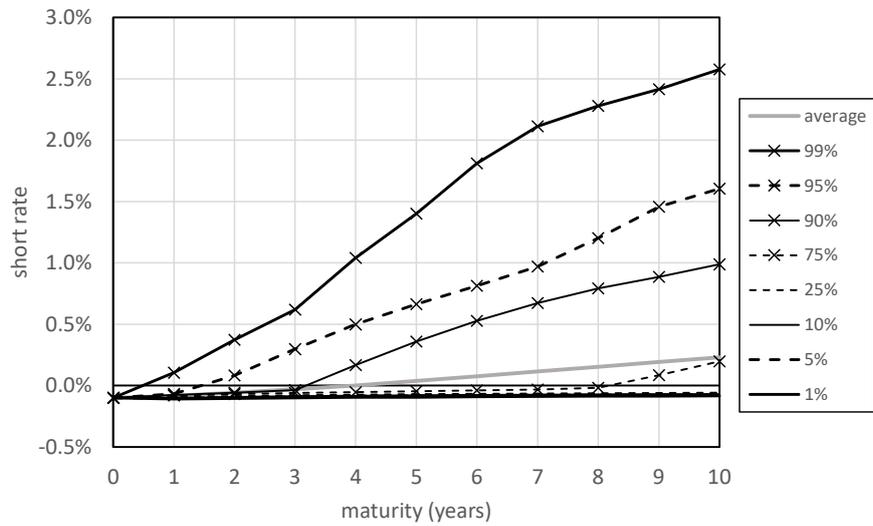


図 9: 将来の短期金利のパーセント点の時間推移 (提案モデル)

遷移し、さらに4年目から5年目の間に局面3に遷移した。これを反映して、図11の5年目のゼロレートカーブは3年目までのカーブに比べて高くなり、7年目以降のカーブはさらに一段と高くなっている。これは拡張 Vasicek モデルのゼロレートカーブ（図10）には現れない提案モデル独特の金利期間構造の変動パターンである。1ファクターモデルでは初期時点のイールドカーブ（より正確にはインプライドフォワードレート・カーブ）の形状を将来も保持し続ける傾向が見られるが⁹、図11は、提案モデルによる将来のイールドカーブの方がより柔軟な形状に変動しうることを示している。

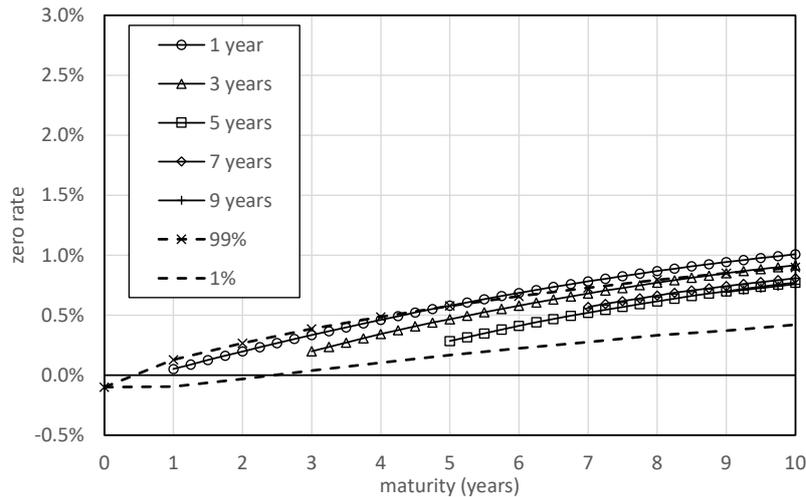


図10: 将来の金利期間構造の推移の例（拡張 Vasicek モデル）

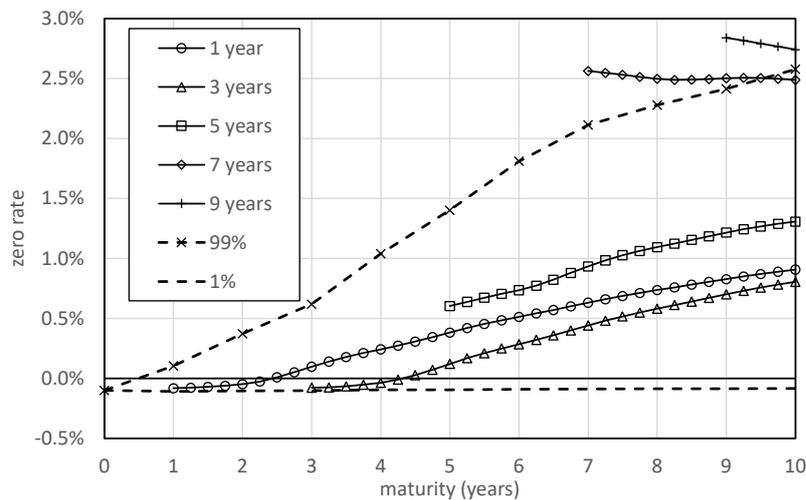


図11: 将来の金利期間構造の推移の例（提案モデル）

ここで示した数値例をまとめると、提案モデルには、(a) 将来金利がマイナス方向に深く進んでいかない、すなわち、将来金利に下限があるかのように振る舞うこと、(b) 現在まで

⁹例えば拡張 Vasicek モデルの将来のゼロレートカーブの概形は、現時点のインプライドフォワードレート・カーブを上下に平行移動したものに似た形になること、詳細に言えば、長期部分ほど平行移動幅が緩やかに縮小していく形になることを理論的に導出できる。

の金利動向を概ね維持しつつ、極端な金利上昇シナリオ発生の可能性も織り込める、平常時と異常時を同時に表現できること、(c) 将来のイールドカーブは局面転換の影響で大きく変化する可能性があり、初期時点のイールドカーブ（インプライドフォワードレート・カーブ）の形状を維持し続けるわけではないこと、などの特徴がある。ただし、これらの性質はモデルパラメータの値次第なので、正確な議論のためには更なる調査が必要である。

4. 応用例：流動性預金の金利リスク評価

金融機関の金利リスク評価は、資産だけでなく負債もあわせて行う必要がある。なぜならば、資産として持つ債券や貸付の金利リスクの一部は、負債として持つ預金などの金利リスクと相殺されるからであり、バーゼルⅡ以降、定期性預金の解約率や流動性預金（普通預金など）の残高増加率の金利依存性を考慮した金利リスク評価が重視されるようになった（Basel Committee on Banking Supervision (2016)などを参照）。例えば、期限の定めのない流動性預金は、翌日引き出される可能性を重視すれば預金の滞留期間（債券の満期に相当）はほぼゼロであるが、実際には多くの部分が長期間引き出されずに留まり、コア預金と呼ばれているが、そのコア預金が資産の金利リスクを相殺すると考えられる。しかし、現状ではコア預金の特性を評価する標準モデル、流動性預金の滞留期間を評価する標準モデルがあるとは言い難い（Jarrow and van Deventer (1998), O'Brien (2000), 伊藤・木島 (2007), 影井・小柳 (2012), 上武・枇々木 (2011), 室町 (2014), 日興リサーチセンター (2017)などを参照）。本節では、2節の金利モデルを用いた流動性預金の金利リスクの評価事例を示す。

4.1. 預金残高のモデル化

預金残高（あるいはその変化率）を金利の関数として記述すれば、3節の将来金利シナリオから預金残高シナリオを作成できるので、将来の預金残高分布を用いた金利リスク評価を行うことができる。ここではデータフォアビジョン (2013) の一ヶ月金利と残高変化率の関係式を若干変更し、任意の満期のゼロレートと残高変化率の関係式として使用する。具体的には、時刻 t における個人流動性預金残高を $L_1(t)$ 、法人流動性預金残高を $L_2(t)$ 、前月比を $R_{L_i}(t) = L_i(t + \Delta t)/L_i(t)$, $i = 1, 2$ として、

$$R_{L_1}(t) = 1.00452 - 0.00769 \sqrt{\max(R(t, t + \Delta t_1) + 0.001, 0)(\%)}, \quad (4.1)$$

$$R_{L_2}(t) = 1.00504 - 0.01988 \sqrt{\max(R(t, t + \Delta t_2) + 0.001, 0)(\%)}, \quad (4.2)$$

とし、総流動性預金残高は $L(t) = L_1(t) + L_2(t)$ とする。初期値は $L_1(0) = 1.6 \times 10^6$ 万円, $L_2(0) = 1.0 \times 10^6$ 万円とし、 $\Delta t_1 = 1$ ($R(t, t + \Delta t_1)$ は時刻 t の1年物ゼロレート), $\Delta t_2 = 1/12$ ($R(t, t + \Delta t_2)$ は時刻 t の1ヶ月物ゼロレート) とする。(4.1)と(4.2)より、このモデルでは当該期間の金利が -0.1% 以下のとき、残高変化率の金利依存性は完全に消失する。

本稿のモデルでは将来の金利期間構造を扱えるので、預金残高の変化率と金利の関係を、ある特定の期間の金利（例えば1ヶ月物の金利）だけでなく、任意の期間の金利を使って表現できる。また、金利の局面に応じて預金残高と金利の関係を变えることも可能であり、現在のマイナス金利環境下では残高と金利に明確な関係性が見られないという観測事実も、マイナス金利局面の特徴と解釈できる。さらに、将来の残高推移をモンテカルロ・シミュレーションで算出するため、例えば、預金残高と1ヶ月前の金利との関係を考えるとといったタイムラグを取り入れたモデルも構築可能である。実際の分析では、流動性預金を預金種類、利率の種類、一口当たりの平均規模、預金者属性などをもとに分類し、それぞれの過去データ

から預金残高の変化率と金利との関係性を個々にモデル化するが、本稿は金利モデルの応用例として扱っているだけなので、詳細には踏み込まない。

4.2. 預金残高の分布の時間変化

図12と図13は、拡張 Vasicek モデルによる流動性預金残高分布の時間推移と、分布のパーセント点及び average (平均値) の時間推移である。average は各時点における預金残高分布から求めた平均値を繋いだ線である。これらの図より、拡張 Vasicek モデルによる流動性預金残高は average のまわりになだらかに広がる、右裾がやや厚めの分布に従うことがわかる。分布は時間とともに次第に広がり、預金残高は当初は増加傾向で、後に減少傾向に転じるが、この増加から減少へという転換は将来金利の滑らかな上昇に対応する。当初はマイナス金利のため残高は増加傾向を示すが、次第に金利が上昇するにつれて減少傾向へと転じる。図13によると、預金残高の1%点、5%点、10%点、25%点は当初1年間は上昇するが以後は減少に転じ、平均値は2年目まで上昇するが3年目から減少に転じる。超低金利に留まり預金残高が高くなるサンプルパスもあるが、その発生確率は時間とともに低下し、99%点でさえ3年後をピークにして減少に転じる。なお、分布が非対称になるのは残高変化率のモデル(4.1)と(4.2)が金利に関して非対称なためである。

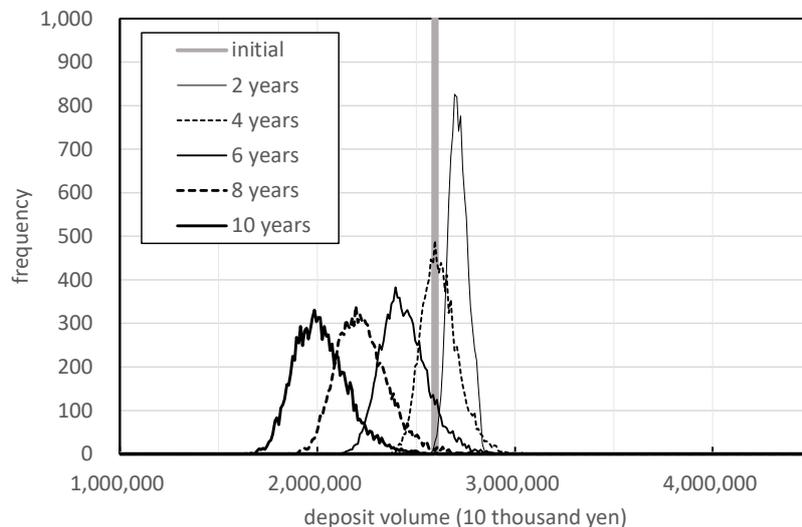


図 12: 将来の流動性預金残高の分布 (拡張 Vasicek モデル)

図14は提案モデルによる将来の流動性預金残高の分布、図15は図14の拡大図(見やすくするため2,6,10年後のみ表示)、図16はパーセント点の時間推移である。これらの図によると、提案モデルによる将来の預金残高は過去のトレンドを維持して全体的には増加傾向で、将来残高の分布は拡張 Vasicek モデルよりも鋭いピークを長期間維持しつつ増加を続ける一方、次第に左裾を長く伸ばし、極端に左裾の長い非対称性の強い分布になっていく。75%以上のパーセント点や average は時間の経過とともに滑らかに増加する一方、25%以下のパーセント点はそれぞれある時期から減少に転じ、1%点は10年間で当初の残高のほぼ半分になる。

2つのモデルの結果を具体的なリスク量で比較する。100 α %-VaR (Volume at Risk の略) VaR_{α} を初期残高と残高分布の 100(1 - α)%点の差で定義すると、10年後に拡張 Vasicek モデルでは平均残高 2.02, $VaR_{0.99} = 0.84$, 提案モデルでは平均残高 3.87, $VaR_{0.99} = 1.27$ (単位はすべて 10^6 万円) となった。提案モデルでは平均値はこれまでのトレンドを維持して増

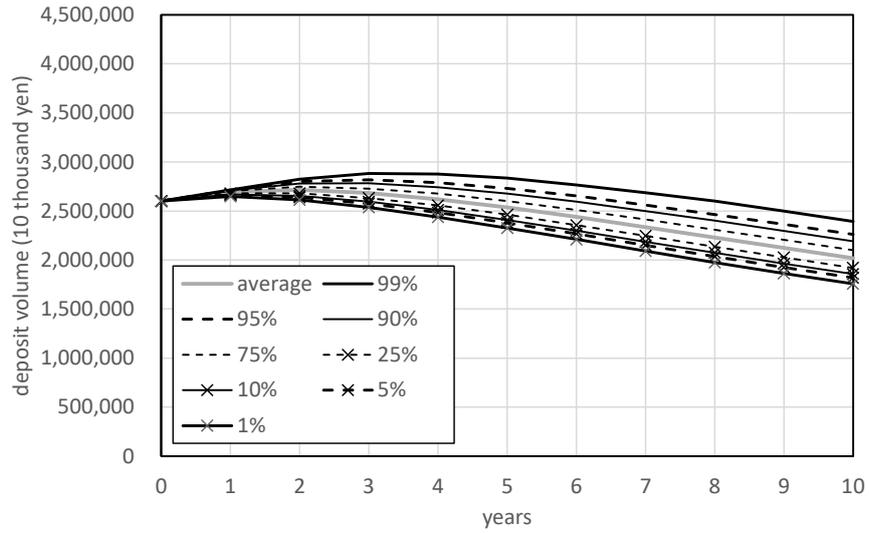


図 13: 将来の流動性預金残高のパーセント点の時間推移 (拡張 Vasicek モデル)

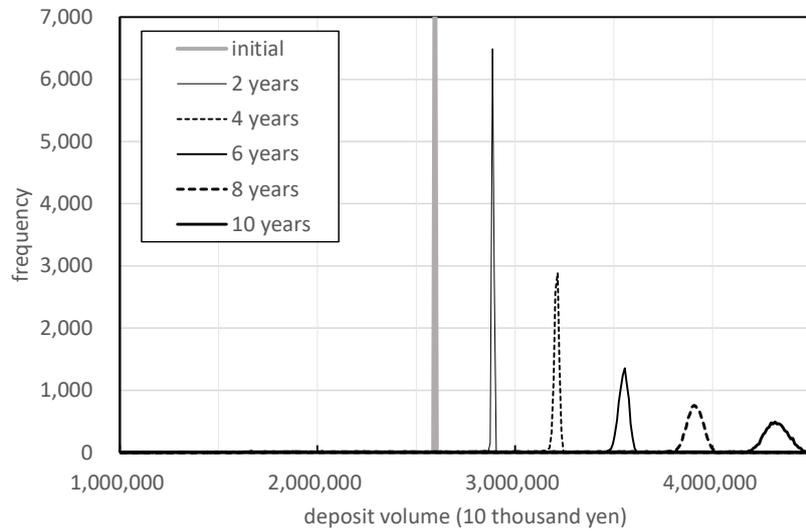


図 14: 将来の流動性預金残高の分布 (提案モデル)

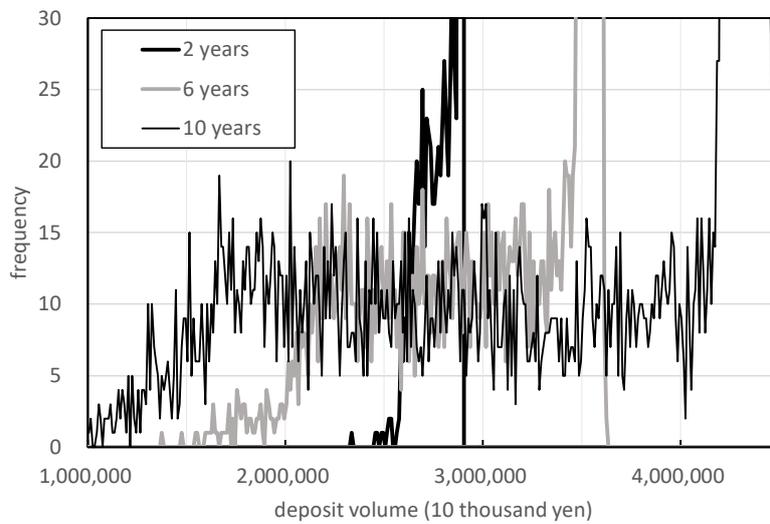


図 15: 将来の流動性預金残高の分布 (提案モデル, 拡大図)

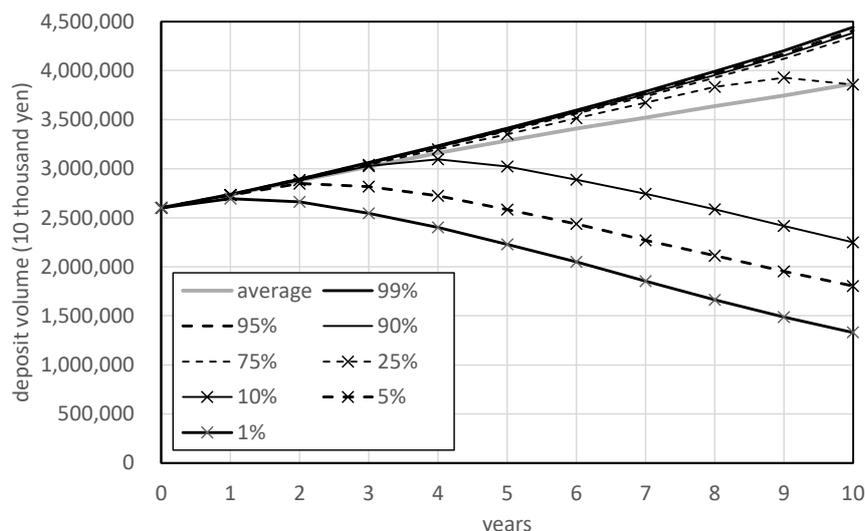


図 16: 将来の流動性預金残高のパーセント点の時間推移 (提案モデル)

加する一方、リスク量は拡張 Vasicek モデルの約 1.5 倍の値になる。残高変化率モデルは同じでも、金利モデルの違いでリスク評価が一変する可能性が示唆される。

拡張 Vasicek モデルにより得られた結果は、将来金利が正規分布に従うモデルを用いた場合の特徴を明確に示している。将来の短期金利は左右対称に広がる正規分布に従うので、今後の金利がマイナス方向に深く突き進まないようにするためにはパラメータ (a, m) に高い値を設定して短期金利を上昇させる必要がある、その結果得られる将来残高は全体として減少せざるを得ない。特筆すべきことは、これまで長期間増加傾向であったにもかかわらず、平均的な預金残高は間もなく（この例では 2 年目をピークに）減少に転じ、10 年後には相当の割合が流出するという結果が得られた点である。この結果は、将来金利はマイナス領域に深く踏み込まないという予想を満たすために生じたものである。

提案モデルでは、時間が経過しても金利は初期値付近に分布のピークが残るため、将来残高にも現在の動向が強く反映されて average は上昇を続ける。一方、将来の金利上昇確率は次第に増加し、かつ上昇時には広い範囲に金利が分布するので、低確率であるが残高減少量も幅広い値をとる。結果として、提案モデルによる将来の預金残高は拡張 Vasicek モデルに比べて幅広い分布となり、平均的には現状のトレンドを維持して増加する一方、10 年間で残高が半減するような極端な事象も発生し、これがリスク評価に強く影響することになる。ただし、ここでもこれらの性質はモデルパラメータの値次第なので、正確な議論のためには更なる調査が必要である。

4.3. コア預金の滞留期間の分布

それぞれのモデルから得られるコア預金流出量のマチュリティ・ラダーを表 5、図 17 と図 18 に示す¹⁰。平均滞留期間は拡張 Vasicek モデルで 8.48 年、提案モデルで 7.76 年であり、この 0.72 年の差が局面遷移の効果である。

流動性預金ではこのマチュリティ・ラダーを用いて金利リスク量を算出するが、本稿では省略する。なお、本節で使用した VaR やマチュリティ・ラダーは資産側の債券ポートフォリオにおけるそれらと同一の概念ではないので注意が必要である。

¹⁰ここでは残高分布の 1% 点をもとに、 t_i 年の 1% 点から t_{i+1} 年の 1% 点を引いた値がプラスのとき、期間 t_i 年のコア預金流出量とした。滞留期間 0 年の 0 は、1 年目の残高分布の 1% 点が当初の残高を上回っていることを意味する。

表 5: コア預金流出量のマチュリティ・ラダー (単位: 10^5 万円)

	滞留期間 (年)										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
拡張 Vasicek モデル	0	0.36	0.76	0.99	1.12	1.16	1.17	1.18	1.10	1.06	17.58
提案モデル	0	0.33	1.17	1.46	1.70	1.80	1.95	1.92	1.76	1.57	13.31

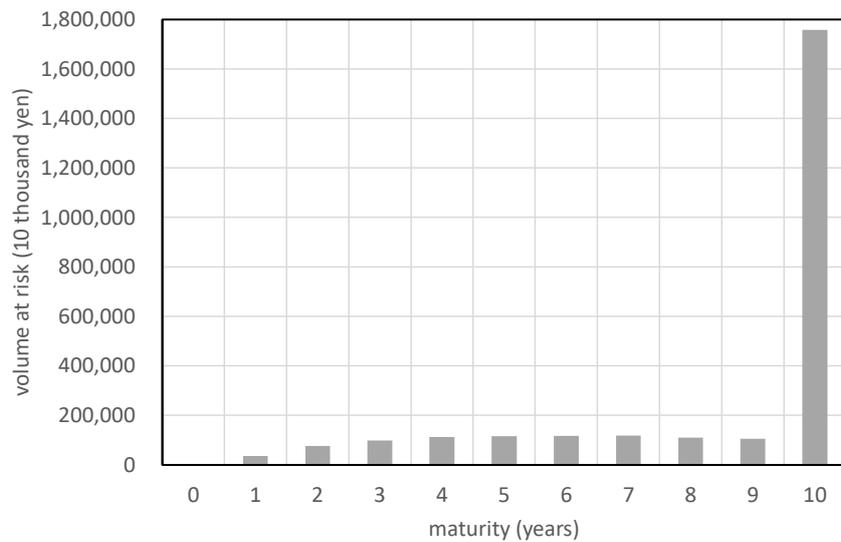


図 17: コア預金の滞留期間の分布 (拡張 Vasicek モデル)

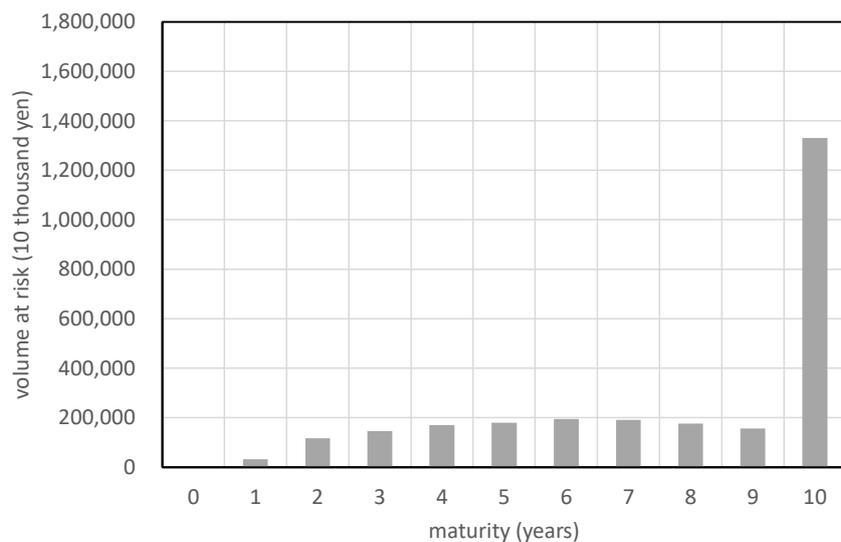


図 18: コア預金の滞留期間の分布 (提案モデル)

5. おわりに

本稿では局面遷移を考慮した確率金利モデルを用いた資産・負債の金利リスク計測について提案し、数値例を示した。もとにするモデルは、金利過程のパラメータ値が局面に依存するものとして、局面遷移過程を有限状態連続時間のマルコフ連鎖で表現した確率金利モデルであり、モンテカルロ・シミュレーションを用いて将来の金利シナリオを発生し、資産・負債の金利リスクを数値的に計測する。提案モデルは過去の金利動向の特徴を踏まえたもので、無裁定理論を用いて将来の金利期間構造を導出すれば任意の満期の金利に依存する資産・負債モデルの構築が可能である。また、モンテカルロ・シミュレーションを用いるので、同時点の金利だけでなくタイムラグを考慮した金利を説明変数とするモデリングも可能であるなど、さまざまな柔軟性を備えている。数値例からは、提案モデルでは将来金利がマイナス方向に深く進まず、金利に下限があるかのように振る舞うことや、現在までの金利動向を維持しつつ、極端な金利上昇シナリオ発生の可能性も織り込めることなどがわかった。流動性預金の金利リスク計測への応用の数値例でも、現在までのトレンドを維持しつつ極端な事象まで幅広く表現できることを示した。

現在の金融規制は、ある特定の確率金利モデルを用いて資産・負債を統一的に評価するという方向性でなく、特に負債ではクラスごとの特性に応じたモデリングとリスク評価が採用されているが、この方針では負債ポートフォリオ全体のリスク量を算出する合理的な手段がないという問題や、巨大損失の発生確率を定量的に議論できないといった問題が生じる。一方、共通の確率金利モデルを使用すれば、リスク量の統合評価は可能で、合算されたリスク量は確率論的に明確な意味を持つ。この点を重視するならば、多様な資産・負債クラスで共通に活用しうる確率金利モデルの検討も今後の重要な研究テーマの一つと考えられ、本稿のモデルはその候補の一つになりうるのではないだろうか。

しかし、本文中にも時々記述したが、未解決の問題も数多く残されている。最も重要な問題は、日本では超低金利環境が長期間継続してきたため、生半可な長さの過去データを用いても高金利局面を検出できないので、算出されるリスク量がそれほど高くないことである¹¹。この問題は提案モデルだけでなく、過去データをもとにパラメータを推定するすべてのモデルに共通の逃れられない問題であり、実務的には、例えばストレス事象として過去の経験をもとに高金利局面のデータを含めて分析するなどの対応が考えられる。他にも課題は残されている。本稿では簡便的なパラメータ推定法を提案したが、より一般的な手法での推定の方が望ましい。また、計算結果はパラメータ値に強く依存するので、正確な議論を展開するためには、よりさまざまな側面から数値例を作成し、モデルの特性を深く検討することが必要である。さらに、本稿では使いやすいシンプルな形でモデルを提案したが、より精緻な議論を行うには Dai et al. (2007) のようなマルチファクター化も検討する必要がある。応用においては、本稿の流動性預金の評価で用いた VaR (Volume at Risk) は資産側で用いられるリスク尺度、例えば VaR (Value at Risk) と必ずしも整合的ではないので、広い資産・負債クラスで共通に使えるリスク尺度による評価の検討も必要であろう。

謝辞

本稿の内容は株式会社エイファス主催の研究会の成果の一部である。株式会社エイファスの高橋政好氏には共同研究の機会を与えていただいたことに、塩田雅之氏と劉榕鏄氏にはモデルの検討およびパラメータ推定にご協力いただいたことに厚く感謝する。また、同じテ

¹¹この点は室町 (2019) に詳述したので参照されたい。

マの室町 (2020) をお読みいただいた一橋大学大学院経済学研究科西出勝正教授と、本稿の匿名の査読者 2 人の、丁寧で好意的なコメントに厚く感謝する。もちろん、あり得べき誤りはすべて筆者の責任に帰する。最後に、日本学術振興会より科学研究費補助金基盤研究 (B) 16H03123 の支援を受けたことに感謝する。

参考文献

- [1] A. Ang and A. Timmermann: Regime changes and financial markets. *Annual Review of Financial Economics*, **4** (2012), 313–337.
- [2] Basel Committee on Banking Supervision: *Minimum capital requirements for market risk* (Bank for International Settlements, 2019).
- [3] Basel Committee on Banking Supervision: *Standards – Interest rate risk in the banking book* – (Bank for International Settlements, 2016).
- [4] Q. Dai, K.J. Singleton and W. Yang: Regime shifts in a dynamic term structure model of U.S. Treasury bond yields. *Review of Financial Studies*, **20** (2007), 1669–1706.
- [5] データフォアビジョン: 弊社の提供するコア預金モデルについて (日本銀行金融高度化センターワークショップ「銀行勘定における金利リスク管理 – 預貸金のデュレーションの把握 –」, 2013).
- [6] R.J. Elliott, L. Chan and T.K. Siu: Option pricing and Esscher transform under regime switching. *Annals of Finance*, **1** (2005), 423–432.
- [7] R.J. Elliott and T.K. Siu: On Markov-modulated exponential-affine bond price formulae. *Applied Mathematical Finance*, **16-1** (2009), 1–15.
- [8] R.J. Elliott, T.K. Siu and H. Yang: Martingale representation for contingent claims with regime switching. *Communications on Stochastic Analysis*, **1-2** (2007), 279–292.
- [9] J. Hull and A. White: Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*, **3** (1990), 573–592.
- [10] T. Inoue and T. Okimoto: Were there structural breaks in the effect of Japanese monetary policy? Re-evaluation the policy effects of the lost decade. *Journal of the Japanese and International Economics*, **22** (2008), 320–342.
- [11] 石島博: レジームスイッチングモデルとファイナンス理論・実証. Working Paper Series WIF-05-005 (早稲田大学ファイナンス総合研究所, 2005).
- [12] 伊藤優, 木島正明: 銀行勘定金利リスク管理のための内部モデル (AA-Kijima Model) について. *証券アナリストジャーナル*, **44** (2007), 79–92.
- [13] T. Janosi, R.A. Jarrow and Y. Yildirim: Estimating default probabilities implicit in equity prices. *Journal of Investment Management*, **1-1** (2003), 1–30.
- [14] R.A. Jarrow and D.R. van Deventer: The arbitrage-free valuation and hedging of demand deposits and credit card loans. *Journal of Banking and Finance*, **22** (1998), 249–272.
- [15] 影井智弘, 小柳誠: 預金者行動を考慮したコア預金モデルの構築 (浜銀総合研究所, 2012).
- [16] 上武治紀, 枇々木規雄: 銀行の流動性預金残高と満期の推定モデル. 日本金融・証券計量・工学学会編: *バリユエーション ジャフイー・ジャーナル – 金融工学と市場計量分*

- 析- (朝倉書店, 2011), 196-223.
- [17] M. Kijima and Y. Muromachi. Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes. *Journal of Risk*, **3-1** (2000), 5-36.
- [18] 小西貞則, 越智義道, 大森裕浩: シリーズ 予測と発見の科学 5 計算統計学の方法 -ブートストラップ・EMアルゴリズム・MCMC- (朝倉書店, 2008).
- [19] 室町幸雄: 金融工学の新潮流 3 信用リスク計測と CDO の価格付け (朝倉書店, 2007).
- [20] 室町幸雄編著: 金融工学の新潮流 2 金融リスクモデリング (朝倉書店, 2014).
- [21] 室町幸雄: 金利のレジーム遷移を考慮したコア預金モデル -コア預金のマチュリティー・ラダーの構築-. 首都大学東京大学院経営学研究科 *Research Paper Series No.6* (首都大学東京, 2019).
- [22] 室町幸雄: 金融リスク計測のための確率金利モデルの提案 -国際的規制の流れとは異なる視点から-. *オペレーションズ・リサーチ*, **65-7** (2020), 359-366.
- [23] 中川裕志: 東京大学工学教程 情報工学 機械学習. 東京大学工学教程編纂委員会編 (丸善出版, 2015).
- [24] 日興リサーチセンター資産運用研究所: コア預金モデル ~地域金融機関の動向~ (日興リサーチセンター, 2017).
- [25] J.M. O'Brien: *Estimating the value and interest rate risk of interest-bearing transactions deposits*, Finance and Economics Discussion Series 2000-53 (Board of Governors of the Federal Reserve System, 2000).
- [26] 全国銀行協会事務局: 基準文書 銀行勘定の金利リスク (全国銀行協会, 2016).

室町幸雄
東京都立大学
大学院経営学研究科
〒100-0005 東京都千代田区丸の内1-4-1
丸の内永楽ビル 18F
E-mail: muromachi-yukio@tmu.ac.jp

EVALUATION OF INTEREST RATE RISK OF A PORTFOLIO BY A STOCHASTIC INTEREST RATE MODEL WITH A RESUME SWITCHING PROPERTY AND ITS APPLICATION TO NON-MATURITY DEPOSITS

Yukio Muromachi

Tokyo Metropolitan University

In this paper, we propose a stochastic interest rate model with a Markovian regime-switching property in order to evaluate the interest-rate risk of various kinds of asset and liability portfolios synthetically. In the model, parameters in the short rate process depend on a latent state, and the state transits between some finite regimes with a Markovian property. The Monte Carlo simulation is used to generate many sample paths of the future short rates and evaluate the interest rate risk numerically. Since the term structures of interest rates in future are derived by using the no-arbitrage pricing method based on sample paths, interest rates with various maturities can be used for modeling assets and liabilities. Numerical examples show that the future interest rates will not proceed to decrease deeply to negative values, rather they will behave as if they had a lower limit, and that they will keep their present trends, while there exist some small probabilities under which the extremely upwarding interest-rate scenarios will happen. Additionally, from applying of this model to evaluating the interest rate risk of the non-maturity deposits, we obtain that the present increasing trend of the volume of the deposits will be kept in future, while that the drastic decrease of the volume will happen with small probabilities.