

## 捕捉者のいる搜索資源配分ゲーム

黒須 敦史 宝崎 隆祐 佐久間 大 鵜飼 孝盛 山田 修司  
海上自衛隊 防衛大学校 新潟大学

(受理 2019 年 4 月 15 日; 再受理 2019 年 9 月 10 日)

**和文概要** 本論文の提案手法の重要な適用問題として、海上密輸行為の航空機による発見とその後の取締船による調査のプロセスを踏む密輸取締がある。従来研究では搜索者と搜索対象である目標との 2 人のプレイヤーしか参加しない搜索ゲームモデルがほとんどであったのに対し、この論文では、搜索者側が目標に対し捕捉者を派遣する新しいモデルを提案している。取り扱う搜索ゲームでは、搜索者は捕捉者を待機させるとともに、搜索時間に代表される搜索資源を搜索空間に投入して目標を発見しようとし、目標は搜索者からの発見・捕捉から逃避するように搜索空間を移動する。論文では、この搜索ゲームの均衡解の一般的な解法と、現実的範囲内で特殊化した状況のゲームに対する簡便化された解法の 2 つを提案し、最適な捕捉者の待機位置と最適搜索資源配分及び目標の最適移動について議論し、具体的な数値例を用いた分析を行っている。

キーワード: 探索, 密輸ゲーム, 搜索ゲーム, 捕捉者, DC 計画

### 1. はじめに

この論文で議論した理論の直接的な適用問題として密輸取締がある。観光立国を目指す日本の積極的な政策により、2018 年現在における訪日外国人数は対前年比で 3 割増加を過去 5 年間続けており、クルーズ船等の寄港隻数は 4 割増加、貨物の輸入申告件数も 3 割増加とインバウンド市場は活況を帯びている。これに比例して、海を経由した密輸品流入のリスクは、2018 年の不正薬物の摘発件数が 886 件（前年比 13% 増加）、押収量が 1,493kg（前年比 8% 増）と増加しており、これまで以上に密輸取締の必要性が高まっている。

密輸にもっとも頭を悩ませている国のひとつがアメリカ合衆国（米国）である。米国では 1960 年代から麻薬密輸が活発となり、大きな社会問題となって今日に至っている。これらの麻薬は主として中南米の国々から様々な輸送ルートを経て極秘裡に米国内に入り込む。1970 年代はカリブ海経由でフロリダに入るケースが多かったが、このルートへの監視が厳しくなると、メキシコまで海路で運び、その後メキシコとの国境を経由して陸路で運ぶルートが主流となっている。海上輸送は一度に運べる輸送量やルートの柔軟性の面で密輸者側には大きなメリットがあり、量的な密輸取締の面からは、海上密輸を効率的に阻止することが重要である。

このような事情もあり、米国では効果的な密輸取締にオペレーションズ・リサーチ（OR）を活用しようとする取り組みは早くから行われている。密輸取締に関する OR 研究の起源は、囚人のジレンマを考案したことで有名な Dresher [9] による査察ゲームの研究にある。査察ゲームは軍縮問題や条約締結国に対する査察の有効性を分析する目的をもっていたが、1980 年から 1990 年代になると、麻薬密輸問題に悩まされていた当時の米国税関（U.S. Customs Service）、密輸取締局（Drug Enforcement Agency）や国防省（Department of Defense）といった組織の麻薬取締に適用され、密輸ゲームのモデルへと発展してゆく [17]。

この系列の初期の研究として, Thomas and Nisgav [36] は密輸者と取締機関との間の攻防を多段ゲームによりモデル化し, プレイヤーの戦略について数値解法的な議論を行った. 密輸ゲームに対し解析的に均衡解を導出したのが, Baston and Bostock [4] である. それまでの研究では, 違反行為及び密輸行為は査察または監視により必ず摘発されるとした「完全摘発」のケースのみが考えられていたが, 彼らは, 取締ボートの隻数により摘発確率が異なるとする拡張モデルに対し, その解析解の導出に成功している. GarnaeV [12] は, 使用ボートの隻数を3隻まで許したモデルにより, 彼らの研究成果を拡張した. 密輸ゲームに関しては, 密輸許容回数や取締ボートの隻数, 取締行為による密輸者の拿捕確率等に関する前提に依存した様々な多段階の確率ゲームによるモデル化と分析が, Sakaguchi [34], Ferguson and Melolidakis [11], Hohzaki et al. [21], Hohzaki [14–16] 及び Hohzaki and Masuda [22] 等によって行われている.

密輸品の輸送ルートを陽に考慮して, ネットワークの問題として密輸ゲームを取り扱った研究として, Mitchell and Bell [29], Caulkins et al. [7] や Washburn and Wood [38] の研究がある. Caulkins et al. は陸, 海, 空経由のルートを想定したシミュレーションによって密輸ゲームを分析し, Washburn and Wood は整数計画法とグラフ理論を用いた2人ゼロ和ゲームを議論した.

以上述べた従来研究では, 密輸船や密輸者に対する具体的な搜索プロセスは考慮されておらず, 密輸行為に対する取締の定量的な効果を既知とした上でのモデル化がなされていた. さて, 何らかの行為や対象物を発見しようとする行為を「搜索」と呼び, 搜索の対象物を「目標」と名付けて, 目標に対する効果的な搜索を議論する理論が搜索理論であるが, この理論では, 搜索プロセスが具体的に考慮された上で搜索の効果が定量的に評価される. したがって, 海上経由の密輸船に対する具体的な搜索プロセスを考慮して密輸取締の効果を客観的に考えようとするならば, 密輸ゲームを搜索問題として取り扱った方がよい. このような観点から, 密輸取締を考えようというのが本論文の主旨である.

搜索理論研究の歴史は長く, 第二次世界大戦における米海軍の対潜水艦戦へのOR応用を著したKoopman [25]以降, 静止した目標の存在確率分布が知られた下での搜索者の最適搜索問題, 確率的な移動法則に従う目標に対する最適搜索問題を経て, 目標も意思決定者とみなす搜索ゲームへと研究は進展した [18]. まずは, 静止目標が潜伏する位置を決め, その潜伏目標を見つけようとする搜索者の搜索ゲームの研究が, Von Neumann [31] や Norris [32] により始められた. このような初期の研究から, 幾何学的空間やネットワーク上での潜伏・搜索のゲームの研究が, Bostock [5] から Kikuta [24] や Alpern [1, 2] へと受け継がれた. 次に, 移動する目標と目標位置を推測して目標存在の調査を行う搜索者とのゲームの研究が Meinardi [28] や Danskin [8] から始まり, Nakai [30] や Lalley [27] を経て, Brown et al. [6] へと続く. 移動目標の逃避と搜索者による搜索の場をネットワークに設定した搜索ゲームとして, Washburn [37], Eagle and Washburn [10] や Anderson and Aramendia [3] の研究がある. 搜索者が, 推定した目標位置を離散的, 逐次的に調査するのではなく, 手持ちの搜索資源を搜索空間へ投入して目標探知を目指す搜索ゲーム (搜索資源配分ゲームと呼ばれる) の一連の研究が Stewart [35] から Hohzaki [13] へと続き, さらにプレイヤーの取得情報の影響を分析するために情報不完備ゲームによる議論が, Hohzaki and Joo [20] や Hohzaki [19] によりなされている.

搜索ゲームにおけるプレイヤーは, これまで搜索者と目標に限定されて議論されてきた. しかし, 上述した米国や日本のように広大な海を経由する密輸が危惧される国にあっては,

密輸行為の監視や捜索には機動力の高い航空機が利用され、疑わしい船舶や違法行為が発見された場合には、現場となる領海や接続水域に取締船が急派され、違法行為者の検査や臨検、場合によっては拿捕といった捕捉行為が執行されるのが一般的である。Kress et al. [26] や Pietz and Royset [33] は、取締船のような捕捉者を伴った捜索者をもつ捜索問題を取り扱っているものの、問題は捜索者の捜索ルートを計画する一方的な最適化問題であり、本論文のように、捕捉者を伴う捜索者と目標との双方向の問題である捜索ゲームを論じた研究はこれまでにない。この論文では、取締船を模した捕捉者を捜索者に帯同させた捜索資源配分ゲームを議論し、効果的な捜索・捕捉、あるいは密輸取締を提案する。

次節では捕捉者をもつ捜索ゲームをモデル化するための前提を記述するが、海上密輸では密輸者側も取締船の存在に敏感であり、捜索用レーダー等で捕捉者位置を知ることのできるモデルをまず議論する。3節では、この捜索ゲームの均衡解を DC (difference of convex functions) 計画問題に定式化して導出する方法を提案する。2節のモデルでは捕捉者による探知目標の捕捉に関して汎用的、一般的な仮定を置いているが、4節ではその仮定を現実的な範囲で特定化したモデルを考える。この特定化により、均衡解の導出に関しては3節より簡便な線形計画問題による定式化が可能となることを示す。以上の結果を利用して、5節では、捕捉者位置を密輸者が知り得ないモデルについて考察する。最後に6節では、海上密輸の盛んな中南米の海域における密輸取締を数値例として取り上げ、捜索者と目標の最適戦略について分析する。

## 2. 捕捉者の待機位置が共有知識である捜索資源配分ゲーム

ここでは、捕捉者を伴った捜索者と目標がプレイする2人ゼロ和を論じるが、捜索者が決定する捕捉者の待機位置は両プレイヤーの共有知識である。

- A1. 捜索の地理空間は離散的なセル空間  $\mathbf{K} = \{1, \dots, K\}$  であり、セル  $i$  と  $j$  の間の距離は  $d(i, j)$  である。捜索時間空間も離散時点の集合  $\mathbf{T} = \{1, \dots, T\}$  で表現される。
- A2. 目標は、この空間上を移動する1つのパスを事前に選択することにより捜索者からの逃避を図る。離散捜索空間において考えられるパス全体を  $\Omega$  で表す。パス  $\omega \in \Omega$  は、時点  $t = 1, \dots, T$  にセル  $\omega(t)$  を通過する。  
パス群  $\Omega$  は次の移動制約を満たすパスの集合である。まず、初期時点  $t = 1$  にセル群  $S_0 \subseteq \mathbf{K}$  のいずれかのセルから出発する。時点  $t$  にセル  $i$  に存在する目標が、次の時点で移動できるセル群は  $N(i, t)$  に限定される。セル  $i$  からセル  $j$  への移動にはエネルギー  $\mu(i, j)$  が消費される。目標の所有する初期エネルギーは  $e_0$  であり、移動によりこのエネルギーを消耗し尽くした場合には、それ以降現在のセルに留まることしかできない。
- A3. 捜索者は、まず捕捉者を位置  $z \in \mathbf{K}$  に待機させる。その後、捜索空間上へ捜索資源を投入することにより目標を探知しようと図るが、捜索は時点  $\tau_0$  以降にしか開始できない。この捜索可能な時間帯を  $\hat{\mathbf{T}} \equiv \{\tau_0, \dots, T\} \subseteq \mathbf{T}$  で表す。また、捜索空間へ投入する非負の資源量は、各時点  $t$  で使用可能上限  $\Phi(t)$  をもつ。  
もし時点  $t$  で目標を探知した場合、時点  $t$ 、目標探知位置  $j$  及び捕捉者の待機位置  $z$  に依存した確率  $C_t(z, j)$  (「条件付き捕捉確率」と呼ぶ) で目標を捕捉できる。
- A4. 目標探知は、各時間での目標存在セルに正確に捜索資源投入をした場合にのみ発生し、時点  $t$  でセル  $i$  に存在する目標に対する捜索資源量  $x$  の投入により、探知確率

$$1 - \exp(-\alpha_i x) \quad (2.1)$$

で生じる。パラメータ  $\alpha_i$  は、目標探知に関するセル  $i$  の単位搜索資源量当たりの探知効率を示している。

- A5. 搜索者と目標は搜索活動の実施前にその戦略を決定する。搜索者は、捕捉者の待機位置と各時点、各セルへの搜索資源配分量を決め、目標は1本の移動パスを選択する。ただし、捕捉者の位置  $z$  は目標側にも知られる共有情報であるとする。その他の戦略は、互いに知られない。

搜索者は目標を捕捉できた場合に利得1を得、目標は同量を失うものとするため、ゲームは目標の捕捉確率を支払とする2人ゼロ和ゲームである。搜索者はこの支払いを大きくするように、目標は小さくするように行動する。

まず、搜索者の純粋戦略を定義する。捕捉者の位置を  $z \in \mathbf{K}$  で、搜索資源配分計画を  $\varphi = \{\varphi(i, t), i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}}\}$  で表す。  $\varphi(i, t)$  は、時点  $t$ 、セル  $i$  への搜索資源投入量である。前提 A3 から、搜索者の戦略  $\varphi$  の実行可能領域  $\Psi$  は次式で与えられる。

$$\Psi = \left\{ \varphi \mid \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) \leq \Phi(t), \varphi(i, t) \geq 0, i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}} \right\} \quad (2.2)$$

一方、目標の純粋戦略は1本のパス  $\omega \in \Omega$  を選択することである。前提 A2 から、このパスは次の制約条件を満たす。

$$\omega(1) \in S_0 \quad (2.3)$$

$$\omega(t+1) \in N(\omega(t), t), t = 1, \dots, T-1 \quad (2.4)$$

$$\sum_{t=1}^{T-1} \mu(\omega(t), \omega(t+1)) \leq e_0 \quad (2.5)$$

因みに、時点  $t$  当初での残存エネルギーは  $e(t) = e_0 - \sum_{\tau=1}^{t-1} \mu(\omega(\tau), \omega(\tau+1))$  となる。これらの条件を満たすパス集合が実行可能パス群  $\Omega$  である。

目標がパス  $\omega$  を選択した場合、各時点  $\tau \in \hat{\mathbf{T}}$  で目標存在セル  $\omega(\tau)$  に投入される搜索資源量は  $\varphi(\omega(\tau), \tau)$  であるから探知確率は  $1 - \exp(-\alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau))$  である。したがって、時間区間  $[\tau_0, t] \subseteq \hat{\mathbf{T}}$  で少なくとも一度目標が探知される目標探知確率は、

$$P_t(\varphi; \omega) = 1 - \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^t \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau)\right) \quad (2.6)$$

で与えられる。  $P_{\tau_0-1}(\varphi, \omega) = 0$  の約束の下、時点  $t \in \hat{\mathbf{T}}$  では、確率  $P_t(\varphi, \omega) - P_{t-1}(\varphi, \omega)$  で目標は探知され、この探知目標は確率  $C_t(z, \omega(t))$  で捕捉される。したがって、全搜索時間  $\hat{\mathbf{T}}$  での捕捉確率  $R(z, \varphi; \omega)$  は次式で与えられる。

$$R(z, \varphi; \omega) = \sum_{t=\tau_0}^T (P_t(\varphi, \omega) - P_{t-1}(\varphi, \omega)) C_t(z, \omega(t)) \quad (2.7)$$

(2.7) 式はさらに次のように変形できる。

$$\begin{aligned} R(z, \varphi; \omega) &= \sum_{t=\tau_0}^T P_t(\varphi, \omega) C_t(z, \omega(t)) - \sum_{t=\tau_0}^{T-1} P_t(\varphi, \omega) C_{t+1}(z, \omega(t+1)) \\ &= \sum_{t=\tau_0}^{T-1} P_t(\varphi, \omega) (C_t(z, \omega(t)) - C_{t+1}(z, \omega(t+1))) + P_T(\varphi, \omega) C_T(z, \omega(T)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

したがって、記号

$$\delta_t(z, \omega) \equiv \begin{cases} C_t(z, \omega(t)) - C_{t+1}(z, \omega(t+1)), & t = \tau_0, \dots, T-1 \\ C_T(z, \omega(T)), & t = T \end{cases} \quad (2.9)$$

の使用により、最終的に次式を得る。

$$R(z, \varphi; \omega) = \sum_{t=\tau_0}^T P_t(\varphi, \omega) \delta_t(z, \omega) \quad (2.10)$$

あるいは、定義式 (2.9) の代わりに、 $C_{T+1}(z, i) = 0$  ( $i \in \mathbf{K}$ ) の約束の下、

$$\delta_t(z, \omega) \equiv C_t(z, \omega(t)) - C_{t+1}(z, \omega(t+1)), \quad t \in \widehat{T}$$

で定義してもよい。

ここで目標は混合戦略  $\pi = \{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$  をとると考える。  $\pi(\omega)$  はパス  $\omega \in \Omega$  を選択する確率である。  $\pi$  の実行可能領域  $\Pi$  は次式で与えられる。

$$\Pi = \left\{ \pi \left| \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1, \pi(\omega) \geq 0, \omega \in \Omega \right. \right\} \quad (2.11)$$

目標がこの混合戦略をとった場合の期待支払は、次式で計算できる。

$$R(z, \varphi; \pi) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) R(z, \varphi; \omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{t=\tau_0}^T P_t(\varphi, \omega) \delta_t(z, \omega) \quad (2.12)$$

(2.6) 式より関数  $P_t(\varphi, \omega)$  は変数  $\varphi$  の凹関数であり、(2.9) 式より  $\delta_t(z, \omega)$  は区間  $[-1, 1]$  の実数値をとるから、 $R(z, \varphi; \omega)$  及び  $R(z, \varphi; \pi)$  は変数  $\varphi$  の DC 関数 (difference of convex functions) である。

ここで、期待支払の式 (2.12) から、明らかに資源投入を行わないケースを特定化できる。  
**定理 2.1.** 最適な搜索資源配分では、次の場合、資源は投入すべきではない。

- (i)  $\alpha_i = 0$  なるセル  $i$  に対しては、すべての時点  $t \in \widehat{T}$  において  $\varphi(i, t) = 0$  である。
- (ii) 任意の時点  $t$  において、どのパス  $\omega \in \Omega$  も通過しないセル  $i \notin \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega(t)\}$  に対しては  $\varphi(i, t) = 0$  である。
- (iii) 各  $z$  に対し  $C_\tau(z, i) = 0$  ならば、 $\varphi(i, \tau) = 0$  である。

**証明**

- (i) 式 (2.12) の期待支払  $R(z, \varphi; \pi)$  には、変数  $\varphi(i, t), t \in \widehat{T}$  は現れないからである。
- (ii) この場合も、 $R(z, \varphi; \pi)$  に変数  $\varphi(i, t)$  は含まれないからである。
- (iii) 上の (i), (ii) のケースでは自明であるから、それ以外のケースを考え、セル  $i$  では  $\alpha_i > 0$  であり、あるパスがここを通過するものとする。変数  $\varphi(i, \tau)$  は、 $R(z, \varphi; \pi)$  の中で、あるパス  $\omega \in \Omega_{i\tau} \equiv \{\omega | \omega(\tau) = i\}$  に対する支払関数 (2.7) の中の  $(P_\tau(\varphi, \omega) - P_{\tau-1}(\varphi, \omega))C_\tau(z, i)$  と  $(P_t(\varphi, \omega) - P_{t-1}(\varphi, \omega))C_t(z, \omega(t))$  ( $t \geq \tau + 1$ ) の項に現れる。仮定から、前者の項はゼロである。後者は、関数

$$\begin{aligned} Q_t(\varphi, \omega) &\equiv \exp \left( - \sum_{\xi=\tau_0}^t \alpha_{\omega(\xi)} \varphi(\omega(\xi), \xi) \right) \\ &= \exp \left( - \alpha_i \varphi(i, \tau) - \sum_{\xi=\tau_0 | \xi \neq \tau}^t \alpha_{\omega(\xi)} \varphi(\omega(\xi), \xi) \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

を使えば,

$$(Q_{t-1}(\varphi, \omega) - Q_t(\varphi, \omega)) C_t(z, \omega(t))$$

と書けるが, 関数 (2.13) が  $\varphi(i, \tau)$  に関し単調減少で狭義凸であることから,

$$(Q_{t-1}(\varphi, \omega) - Q_t(\varphi, \omega))|_{\varphi(i, \tau) > 0} < (Q_{t-1}(\varphi, \omega) - Q_t(\varphi, \omega))|_{\varphi(i, \tau) = 0}$$

が成り立つ. したがって, 不等式  $R(z, \varphi; \pi)|_{\varphi(i, \tau) > 0} \leq R(z, \varphi; \pi)|_{\varphi(i, \tau) = 0}$  が成り立つ.

また, 搜索資源配分の実行可能領域  $\Psi$  からは,  $\varphi(i, \tau)$  以外の変数  $\varphi(j, t)$ ,  $(j, t) \neq (i, \tau)$ ,  $(j, t) \in \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{T}}$  の実行可能領域は,  $\varphi(i, \tau) = 0$  とした場合は  $\varphi(i, \tau) > 0$  とした場合を含む. 以上から, (iii) は証明された. □

### 3. 均衡解の導出

本節では, ゲームの均衡解としての搜索者の最適資源配分計画及び目標の最適パス選択, さらに捕捉者の最適待機位置を求める.

#### 3.1. 搜索者の最適資源配分

捕捉者の位置  $z \in \mathbf{K}$  は共有情報として両プレイヤーが既知であるとして, 搜索者の最適戦略を期待支払  $R(z, \varphi; \pi)$  のマックスミニ最適化問題を解くことにより求めよう. 次の変形が可能である.

$$\max_{\varphi} \min_{\pi} R(z, \varphi; \pi) = \max_{\varphi} \min_{\omega \in \Omega} R(z, \varphi; \omega) = \max_{\eta, \varphi} \{ \eta \mid R(z, \varphi; \omega) \geq \eta, \omega \in \Omega \} \quad (3.1)$$

したがって, 式 (2.6), (2.10) から, 捕捉者の位置  $z$  が与えられた場合に搜索者の最適資源投入戦略  $\varphi^*$  を求めるためのマックスミニ最適化問題は, 次の DC 計画問題に定式化できる.

$$P_S(z) \quad \eta^*(z) = \max_{\eta, \varphi} \eta$$

$$s.t. \quad \sum_{t \in \hat{\mathbf{T}}} \delta_t(z, \omega) \left\{ 1 - \exp \left( - \sum_{\tau = \tau_0}^t \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) \right) \right\} \geq \eta, \omega \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) \leq \Phi(t), t \in \hat{\mathbf{T}}, \quad (3.3)$$

$$\varphi(i, t) \geq 0, i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}}.$$

参考文献 [23] や [39] には, DC 計画問題の解法アルゴリズムが提案されている.

#### 3.2. 目標の最適パス選択

ここでは問題  $P_S(z)$  を解くことで求めた最適資源配分  $\varphi^*$  を用いることで, 目標の最適戦略  $\pi^*$  を導出する方法を議論する.  $\hat{\mathbf{T}} = \{\tau_0, \dots, T\}$  に注意すると,  $\varphi^*$  に対する最適反応である  $\pi$  は次の問題を解けば得られる.

$$\min_{\pi \in \Pi} R(z, \varphi^*; \pi) = \min_{\pi \in \Pi} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{t = \tau_0}^T \delta_t(z, \omega) \left\{ 1 - \exp \left( - \sum_{\tau = \tau_0}^t \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) \right\} \quad (3.4)$$

$\pi$  に対し最適反応である  $\varphi$  を求めるためには  $\max_{\varphi \in \Psi} R(z, \varphi; \pi)$  を解けばよいから, この最適解の必要条件である KKT 条件を求めてみよう.

式(2.2)に明示した $\varphi$ の2つの実行可能性条件に対するラグランジュ乗数として $\lambda$ と $\zeta$ を導入し、ラグランジュ関数 $L(z, \varphi, \pi; \lambda, \zeta)$ を次式で定義する。

$$L(z, \varphi, \pi; \lambda, \zeta) \equiv R(z, \varphi; \pi) + \sum_{t=\tau_0}^T \lambda(t) \left( \Phi(t) - \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) \right) + \sum_{t=\tau_0}^T \sum_{i \in \mathbf{K}} \zeta(i, t) \varphi(i, t)$$

(2.6)式を考慮してKKT条件を求めると、次の方程式系を得る。

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi(i, t)} = \alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \sum_{\xi=t}^T \delta_{\xi}(z, \omega) \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^{\xi} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) \right) - \lambda(t) + \zeta(i, t) = 0, \quad (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.5)$$

$$\zeta(i, t) \geq 0, \quad (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}} \quad (3.6)$$

$$\zeta(i, t) \varphi(i, t) = 0, \quad (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.7)$$

$$\lambda(t) \geq 0, \quad t \in \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.8)$$

$$\lambda(t) \left( \Phi(t) - \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) \right) = 0, \quad t \in \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) \leq \Phi(t), \quad t \in \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.10)$$

$$\varphi(i, t) \geq 0, \quad (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}}. \quad (3.11)$$

ただし、 $\Omega_{it}$ は時点 $t$ にセル $i$ を通過するパスの集合であり、以前定義したように $\Omega_{it} \equiv \{\omega \in \Omega | \omega(t) = i\}$ で与えられる。

もし $\varphi(i, t) > 0$ ならば、(3.7)式より $\zeta(i, t) = 0$ である。また $\varphi(i, t) = 0$ ならば、(3.6)式の $\zeta(i, t)$ の非負性と(3.5)式から、次のようにまとめることができる。

(i)  $\varphi(i, t) > 0$ ならば、

$$\alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \sum_{\xi=t}^T \delta_{\xi}(z, \omega) \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^{\xi} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) \right) = \lambda(t) \quad (3.12)$$

(ii)  $\varphi(i, t) = 0$ ならば、

$$\alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \sum_{\xi=t}^T \delta_{\xi}(z, \omega) \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^{\xi} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) \right) \leq \lambda(t) \quad (3.13)$$

逆に上の条件(3.12), (3.13)から(3.5), (3.6)及び(3.7)を満たす $\zeta(i, t)$ を作ること容易であるから、条件(3.12)及び(3.13)は条件(3.5)–(3.7)と同値である。すでに求めている $\varphi^*$ は(3.10), (3.11)式を満たすから、条件(3.12), (3.13)及び条件(3.8), (3.9)を $\varphi^*$ が $\pi$ の最適反応となるための $\pi$ の条件と見なす。この条件と最適化問題(3.4)を組み合わせることで、目

標の最適なパス選択  $\pi^*$  を導出する次の線形計画問題が得られる。

$$P_T(z) \quad \min_{\pi, \lambda} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \sum_{t=\tau_0}^T \delta_t(z, \omega) \left\{ 1 - \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^t \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) \right\} \quad (3.14)$$

$$s.t. \quad \varphi^*(i, t) > 0 \text{ なる } (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}} \text{ に対し,}$$

$$\alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \sum_{\xi=t}^T \delta_\xi(z, \omega) \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^{\xi} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) = \lambda(t), \quad (3.15)$$

$$\varphi^*(i, t) = 0 \text{ なる } (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}} \text{ に対し,}$$

$$\alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \sum_{\xi=t}^T \delta_\xi(z, \omega) \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^{\xi} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) \leq \lambda(t), \quad (3.16)$$

$$\lambda(t) \geq 0, \quad t \in \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.17)$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi^*(i, t) < \Phi(t) \text{ なる } t \in \widehat{\mathbf{T}} \text{ に対し, } \lambda(t) = 0, \quad (3.18)$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1, \quad (3.19)$$

$$\pi(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega. \quad (3.20)$$

問題  $P_T(z)$  が必ず最適解をもつことは次のように証明できる。

**定理 3.1.** 問題  $P_T(z)$  は必ず最適解をもつ。問題  $P_S(z)$  の最適解  $\varphi^*$  が搜索者の最適戦略であり、問題  $P_T(z)$  の最適解  $\pi^*$  が目標の最適戦略である。問題  $P_S(z)$  と  $P_T(z)$  の最適値は一致し、それがゲームの値を与える。

**証明** 問題  $P_S(z)$  の実行可能領域は閉で有界であるから、明らかに最適解をもつ。この問題の最適解の KKT 条件を求めてみることにより、問題  $P_T(z)$  の実行可能領域が空でないことをまず証明する。その際、問題  $P_T(z)$  と対応づけるため、あえてラグランジュ乗数  $\pi(\omega)$ 、 $\lambda(t)$  及び  $\zeta(i, t)$  を用いた下記のラグランジュ関数を用いるが、現段階では  $P_T(z)$  の変数  $\pi(\omega)$ 、 $\lambda(t)$  とは何の関係もない。

$$L(\eta, \varphi; \pi, \lambda, \zeta)$$

$$= \eta + \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) (R(z, \varphi; \omega) - \eta) + \sum_{t \in \widehat{\mathbf{T}}} \lambda(t) \left( \Phi(t) - \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) \right) + \sum_{i \in \mathbf{K}} \sum_{t \in \widehat{\mathbf{T}}} \zeta(i, t) \varphi(i, t)$$

KKT 条件は、以下のように書き下すことができる。

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = 1 - \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 0, \quad (3.21)$$

$$\pi(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega, \quad (3.22)$$

$$\pi(\omega) (R(z, \varphi; \omega) - \eta) = 0, \quad \omega \in \Omega, \quad (3.23)$$

$$R(z, \varphi; \omega) \geq \eta, \quad \omega \in \Omega, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi(i, t)} &= \alpha_i \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \sum_{\xi=t}^T \delta_\xi(z, \omega) \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^{\xi} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) \right) \\ &\quad - \lambda(t) + \zeta(i, t) = 0, \quad (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$



$$\zeta(i, t) \geq 0, (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.26)$$

$$\zeta(i, t)\varphi(i, t) = 0, (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.27)$$

$$\lambda(t) \geq 0, t \in \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.28)$$

$$\lambda(t) \left( \Phi(t) - \sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) \right) = 0, t \in \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.29)$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) \leq \Phi(t), t \in \widehat{\mathbf{T}}, \quad (3.30)$$

$$\varphi(i, t) \geq 0, (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}}. \quad (3.31)$$

条件式 (3.21) と (3.22) は、条件 (3.19) と (3.20) と一致する。同様に、条件式 (3.25)~(3.31) は、条件 (3.5)~(3.11) と一致し、それから条件式 (3.15)~(3.18) が導かれる。問題  $P_S(z)$  の最適解の存在は上記の KKT 条件 (3.21)~(3.31) を満たす最適解  $\eta, \varphi$  とともに、最適なラグランジュ乗数  $\pi, \lambda, \zeta$  の存在を示すから、問題  $P_T(z)$  の実行可能領域も空ではなく、最適解  $\pi^*$  を有する。

また、問題  $P_T(z)$  は、問題  $P_S(z)$  の最適解である  $\varphi^*$  と  $P_T(z)$  の最適解である  $\pi^*$  が互いに最適反応となるように作成した定式化であるため、 $\varphi^*$  と  $\pi^*$  はそれぞれ探索者と目標の最適戦略である。さらに、条件式 (3.23) と (3.24) は、 $R(z, \varphi; \omega) > \eta$  ならば  $\pi(\omega) = 0$  を意味するから、問題  $P_T(z)$  の目的関数 (3.14) を最小にする変数  $\{\pi(\omega)\}$  の必要十分条件であり、このとき最適値  $\eta^*$  と問題  $P_S(z)$  の最適値  $\eta^*(z)$  は一致する。以上の考察から、問題  $P_S(z)$  を解けば、最適解  $\varphi^*$  と条件式 (3.2) に対応する最適なラグランジュ乗数  $\pi^*$  が両プレイヤーの最適戦略を与える。□

### 3.3. 捕捉者の最適待機位置

以上が、捕捉者の待機位置  $z \in \mathbf{K}$  を目標が知る場合の同時手番ゲームの解法である。この同時手番ゲームは  $z$  が公開情報として両プレイヤーに知られた後の部分ゲームに相当する。探索者はこの部分ゲームの値  $\eta^*(z)$  をできるだけ大きくしたいため、次の問題を解くことで最適な待機位置  $z^*$  を決めることができる。

$$z^* = \arg \max_{z \in \mathbf{K}} \eta^*(z) \quad (3.32)$$

以上の2段階ゲームを解いて決定した  $z^*, \varphi^*, \pi^*$  は、部分ゲーム完全均衡点ということになる。

## 4. 特殊ケースによる問題の簡素化

ここでは、前提 A3 で与えた汎用的な条件付き捕捉確率  $C_t(z, j)$  を、現実性を失わない程度に特定化した特殊ケースを考えよう。前提 A3 を次の前提で置き換える。

B3. 探索者は、まず捕捉者を位置  $z \in \mathbf{K}$  に待機させる。その後、探索空間上へ探索資源を配分することにより目標を探知しようと図るが、探索は時点  $\tau_0$  以降にしか開始できない。この探索可能な時間帯を  $\widehat{\mathbf{T}} \equiv \{\tau_0, \dots, T\} \subseteq \mathbf{T}$  で表す。また、非負の努力量には各時点  $t$  毎に使用可能上限  $\Phi(t)$  がある。

目標を探知した場合、探索者は目標を停止させるとともにこの探知事象を捕捉者に伝え、目標の捕捉に向かわせる。ただし、時間  $T$  までに捕捉できなければ目標は逃避する。捕捉者の単位時間あたりの移動距離、すなわち速度は  $v_I$  とする。

このように探知目標を停止させる強制力は、領海や接続水域等での非合法活動の調査において実際に執行される。このモデルでは、条件付き捕獲確率  $C_t(z, j)$  は、次式の指示関数  $I_t(z, j)$  により与えられる。

$$I_t(z, j) \equiv \begin{cases} 1, & d(z, j) \leq v_I(T-t) \text{ ならば} \\ 0, & \text{そうでなければ} \end{cases} \quad (4.1)$$

この特殊ケースでは、DC 関数であった支払関数  $R(z, \varphi; \omega)$  はもっと簡単な関数で表される。したがって、均衡解の導出も容易となり、4.2 項では目標の戦略としてパス選択を用いた解法を、4.3 項では各時点での確率的な移動を目標戦略とした場合の解法を説明する。

#### 4.1. 目的関数の簡略化

条件付き捕獲確率の定義式 (4.1) から、(2.7) 式の各項目  $(P_t(\varphi, \omega) - P_{t-1}(\varphi, \omega))I_t(z, \omega(t))$  は、次の式と同値であることが分かる。

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^{t-1} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau)\right) \{1 - \exp(-\alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t))\} I_t(z, \omega(t)) \\ &= \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^{t-1} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau)\right) \{1 - \exp(-I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t))\} \end{aligned}$$

なぜなら、この式は、 $I_t(z, \omega(t)) = 0$  であればゼロとなり、 $I_t(z, \omega(t)) = 1$  であれば  $P_t(\varphi, \omega) - P_{t-1}(\varphi, \omega)$  となるからである。かくして  $R(z, \varphi; \omega)$  は次式に整理できる。

$$\begin{aligned} R(z, \varphi; \omega) &= 1 - \left\{ \exp(-I_{\tau_0}(z, \omega(\tau_0)) \alpha_{\omega(\tau_0)} \varphi(\omega(\tau_0), \tau_0)) - \exp(-\alpha_{\omega(\tau_0)} \varphi(\omega(\tau_0), \tau_0)) \right\} - \dots \\ &\quad - \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^{t-1} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau)\right) \left\{ \exp(-I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t)) - \exp(-\alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t)) \right\} \\ &\quad - \dots - \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^{T-2} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau)\right) \\ &\quad \times \left\{ \exp(-I_{T-1}(z, \omega(T-1)) \alpha_{\omega(T-1)} \varphi(\omega(T-1), T-1)) - \exp(-\alpha_{\omega(T-1)} \varphi(\omega(T-1), T-1)) \right\} \\ &\quad - \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^{T-1} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) - I_T(z, \omega(T)) \alpha_{\omega(T)} \varphi(\omega(T), T)\right) \\ &= 1 - \sum_{t=\tau_0}^{T-1} \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^{t-1} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau)\right) \\ &\quad \times \left\{ \exp(-I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t)) - \exp(-\alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t)) \right\} \\ &\quad - \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^{T-1} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) - I_T(z, \omega(T)) \alpha_{\omega(T)} \varphi(\omega(T), T)\right) \end{aligned}$$

定理 2.1(iii) から、時点  $t$  で  $I_t(z, \omega(t)) = 0$  となる捕獲不可能なセル  $\omega(t)$  に対しては最適な資源配分では  $\varphi(\omega(t), t) = 0$  とすべきであるから、 $\varphi(\omega(t), t) > 0$  である場合は  $I_t(z, \omega(t)) = 1$  のときであり、最終式の第 2 項はゼロとなる。したがって、 $\varphi$  について最適化すべき支払関数は次式に変形できる。

$$R(z, \varphi; \omega) = 1 - \exp\left(-\sum_{\tau=\tau_0}^{T-1} \alpha_{\omega(\tau)} \varphi(\omega(\tau), \tau) - I_T(z, \omega(T)) \alpha_{\omega(T)} \varphi(\omega(T), T)\right)$$

$I_t(z, \omega(t)) = 0$  ならば  $\varphi(\omega(t), t) = 0$  という条件を再度使えば、上式を次の支払関数に変形できる。

$$R(z, \varphi; \omega) = 1 - \exp \left( - \sum_{t=\tau_0}^T I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \quad (4.2)$$

同時に、期待支払についても明示しておこう。

$$R(z, \varphi; \pi) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \left\{ 1 - \exp \left( - \sum_{t=\tau_0}^T I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \right\} \quad (4.3)$$

以下では、捕捉者の待機位置  $z \in \mathbf{K}$  を目標が知って以降の部分ゲームの均衡解となる探索者の最適資源配分  $\varphi^*$  と目標の最適パス選択  $\pi^*$  を求めていく。その後の最適な捕捉者の待機位置  $z^*$  は、3節と同じく、次によりゲームの値を最大化するセルを選べばよい。

$$z^* = \arg \max_{z \in \mathbf{K}} R(z, \varphi^*; \pi^*) \quad (4.4)$$

## 4.2. 目標のパス選択による均衡解の導出

### 探索者の最適資源配分

3節の目標パスを用いた解法に準拠して、探索者の最適探索資源配分を求めることができる。式(3.1)による変形は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} \max_{\varphi} \min_{\pi} R(z, \varphi; \pi) &= \max_{\varphi} \min_{\omega \in \Omega} R(z, \varphi; \omega) \\ &= \max_{\varphi} \min_{\omega \in \Omega} \left\{ 1 - \exp \left( - \sum_{t=\tau_0}^T I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \right\} \\ &= 1 - \exp \left( - \max_{\varphi} \min_{\omega \in \Omega} \sum_{t=\tau_0}^T I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \end{aligned}$$

指数関数の肩に載った最適化問題は次の線形計画問題  $P_S^2(z)$  に定式化できる。問題を解くことで得られる最適値  $\mu^*(z)$  から計算した  $1 - \exp(-\mu^*(z))$  がゲームの値を与える均衡探知確率であり、 $\exp(-\mu^*(z))$  が非探知確率である。ただし、支払関数(4.2)の下では探索資源は許される全量を使うべきであることは明らかであるから、不等式制約(3.3)を等式制約(4.6)に代えている。

$$P_S^2(z) \quad \mu^*(z) = \max_{\mu, \varphi} \mu \quad (4.5)$$

$$s.t. \quad \sum_{t=\tau_0}^T I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \geq \mu, \quad \omega \in \Omega,$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) = \Phi(t), \quad t \in \widehat{\mathbf{T}}, \quad (4.6)$$

$$\varphi(i, t) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, t \in \widehat{\mathbf{T}}.$$

### 目標の最適パス選択

簡素化された(4.2)式を支払関数  $R(z, \varphi; \omega)$  として用い、3節と同様な手法で最適な目標のパス選択確率  $\pi^*$  を求めることができる。KKT条件を等式制約(4.6)の下での最適化問題

$\max_{\varphi \in \Psi} R(z, \varphi; \pi)$  から導出して用いれば、 $\pi^*$  を求める次のような線形計画問題による定式化を得る。ただし、その中で使用されている  $\varphi^*$  は問題  $P_S^2(z)$  の最適解である。

$$P_T^2(z) \quad \min_{\pi, \lambda} \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \left\{ 1 - \exp \left( - \sum_{t=\tau_0}^T I_t(z, \omega(t)) \alpha_{\omega(t)} \varphi^*(\omega(t), t) \right) \right\}$$

$$s.t. \quad \varphi^*(i, t) > 0 \text{ なる } (i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}} \text{ に対し,}$$

$$\alpha_i I_t(z, \omega(t)) \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^T I_\tau(z, \omega(\tau)) \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) = \lambda(t), \quad (4.7)$$

$\varphi^*(i, t) = 0$  なる  $(i, t) \in \mathbf{K} \times \widehat{\mathbf{T}}$  に対し,

$$\alpha_i I_t(z, \omega(t)) \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi(\omega) \exp \left( - \sum_{\tau=\tau_0}^T I_\tau(z, \omega(\tau)) \alpha_{\omega(\tau)} \varphi^*(\omega(\tau), \tau) \right) \leq \lambda(t), \quad (4.8)$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1, \quad (4.9)$$

$$\pi(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega. \quad (4.10)$$

### 4.3. 目標のマルコフ移動表現による均衡解の導出

4.2節における均衡解の導出では、2節の前提 A2 で設定した移動制約を考慮してパス群  $\Omega$  を網羅している。したがって、移動制約が厳しくなければ、時点数  $T$  のべき乗でパスの総数が増加し、均衡解導出に支障が出るのが懸念される。その対策として、ここでは、目標の移動制約を目標の移動戦略の制約として取り込む方法を議論する。

ここでの目標移動はパス選択でなく、次のようなマルコフ移動である。目標の状態は、時間  $t$ 、存在セル  $i$ 、残存エネルギー  $e$  の3組  $(i, t, e)$  で表現できる。また、探知されていないか、探知されていても将来捕捉者に捕捉される可能性のない状態をフリーの状態と呼ぶ。フリーでない状態は、探知されていて将来捕捉される（その場合は現在地に停止させられると仮定していた）状態である。マルコフ移動戦略は、状態  $(i, t, e)$  に依存して次の時点での移動セルを確率的に取らせるものである。したがって、同じ  $(i, t, e)$  の状態であれば将来の確率的移動は同じとし、移動パスのようにそこに到達した過去の状態には依存しない。このマルコフ移動戦略でも均衡解をもつことは、その導出過程で示してゆく。ところで、同じ時点  $t$  であっても、搜索前の時点と搜索後フリーで目標が移動しようとする直前の時点とを区別する必要があり、前者を  $t$  初期、後者を  $t$  終期と呼ぶ。また、エネルギー状態全体を  $\mathbf{E} \equiv \{0, 1, \dots, e_0\}$  とする。マルコフ移動を用いた解法は、エネルギーの状態数が少なければ有用であるものの、目標パス数と同じ程度の状態数となる場合にはその有用性は失われる。

搜索ゲームの解法に目標のマルコフ移動を利用することは Hohzaki and Joo [20] でもなされており、そのアイデアをここでも用いる。ただし、そこでの搜索ゲームが目標探知により終了するのに対し、本モデルでは目標探知と目標捕捉という2つのイベントを考慮する必要があり、細かな定式化において差違がある。

目標のマルコフ移動戦略を表す  $v(i, j, t, e)$  は、状態  $(i, t, e)$  にある目標が次の時点  $t+1$  でセル  $j$  に移動する確率とする。また、状態  $(i, t, e)$  から次時点  $t+1$  で移動可能なセル群を表す記号  $N(i, t, e) \equiv \{j \in \mathbf{K} | j \in N(i, t), \mu(i, j) \leq e\}$  と、状態  $(i, t, e)$  へ移動可能な前時点  $t-1$  での存在セル群を表す  $N^*(i, t, e) \equiv \{j \in \mathbf{K} | i \in N(j, t-1), e + \mu(j, i) \leq e_0\}$  を定義し

ておく。このとき、目標のマルコフ移動戦略の実行可能性条件は次式で表される。

$$V \equiv \left\{ \left. \{v(i, j, t, e), i, j \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T} \setminus \{T\}, e \in \mathbf{E}\} \right| \sum_{j \in N(i, t, e)} v(i, j, t, e) = 1, \right. \\ \left. v(i, j, t, e) = 0 (j \notin N(i, t, e)), v(i, j, t, e) \geq 0 \right\}$$

因みに、目標のパス選択確率  $\{\pi(\omega), \omega \in \Omega\}$  による表現とマルコフ移動戦略  $\{v(i, j, t, e)\}$  による表現が同値であることは後述する。目標の移動戦略としてマルコフ移動を採用する一方で、探索者の戦略はこれまでどおり  $\varphi = \{\varphi(i, t), i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}}\}$  とする。

ここでは動的計画法を用いるため、次の最適化された値を定義する。 $z(i, t, e)$  を、時点  $t$  初期にフリーの状態  $(i, t, e)$  で存在する目標が、以後最適な移動戦略をとることにより実現できる最大の非捕捉確率とする。探索が実施される  $t \in \hat{\mathbf{T}}$  では、状態  $(i, t, e)$  にいる目標がそこでの探索で捕捉可能な探知がなされず、次時点  $t+1$  でセル  $j$  に移動した後もフリーとなる状態遷移に関する考察から、 $z(i, t, e)$  に関する次のような漸化式が得られる。

$$z(i, t, e) = \max_{v(i, \cdot, t, e)} \{1 - (1 - e^{-\alpha_i \varphi(i, t)}) I_t(z, i)\} \sum_{j \in N(i, t, e)} v(i, j, t, e) z(j, t+1, e - \mu(i, j))$$

ただし、最終時点  $T$  では  $z(i, T, e) = 1 - (1 - \exp(-\alpha_i \varphi(i, T))) I_T(z, i)$  で与えられることは明らかである。実行可能領域  $V$  を考えると、この漸化式は任意の  $j \in N(i, t, e)$  に対し次のような不等式を導く。

$$\begin{aligned} z(i, t, e) &= \{1 - (1 - e^{-\alpha_i \varphi(i, t)}) I_t(z, i)\} \max_{j \in N(i, t, e)} z(j, t+1, e - \mu(i, j)) \\ &\geq \{1 - (1 - e^{-\alpha_i \varphi(i, t)}) I_t(z, i)\} z(j, t+1, e - \mu(i, j)) \end{aligned}$$

パラメータ  $I_t(z, i)$  を  $\{0, 1\}$  のいずれかにおいて上式を書き下せば、次の不等式を得る。

$$z(i, t, e) \geq \begin{cases} z(j, t+1, e - \mu(i, j)), & I_t(z, i) = 0 \text{ のとき,} \\ e^{-\alpha_i \varphi(i, t)} z(j, t+1, e - \mu(i, j)), & I_t(z, i) = 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.11)$$

ここで、そこでの探知目標が捕捉可能であるかどうかでセルを区別し、 $K_t(z) \equiv \{i \in \mathbf{K} | I_t(z, i) = 1\}$  を定義する。 $i \notin K_t(z)$  であるセルでは目標を探知しても捕捉可能ではない。さて、上と同様に、探索が行われない時点  $t \in \mathbf{T} \setminus \hat{\mathbf{T}}$  では、次の漸化式と任意の  $j \in N(i, t, e)$  に対する不等式が得られる。

$$\begin{aligned} z(i, t, e) &= \max_{v(i, \cdot, t, e)} \sum_{j \in N(i, t, e)} v(i, j, t, e) z(j, t+1, e - \mu(i, j)) \\ &= \max_{j \in N(i, t, e)} z(j, t+1, e - \mu(i, j)) \geq z(j, t+1, e - \mu(i, j)) \end{aligned} \quad (4.12)$$

目標の最適な移動戦略による最大の非捕捉確率は初期状態  $\{(k, 1, e_0), k \in S_0\}$  の値  $z(k, 1, e_0)$  の中で最大の値であるから、探索者は全体における最大非捕捉確率  $\max_{k \in S_0} z(k, 1, e_0)$  を最小にすべきであり、これが非捕捉確率に関するミニマックス値を与える。この取扱い方は、目標のパス型戦略を用いた探索者の最適戦略導出のやり方と同じである。(3.1) 式による最

適化では、目標が純粋戦略としての最適なパスを選択することによって最小化された捕捉確率を最大にする資源配分を求めている。(4.12)式による変形も同じであり、マルコフ移動とはいえ、資源配分戦略を知った上で行う目標の選択は、次に進む1つのセル、すなわちそれらを結ぶ1本のパスの選択で十分であることを意味している。さて、これまでの議論から、非捕捉確率に関するミニマックス最適化問題は次式に定式化できる。

$$\begin{aligned}
 P_S^{M0} : \quad & \min_{\varphi, z, \xi} \xi \\
 \text{s.t.} \quad & z(k, 1, e_0) \leq \xi, \quad k \in S_0, \\
 & z(i, t, e) \geq z(j, t+1, e - \mu(i, j)), \quad j \in N(i, t, e), i \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T} \setminus \widehat{\mathbf{T}}, e \in \mathbf{E}, \\
 & z(i, t, e) \geq z(j, t+1, e - \mu(i, j)), \quad j \in N(i, t, e), i \notin K_t(z), t \in \widehat{\mathbf{T}} \setminus \{T\}, e \in \mathbf{E}, \\
 & z(i, t, e) \geq e^{-\alpha_i \varphi(i, t)} z(j, t+1, e - \mu(i, j)), \\
 & \quad j \in N(i, t, e), i \in K_t(z), t \in \widehat{\mathbf{T}} \setminus \{T\}, e \in \mathbf{E}, \\
 & z(i, T, e) = 1, \quad i \notin K_T(z), e \in \mathbf{E}, \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

$$z(i, T, e) = e^{-\alpha_i \varphi(i, T)}, \quad i \in K_T(z), e \in \mathbf{E}, \tag{4.14}$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) = \Phi(t), \quad t \in \widehat{\mathbf{T}},$$

$$\varphi(i, t) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, t \in \widehat{\mathbf{T}}.$$

ここで、 $w(i, t, e) \equiv -\log z(i, t, e)$  により  $z(i, t, e)$  を置換する。 $z(i, t, e)$  はその意味から  $0 < z(i, t, e) \leq 1$  であるから、 $w(i, t, e)$  は非負の値をとる。変数  $w$  への置換に合わせ、目的関数の  $\xi$  も  $\eta \equiv -\log \xi$  により置換すれば、 $\min \xi$  は  $\max \eta$  に置き換わる。これらの置換と若干の整理により、 $P_S^{M0}$  は次の定式化に変換できる。

$$\begin{aligned}
 P_S^M : \quad & \max_{\varphi, w, \eta} \eta \\
 \text{s.t.} \quad & w(k, 1, e_0) \geq \eta, \quad k \in S_0, \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & w(i, t, e) \leq w(j, t+1, e - \mu(i, j)), \\
 & \quad j \in N(i, t, e), i \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T} \setminus \widehat{\mathbf{T}}, e \in \mathbf{E}, \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & w(i, t, e) \leq w(j, t+1, e - \mu(i, j)) + I_t(z, i) \alpha_i \varphi(i, t), \\
 & \quad j \in N(i, t, e), i \in \mathbf{K}, t \in \widehat{\mathbf{T}} \setminus \{T\}, e \in \mathbf{E}, \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

$$w(i, T, e) = I_T(z, i) \alpha_i \varphi(i, T), \quad i \in \mathbf{K}, e \in \mathbf{E}, \tag{4.18}$$

$$w(i, t, e) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T}, e \in \mathbf{E},$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) = \Phi(t), \quad t \in \widehat{\mathbf{T}},$$

$$\varphi(i, t) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, t \in \widehat{\mathbf{T}}.$$

ただし、最適な  $\xi^*$  と  $\eta^*$  は、 $\xi^* = \exp(-\eta^*) = \max_{k \in S_0} z^*(k, 1, e_0)$  の関係にある。

漸化式(4.11)及び(4.12)で決定されるセル  $i$  からの最適な移動セル  $j^*$  に対応するのは、問題  $P_S^M$  では、それぞれ不等式(4.17)及び(4.16)で等号を満たす  $j^* \in N(i, t, e)$  である。この関係により、最終時点  $T$  における(4.18)式による  $w(i, T, e)$  を初期値として、(4.15)式から決まる  $\min_{k \in S_0} w(k, 1, e_0)$  の値を最大化するように最適解が導出される。

前提 A2 では初期時点での出発セル群が指定されていたが、最終時点で目的セル群  $G_0 \subseteq \mathbf{K}$  があり、目標は最終的にそこに到達しなければならない場合の修正点について言及しよう。目標パス  $\omega$  は最終時点で  $\omega(T) \in G_0$  でなければならない。この場合、問題  $P_S^M$  における  $w(i, T, e)$  をセル  $i \in G_0$  に限定すればよいから、条件 (4.18) を次のように代えればよい。

$$w(i, T, e) = I_T(z, i)\alpha_i\varphi(i, T), \quad i \in G_0, \quad e \in \mathbf{E} \quad (4.19)$$

これは、問題  $P_S^{M0}$  にあつては制約式 (4.13), (4.14) を、それぞれ

$$z(i, T, e) = 1 \quad (i \notin K_T(z), \quad i \in G_0, \quad e \in \mathbf{E}), \quad z(i, T, e) = e^{-\alpha_i\varphi(i, T)} \quad (i \in K_T(z) \cap G_0, \quad e \in \mathbf{E})$$

とすることに相当する。

次に目標の最適なマルコフ移動戦略  $\{v(i, j, t, e)\}$  を求めるが、問題  $P_S^M$  の最適解  $\varphi^*$  と  $w^*$  を用いる。  $w^*$  に対応する問題  $P_S^{M0}$  の変数の値は  $z^*(i, t, e) = \exp(-w^*(i, t, e))$  により計算できる。  $z^*(i, t, e)$  の定義から、  $\hat{z}^*(i, t, e) \equiv z^*(i, t, e) \exp(\alpha_i\varphi^*(i, t))$  は目標が  $t$  終期でフリーである状態  $(i, t, e)$  にいるという条件付きのそれ以降の最適移動による非捕捉確率の最大値を表す。目標のマルコフ移動戦略として  $v$  とは別の変数  $\hat{v} \equiv \{\hat{v}(i, j, t, e), \quad i, j \in \mathbf{K}, \quad t \in \mathbf{T} \setminus \{T\}, \quad e \in \mathbf{E}\}$  を、目標が  $t$  終期でフリーな状態  $(i, t, e)$  に到達し、かつ次時点  $t+1$  でセル  $j$  に移動する確率として定義する。この目標戦略は、目標の存在確率に関する次の変数も決めることになる。  $q(i, t, e)$  を目標が初期状態からフリーのまま  $t$  初期に状態  $(i, t, e)$  へ到達する確率、  $q'(i, t, e)$  は目標が初期状態から状態  $(i, t, e)$  へ到達し、かつその状態から  $t$  終期までフリーである確率とする。目標の状態遷移を考えると、次の方程式が成り立つ。

$$\sum_{k \in S_0} q(k, 1, e_0) = 1, \quad (4.20)$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, 1, e) = 1, \quad (4.21)$$

$$q(i, 1, e) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, \quad e \in \mathbf{E}, \quad (4.22)$$

$$q'(i, t, e) = q(i, t, e), \quad i \in \mathbf{K}, \quad t \in \mathbf{T} \setminus \hat{\mathbf{T}}, \quad e \in \mathbf{E}, \quad (4.23)$$

$$q'(i, t, e) = q(i, t, e) \{1 - (1 - e^{-\alpha_i\varphi(i, t)})I_t(z, i)\}, \quad i \in \mathbf{K}, \quad t \in \hat{\mathbf{T}}, \quad e \in \mathbf{E}, \quad (4.24)$$

$$q(i, t, e) = \sum_{j \in N^*(i, t, e)} \hat{v}(j, i, t-1, e + \mu(j, i)), \quad i \in \mathbf{K}, \quad t \in \mathbf{T} \setminus \{1\}, \quad e \in \mathbf{E}, \quad (4.25)$$

$$q'(i, t, e) = \sum_{j \in N(i, t, e)} \hat{v}(i, j, t, e), \quad i \in \mathbf{K}, \quad t \in \mathbf{T} \setminus \{T\}, \quad e \in \mathbf{E}. \quad (4.26)$$

式 (4.20) と (4.21) は、目標が初期状態  $\{(k, 1, e_0), k \in S_0\}$  のいずれから出発するかを混合戦略で決めることを意味する。式 (4.23) と (4.24) は、時点  $t$  の初期と終期での搜索の不実施・実施による非捕捉確率の変化を示している。式 (4.25) と (4.26) は、いわば非捕捉確率をフローとみた場合の保存則を意味している。時点  $t=1$  での  $q(i, 1, e)$  がフローの発生源であるから、条件 (4.22) によりその非負性を保障する必要がある。

ここで、時点  $t \in \hat{\mathbf{T}}$  での搜索資源配分  $\{\varphi(i, t), i \in \mathbf{K}\}$  に焦点を当てると、全時点での期待非捕捉確率は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} G_t(\varphi) &\equiv \sum_{i \in \mathbf{K}} \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, t, e) \{1 - (1 - e^{-\alpha_i\varphi(i, t)})I_t(z, i)\} \hat{z}^*(i, t, e) \\ &= \sum_{i \notin K_t(z)} \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, t, e) \hat{z}^*(i, t, e) + \sum_{i \in K_t(z)} \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, t, e) e^{-\alpha_i\varphi(i, t)} \hat{z}^*(i, t, e) \end{aligned}$$

これを  $\sum_{i \in \mathbf{K}} \varphi(i, t) = \Phi(t)$ ,  $\varphi(i, t) \geq 0$  ( $i \in \mathbf{K}$ ) の下で最小にするものが時点  $t$  での最適な  $\{\varphi^*(i, t), i \in \mathbf{K}\}$  となっているはずである. 因みに, 時点  $t$  での資源配分  $\{\varphi(i, t), i \in \mathbf{K}\}$  は  $q(i, t, e)$  にも  $\hat{z}^*(i, t, e)$  にも影響を与えない. そこで, 最終式の第 2 項を目的関数とした最小化問題を考え, 最適解の KKT 条件を整理したものが次の 2 式である. ただし,  $\lambda(t)$  はラグランジュ乗数である.

$$\varphi(i, t) > 0 \text{ ならば, } \alpha_i \exp(-\alpha_i \varphi(i, t)) \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, t, e) \hat{z}^*(i, t, e) = \lambda(t) \quad (4.27)$$

$$\varphi(i, t) = 0 \text{ ならば, } \alpha_i \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, t, e) \hat{z}^*(i, t, e) \leq \lambda(t) \quad (4.28)$$

さて, 全時点を通じた非捕捉確率は  $G_t(\varphi)$  でも表せるが,  $\sum_i \sum_e q'(i, T, e)$  でも同じである. したがって, この最大化は  $\varphi^*$  に対する最適な目標のマルコフ移動戦略  $\hat{v}^*$  を与えることになり, また (4.27), (4.28) 式がすべての  $i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}}$  に対して成立していれば  $\varphi$  が  $\hat{v}$  に対して最適である. 以上から, 既知の搜索者の最適戦略  $\varphi^*$  と  $\hat{z}^*$  を用いて目標の最適移動戦略  $\hat{v}^*$  を求める問題として, 次の線形計画問題を得る.

$$P_T^M : \quad \max_{\hat{v}, q, q', \lambda} \sum_{i \in \mathbf{K}} \sum_{e \in \mathbf{E}} q'(i, T, e) \quad (4.29)$$

$$s.t. \quad \sum_{k \in S_0} q(k, 1, e_0) = 1,$$

$$\sum_{i \in \mathbf{K}} \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, 1, e) = 1,$$

$$q(i, 1, e) \geq 0, \quad i \in \mathbf{K}, e \in \mathbf{E},$$

$$q'(i, t, e) = q(i, t, e), \quad i \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T} \setminus \hat{\mathbf{T}}, e \in \mathbf{E},$$

$$q'(i, t, e) = q(i, t, e) \{1 - (1 - e^{-\alpha_i \varphi^*(i, t)}) I_t(z, i)\}, \quad i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}}, e \in \mathbf{E},$$

$$q(i, t, e) = \sum_{j \in N^*(i, t, e)} \hat{v}(j, i, t-1, e + \mu(j, i)), \quad i \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T} \setminus \{1\}, e \in \mathbf{E},$$

$$q'(i, t, e) = \sum_{j \in N(i, t, e)} \hat{v}(i, j, t, e), \quad i \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T} \setminus \{T\}, e \in \mathbf{E},$$

$$\varphi^*(i, t) > 0 \text{ なる } i \in K_t(z), t \in \hat{\mathbf{T}} \text{ に対し,}$$

$$\alpha_i \exp(-\alpha_i \varphi^*(i, t)) \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, t, e) \hat{z}^*(i, t, e) = \lambda(t), \quad (4.30)$$

$$\varphi^*(i, t) = 0 \text{ なる } i \in K_t(z), t \in \hat{\mathbf{T}} \text{ に対し,}$$

$$\alpha_i \sum_{e \in \mathbf{E}} q(i, t, e) \hat{z}^*(i, t, e) \leq \lambda(t), \quad (4.31)$$

$$\hat{v}(i, j, t, e) \geq 0, \quad i, j \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T} \setminus \{T\}, e \in \mathbf{E},$$

$$\hat{v}(i, j, t, e) = 0, \quad j \notin N(i, t, e), \quad i \in \mathbf{K}, t \in \mathbf{T} \setminus \{T\}, e \in \mathbf{E}.$$

この問題の最適解  $\hat{v}^*(i, j, t, e)$  を用いれば, 目標の最適なマルコフ移動戦略  $v^*(i, j, t, e)$  は

$$v^*(i, j, t, e) = \frac{\hat{v}^*(i, j, t, e)}{\sum_{j \in N(i, t, e)} \hat{v}^*(i, j, t, e)} \quad (4.32)$$

によって求められるが,  $\hat{v}$  は目標のフリーでの到達確率を含んでいるから, 状態  $(i, t, e)$  によっては分母がゼロとなる場合がある. そのことは最適移動によっては目標はその状態には



至らないことを意味するから、マルコフ移動戦略  $v(i, j, t, e)$  を求める必要はない、あるいはどんな移動戦略でも構わないことになる。

式(4.19)の導出と同様に、この定式化において、目標の到達セルとして目的セル群  $G_0$  を考慮したければ、最終時点  $T$  における  $G_0$  での非捕捉確率のみが目標の興味の対象となるから、目的関数(4.29)を次式に置き直せばよい。

$$\sum_{i \in G_0} \sum_{e \in E} q'(i, T, e) \quad (4.33)$$

## 5. 捕捉者の待機位置が目標に既知でない搜索配分ゲーム

2節、3節においては捕捉者位置  $z$  が両プレイヤーの共有知識であるとしていたが、ここでは  $\varphi$  と同様に、 $z$  も目標には知られない搜索者の戦略と見なしたゲームの均衡解について考察する。

3節においては、捕捉者の位置  $z$  が与えられた場合の期待支払  $R(z, \varphi; \pi)$  に対し

$$\max_{\varphi} \min_{\pi} R(z, \varphi; \pi) = \min_{\pi} \max_{\varphi} R(z, \varphi; \pi)$$

が成立し、このゲームの値を最大にする捕捉者位置  $z^*$  を求めた。したがって、そこでの搜索者の最適戦略  $z^*, \varphi^*$  を

$$R(z^*, \varphi^*; \pi^*) = \max_{z \in \mathbf{K}} \max_{\varphi} \min_{\pi} R(z, \varphi; \pi) = \max_{z \in \mathbf{K}} \min_{\pi} \max_{\varphi} R(z, \varphi; \pi)$$

により導出したことになる。もし、この値が  $\min_{\pi} \max_z \max_{\varphi} R(z, \varphi; \pi)$  と一致すれば、搜索者戦略  $(z, \varphi)$  と目標戦略  $\pi$  の最適戦略が3節のゲームの均衡解と一致することになる。ゲームに関する一般理論から、

$$\min_{\pi} \max_{(z, \varphi)} R(z, \varphi; \pi) \geq \max_{(z, \varphi)} \min_{\pi} R(z, \varphi; \pi) = R(z^*, \varphi^*; \pi^*)$$

が成立するが、 $\pi = \pi^*$  とすれば等号が成立するのであるから、目標はこの戦略をとるべきである。結局、捕捉者の位置が目標に知られない状況でも知られる状況でもプレイヤーの最適戦略は変わらず、3節で提案した解法により導出できる。

## 6. 数値例

ここでは、図1で示した中南米沖の太平洋海域を舞台にして、南米から米国へ向け出航した密輸船に対する多国籍チームの監視活動を取り上げる。海域は16個のセルに分割された搜索空間  $\mathbf{K}$  であり、時間空間  $\mathbf{T} = \{1, \dots, 8\}$  において、密輸船は時点  $t = 1$  にセル1または2から出発し、時点  $t = 8$  にはメキシコ沿岸のセル13,14,15または16に到着して非合法品を荷揚げする。目標の取り得る移動ルート  $\Omega$  は次のように作る。初期エネルギーを  $e_0 = 7$  とし、各時点で、エネルギー1を消費して現在セルから図1の左下に記載した3方向のいずれかへ1セル進むか、エネルギーを消費せず現在セルに留まることができる。この移動ルールにより、セル1からは417本、セル2からは486本の計903本の海上ルートを目指は選択できる。

搜索者は捕捉者をどこかのセル  $z$  に待機させた後、時点  $\tau_0 = 2$  以降の各時点  $t \in \hat{\mathbf{T}} \equiv \{2, \dots, 7\}$  で、手持ち搜索資源量  $\Phi(t) = 1$  のセルへの投入計画を立てる。時点  $t = 8$  では目

標は目的セルに到着するため搜索はできず、 $\Phi(8) = 0$ である。各セルでの搜索資源の探知効率は、密輸船の出発セルである  $j = 1, 2$  や目的セル  $j = 13, \dots, 16$  では搜索不可能として  $\alpha_j = 0$  と設定し、その他のセル  $i = 3, \dots, 12$  では同じ値  $\alpha_i = 0.5$  を用いる。

密輸船の探知セル  $i$ 、探知時点  $t$  及び捕獲者待機位置  $z$  に依存する条件付き捕獲確率  $C_t(z, i)$  として、次の性質を有する式を用いる。まず、残り時点数の間に捕獲者が探知位置まで到達できることを最低条件として、(i) 残り時点数  $T - t$  に対し単調増加、(ii)  $v_I$  を捕獲者の速度とし、残り時点での捕獲者の移動可能距離  $v_I(T - t)$  と捕獲者から目標までの距離  $d(z, i)$  との差に対し単調増加である。また、目標が探知され逃避する際、安全な海域への出口と見なせる逃避出口セル  $OS \in \mathbf{K}$  への逃避の可能性を考慮し、(iii) 探知位置から逃避出口セルまでの距離  $d(OS, i)$  に対し単調増加、(iv) 捕獲者位置から逃避出口セルまでの距離  $d(OS, z)$  に対し単調減少である。以上の性質 (i)–(iv) を満たす条件付き捕獲確率として、 $v_I(T - t) < d(z, i)$  のとき  $C_t(z, i) = 0$ 、 $v_I(T - t) \geq d(z, i)$  のとき

$$C_t(z, i) = 1 - \exp\left(-\frac{a(T - t)(v_I(T - t) - d(z, i))(d(OS, i) + c)}{(d(OS, z) + c)^b}\right) \quad (6.1)$$

とする。ただし、 $a, b$  は形状パラメータで、 $c$  はゼロで割る等の演算違反を防止するためのものである。

この数値例では、隣接セル間の距離を 1 とした  $v_I = 1.5$  及び  $a = 0.5, b = 1, c = 1$ 、また逃避出口セルを  $OS = 1$  とする。

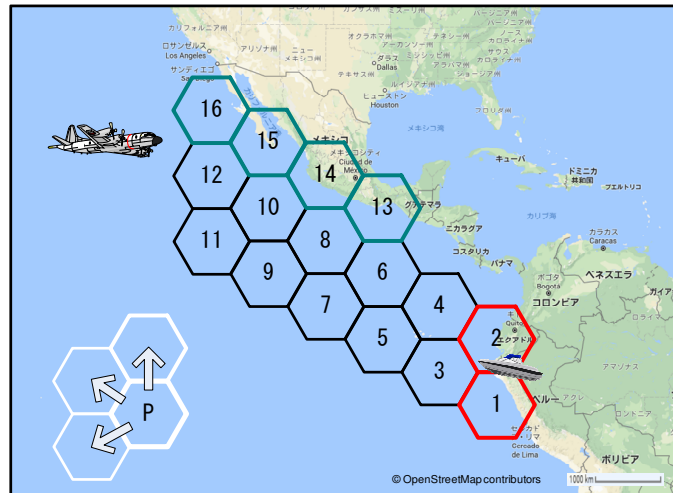


図 1: 密輸監視海域

### 6.1. 捕獲者の最適な待機位置

捕獲者の待機位置  $z$  をすべてのセル  $z \in \mathbf{K}$  にとって、ゲームの値である目標捕獲確率を比較したのが表 1 である。セル  $z = 9, \dots, 12, 14, \dots, 16$  に待機する捕獲者は、十分遅くまでセル 2 に滞在してセル 13 に逃げ込もうとする目標は拿捕できない。捕獲確率が最大となる待機セルは  $z^* = 6$  であるが、これは次の理由による。遅い時点では目標は目的セルであるセル 13, ..., 16 の近傍での存在分布が高くなるが、後述するように、出発セル 1, 2 に近いセル 13 へは目標が逃避しようとする確率が特に高くなるため、その近くで探知された目標を捕獲するには待機セル  $z^* = 6$  が好都合である。このセルから離れた場所での捕獲者の待機で

表 1: 捕捉者の位置によるゲームの値 (捕捉確率) の変化

$z$	1	2	3	4	5	6	7	8
捕捉確率	0.240	0.238	0.240	0.258	0.258	0.273	0.232	0.205
$z$	9	10	11	12	13	14	15	16
捕捉確率	0	0	0	0	0.205	0	0	0

は、目標を探知しても現場に急行するまでの移動時間が掛かる等により、条件付き捕捉確率は小さくなる。因みに、単に探知確率を最大化するだけで捕捉する必要の無い  $C_t(z, t) = 1$  の場合の最大探知確率は 0.313 となり、ゲームの値 0.273 から、目標探知後の捕捉の確率が全体的には 0.872 程度であるということになる。

以下では、目標と搜索者の最適戦略について分析するが、捕捉者は最適な待機セル  $z^* = 6$  に配置されているとする。

## 6.2. 目標の最適移動と存在分布

表 2 は、目標の最適なパス選択確率  $\{\pi^*(\omega), \omega \in \Omega\}$  から、各時点  $t \in \mathbf{T}$ 、各セル  $i \in \mathbf{K}$  における目標存在確率  $p(i, t) \equiv \sum_{\omega \in \Omega_{it}} \pi^*(\omega)$  を計算したものである。値は小数点第 4 位で四捨五入しているから見た目には総和の確率は 1 とはならないが、厳密な値による総和は常に 1 となる。この表から、目標移動の特徴を次のように分析できる。

- (1) 目標は、探知されない出発セル  $i = 1, 2$  や逃避出口セル  $OS = 1$  に近いセルには遅い時点まで滞在し続けようとするため、これらのセルは比較的大きな存在確率をもつ。しかし、それ以外のセルでは存在確率の一樣分布が見られる。つまり、搜索資源の効果的な使用を妨げるため、目標は、移動可能な存在領域の拡大と可能な範囲で存在確率の一樣分布を形成しようとする。もちろん、限られた時間内に目的セルに到達するため、どうしても存在確率の偏りは生じ、例えば時点  $t = 7$  では、次時点で目的セルに入るためにセル 6, 8, 10 及び 12 に偏在する。存在領域拡大と存在確率一樣化の傾向は次の点でも見られる。目標は時点  $t = 4$  には目的セル 13 に到達できるものの、直前の時点  $t = 3$  でセル  $i = 6$  に存在する目標 (存在確率  $p(6, 3) = 0.104$ ) は、その一部 ( $p(13, 4) = 0.022$ ) のみがセル 13 に入り、残りの多くは探知可能なセル 8 に進む。
- (2) 時点  $t = 4, \dots, 8$  における目的セル  $j = 13, \dots, 16$  の存在確率  $p(j, t)$  から、出発セル 1, 2 により近いセル 13, 14, 15, 16 の順に目標の到達確率は大きい。これは、早く目的セルに到達することで、搜索者による探知機会を少なくするためである。

## 6.3. 搜索資源の最適配分

表 3 には、搜索者の最適な資源配分  $\{\varphi^*(i, t), i \in \mathbf{K}, t \in \hat{\mathbf{T}}\}$  が記載されている。そこには、目標の最適移動戦略に対処した次のような特徴が見られる。

- (1) 早い時点  $t = 2, 3$  では目標の存在領域は未だ大きくは広がっていないため、探知不可能なセル  $i = 1, 2$  以外の目標存在セルのすべてに搜索資源が投入される。
- (2) 時点  $t = 3, 4, 5$  では、目標が様々な目標移動パスを選択したとしても必ず通過せざるを得ないセル 3 ~ 6 に阻止帯を設定して搜索資源を集中させる番兵的な搜索が行われ、出発セルから遠い目的セル 14, 15, 16 近くでの搜索はほとんど実施されない。これは、上述したように、目標が遅い時点まで出発セル近くに滞在し続ける傾向にあるため、目的セル 13 近くでの探知・捕捉に主眼が置かれるからである。
- (3) 遅い時点  $t = 6, 7$  では、遅く出発セルから出た目標はこの時間帯にセル 6 から目的セル

表 2: 目標の最適存在確率分布;  $p(i, t)$

$i \setminus t$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.616	0.337	0.161	0.054	0	0	0	0
2	0.384	0.456	0.424	0.321	0.137	0	0	0
3	0	0.104	0.104	0.106	0.131	0	0	0
4	0	0.104	0.104	0.104	0.107	0.137	0	0
5	0	0	0.104	0.104	0.107	0.136	0	0
6	0	0	0.104	0.104	0.104	0.102	0.273	0
7	0	0	0	0.104	0.104	0.111	0	0
8	0	0	0	0.082	0.104	0.103	0.194	0
9	0	0	0	0	0.087	0.101	0	0
10	0	0	0	0	0.039	0.105	0.170	0
11	0	0	0	0	0	0.028	0	0
12	0	0	0	0	0	0.013	0.069	0
13	0	0	0	0.022	0.074	0.136	0.188	0.4612
14	0	0	0	0	0.007	0.023	0.058	0.2518
15	0	0	0	0	0	0.006	0.041	0.2115
16	0	0	0	0	0	0	0.006	0.0756
計	1	1	1	1	1	1	1	1

13に入ろうとするため、また、セル6は、残り時間の少ない中で待機セル  $z^* = 6$  の捕捉者が探知目標を捕捉可能なセルであるため、ここに多量の資源配分が集中投入される。最後に、捕捉者待機セル  $z^* = 6$  の場合の目標探知セル  $i = 1, \dots, 12$  に対する条件付き捕捉確率  $C_t(z, i)$  を表4に記しておく。

### 7. おわりに

本論文では、捕捉者が加わった搜索ゲームを初めてモデル化し、ゲームの均衡解の導出法を提案した。その結果、従来の搜索ゲームとは異なり、DC 計画問題による均衡解導出のための定式化が可能であることを示した。搜索者と捕捉者が設定されたことで、搜索過程で生じる目標探知と捕捉といった事象を区別することができ、密輸取締等での具体的な状況をより現実的に設定することが可能となった。このことは、搜索者に発見されたことを認識した目標の公海や他国の領海への逃避といった、実際に起こるであろう多様な状況設定も可能とするものである。同時に、これまで搜索者による探知事象のみに重きを置いてきた搜索ゲームに対し、多様な問題への表現力を与える新たな方向性も示していて、将来テーマとしてこれらの問題に取り組みたいと思っている。

表 3: 最適な搜索資源配分;  $\varphi^*(i, t)$ 

$i \setminus t$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		0	0	0	0	0	0	
2		0	0	0	0	0	0	
3		0.372	0.181	0.225	0.085	0	0	
4		0.628	0.558	0.227	0.069	0.245	0	
5		0	0.250	0.452	0.428	0.149	0	
6		0	0.011	0.081	0.412	0.606	1	
7		0	0	0.016	0.006	0	0	
8		0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	0	
計		1	1	1	1	1	1	

表 4: 条件付き捕捉確率;  $C_t(z, i)$ 

$i \setminus t$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0.989	0.940	0.777	0.430	0	0	0
2	1	1	0.999	0.982	0.847	0.393	0	0
3	1	1	0.999	0.982	0.847	0.393	0	0
4	1	1	1	0.999	0.981	0.777	0.171	0
5	1	1	1	0.999	0.981	0.777	0.171	0
6	1	1	1	1	0.999	0.950	0.528	0
7	1	1	1	1	0.995	0.865	0.221	0
8	1	1	1	1	0.999	0.918	0.268	0
9	1	1	1	1	0.991	0.713	0	0
10	1	1	1	1	0.996	0.777	0	0
11	1	1	1	1	0.966	0	0	0
12	1	1	1	1	0.981	0	0	0

## 参考文献

- [1] S. Alpern: Hide-and-seek games on a tree to which Eulerian networks are attached. *Networks*, **52** (2008), 162–166.
- [2] S. Alpern: Search games on trees with asymmetric travel times. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **48** (2010), 5547–5563.

- [3] E.J. Anderson and M.A. Aramendia: A linear programming approach to the search game on a network with mobile hider. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **30** (1992), 675–694.
- [4] V. Baston and F. Bostock: A generalized inspection game. *Naval Research Logistics*, **38** (1991), 171–182.
- [5] F.A. Bostock: On an discrete search problem on three arcs. *SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods*, **5** (1984), 94–100.
- [6] G. Brown, J. Kline, A. Thomas, A. Washburn, and K. Wood: A game-theoretic model for defense of an oceanic bastion against submarines. *Military Operations Research*, **16** (2011), 25–40.
- [7] J.P. Caulkins, G. Crawford, and P. Reuer: Simulation of adaptive response: A model of drug interdiction. *Mathematical and Computer Modeling*, **17** (1993), 27–52.
- [8] J.M. Danskin: A helicopter versus submarine search game. *Operations Research*, **16** (1968), 509–517.
- [9] M. Dresher: A sampling inspection problem in arms control agreements: A game-theoretic analysis, Memorandum RM-2972-ARPA, The RAND Corporation, (Santa Monica, California, 1962).
- [10] J.N. Eagle and A. Washburn: Cumulative search-evasion games. *Naval Research Logistics*, **38** (1991), 495–510.
- [11] T. Ferguson and C. Melolidakis: On the inspection game. *Naval Research Logistics*, **45** (1998), 327–334.
- [12] A. Garnaeu: A remark on the customs and smuggler Game. *Naval Research Logistics*, **41** (1994), 287–293.
- [13] R. Hohzaki: Search allocation game. *European Journal of Operational Research*, **172** (2006), 101–119.
- [14] R. Hohzaki: A compulsory smuggling model of inspection game taking account of fulfillment probability of players’s aims. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **49** (2006), 306–318.
- [15] R. Hohzaki: An inspection game with smuggler’s decision on the amount of contraband. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **54** (2011), 25–45.
- [16] R. Hohzaki: A smuggling game with the secrecy of smuggler’s information. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **55** (2012), 23–47.
- [17] R. Hohzaki: Inspection games. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science* (2013), 1–9.
- [18] R. Hohzaki: Search games: literature and survey. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **59** (2016), 1–34.
- [19] R. Hohzaki: A search game with incomplete information on detective capability of searcher. *Contributions to Game Theory and Management*, **10** (2017), 129–142.
- [20] R. Hohzaki and K. Joo: A search allocation game with private information of initial target position. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **58** (2015), 353–375.

- [21] R. Hohzaki, D. Kudoh, and T. Komiya: An inspection game: Taking account of fulfillment probabilities of players' aims. *Naval Research Logistics*, **53** (2006), 761–771.
- [22] R. Hohzaki and R. Masuda: A smuggling game with asymmetrical information of players. *Journal of the Operational Research Society*, **63** (2012), 1434–1446.
- [23] R. Horst, P.M. Pardalos, and N.V. Thoai: *Introduction to Global Optimization* (Kluwer Academic Publishers, London, 1995), 191–230.
- [24] K. Kikuta: A search game on a cyclic graph. *Naval Research Logistics*, **51** (2004), 977–993.
- [25] B.O. Koopman: *Search and Screening* (Operations Evaluation Group, Office of the Chief on Naval Operations, Navy Department, 1946).
- [26] M. Kress, J.O. Royset, and N. Rozen: The eye and the fist: Optimizing search and interdiction. *European Journal of Operational Research*, **220** (2012), 550–558.
- [27] S.P. Lalley: A one-dimensional infiltration game. *Naval Research Logistics*, **35** (1988), 441–446.
- [28] J.J. Meinardi: A sequentially compounded search game. A. Mensch (eds.): *Theory of Games: Techniques and Applications* (The English University Press, 1964), 285–299.
- [29] T. Mitchell and R. Bell: *Drug Interdiction Operations by the Coast Guard* (Center for Naval Analysis, Alexandria, 1980).
- [30] T. Nakai: A sequential evasion-search game. *Mathematica Japonica*, **28** (1983), 315–326.
- [31] J. von Neumann: A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. *Contributions to the Theory of Games*, **2** (1953), 5–12.
- [32] R.C. Norris: *Studies in search for a conscious evader*, MIT Technical Report, No. 62-908106462, 1962.
- [33] J. Pietz and J.O. Royset: Optimal search and interdiction planning. *Military Operations Research*, **20** (2015), 59–73.
- [34] M. Sakaguchi: A sequential game of multi-opportunity infiltration. *Mathematica Japonica*, **39** (1994), 157–166.
- [35] T.J. Stewart: A two-cell model of search for an evading target. *European Journal of Operational Research*, **8** (1981), 369–378.
- [36] M. Thomas and Y. Nisgav: An infiltration game with time dependent payoff. *Naval Research Logistics Quarterly*, **23** (1976), 297–302.
- [37] A. Washburn: Search-evasion game in a fixed region. *Operations Research*, **28** (1980), 1290–1298.
- [38] A. Washburn and K. Wood: Two-person zero-sum games for network interdiction. *Operations Research*, **43** (1995), 243–251.
- [39] S. Yamada, T. Tanaka, and T. Tanino: Successive search methods for solving a canonical DC programming problem. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, **63** (2014), 371–384.

宝崎隆祐  
防衛大学校情報工学科  
〒239-8686 横須賀市走水1-10-20  
E-mail: hozaki@cc.nda.ac.jp



## ABSTRACT

## A SEARCH ALLOCATION GAME WITH AN INTERDICTOR

Atsushi Kurosu  
Japan Maritime Self-Defense Force

Ryusuke Hohzaki Yutaka Sakuma  
National Defense Academy

Takamori Ukai Shuji Yamada  
Niigata University

Our theory on search games in this paper could be applied to anti-smuggling operations on the sea, with the process of detection of smugglers (targets) by surveillance airplanes (searchers) and the capture of them by patrol boats. In almost all models of search games, they involve two main players: searchers and targets. In this paper, we propose a new search game model with the dispatch of a patrol boat as an interdictor by the searcher to capture the detected target. The searcher allocates some search resources to detect the target while deploying an interdictor for dispatch after the detection and the target moves on the sea to evade the searcher. In the paper, we develop a DC programming formulation to derive an equilibrium point in a general way and a linear programming formulation that can be applied to a specific situation. At the equilibrium point, we obtain an optimal waiting point for the interdictor, an optimal allocation of search resources and an optimal movement plan of the target. We analyze those rational strategies of players by computational examples.