日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 62, 2019, pp. 71–89

相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ　　菊池 健太郎　　楠田 浩二
滋賀大学大学院博士後期課程　　滋賀大学

(受理 2018 年 3 月 22 日; 再受理 2019 年 5 月 13 日)

和文概要　世界金融危機以降，想定する確率過程自体を特定できないナイトの不確実性を考慮した投資の頑健最適化の必要性に対する認識が高まっている．本稿では，Maenhout [9] により提案されている「相似拡大的頑健効用」を有する投資家の消費と長期証券投資の最適化問題を，短期金利及びリスクの市場価格が状態変数に依存し，投資対象に全満期の物価連動債を含めた一般性の高い証券市場モデルで考察する．価値関数の従う偏微分方程式は非線形・非斉次方程式となり，閉じた解を持たないが，Campbell and Viceira [6]，楠田 [8] の対数線形近似法を援用して近似解析解を導出する．近似最適投資は，相対的危険回避度に加え，ナイトの不確実性に対する投資家の忌避の度合を表す「相対的曖昧性回避度」に依存することを明らかにする．

キーワード: 確率的最適化，頑健制御，近似解析解，金融，最適制御，動的計画，ナイトの不確実性

1. 序論

世界金融危機以降，想定する確率過程自体を特定できないナイトの不確実性を考慮した投資の頑健最適化の必要性に対する認識が高まっている．ナイトの不確実性下の消費と投資の頑健最適化では,「最悪確率」下でも効用を相応の水準に維持できるように消費と投資を決定しなければならない．このため，通常の消費と投資の最適化の前段階として，最悪確率の決定が必要となり，通常の消費と投資の決定問題よりも複雑な問題を解くことを余儀なくされる．本稿では，消費と長期証券投資の頑健最適化の問題を考察する．

Campbell and Viceira [6] が強調するように，長期投資において，金利変動リスクやインフレ・リスクを制御するための安全証券は短期債ではなく長期物価連動債である．従って，長期投資の問題では，金利変動下で長期物価連動債を含む証券投資の最適化問題を解く必要がある．こうした観点から，彼等は金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが，同問題では，一般に，HJB（Hamilton-Jacobi-Bellman）方程式は非斉次偏微分方程式となり解析解の導出を困難にする．

Campbell and Viceira [6] の第 5 章では，短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する消費と投資の最適化問題を，投資家の CRRA（Constant Relative Risk Aversion）効用と Vasicek 金利モデルの下で，HJB 方程式の非斉次項に Campbell [4] の提案した対数線形近似法を適用し，近似解析解を導出している．また，Campbell *et al.* [5] は，消費・富比率が想定される範囲内であれば，対数線形近似法による近似解析解の精度が高いことを示している．然るに，楠田 [8] は，Campbell and Viceira [6] の導出した近似解析解が高次の一般解における低次の候補解に過ぎないことを示した．バトボルド・菊池・楠田 [2] は，短期金利及びリスクの市場価格が状態変数である潜在ファクターのアフィン関数で表される一般性の高い証券市場モデルの下で，証券投資の対象を短期債，全満期の物価連動債，株式指数等の代

表的指数に拡大し，CRRA 効用を持つ投資家の消費と長期証券投資の最適化問題を考察している．彼等は，非斉次偏微分方程式を Campbell and Viceira [6]，楠田 [8] の対数線形近似法を用いて解き，高次の近似解析解を導出している．彼等の導出した「危険証券」（非短期債）への近似最適投資は，潜在ファクターの変化に伴う将来の投資機会集合の変化を考慮しない近視眼的需要項と，同変化に対し保険を掛ける保険需要項から構成されている．近視眼的需要項と保険需要項について，Campbell and Viceira [6] の第 3 章では，次のように解釈している．すなわち，近視眼的需要項は相対的危険許容度（相対的危険回避度の逆数）と単位投資リスク当たりの対価であるリスクの市場価格の積で，保険需要項は「1− 相対的危険許容度」と「将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値」の積であると解釈している．従って，バトボルド他 [2] で導かれた最適投資は，単位投資リスク当たりの対価を相対的危険許容度で，潜在ファクターの変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1− 相対的危険許容度」で，それぞれ重み付けた加重平均であると解釈できる．

ナイトの不確実性を考慮した消費と投資の最適化問題に関しては，Maenhout [9] が「頑健効用」（Anderson, Hansen, and Sargent [1]）に，効用関数の有すべき望ましい性質とされる「相似拡大性」を付与した「相似拡大的頑健効用」を提案している．相似拡大的頑健効用は，従来，経済学で標準的効用とされてきた CRRA 効用をナイトの不確実性を考慮した環境に一般化した効用であり，投資家の相対的危険回避度に加え，ナイトの不確実性（曖昧性）に対する忌避の度合を表す「相対的曖昧性回避度」で特徴付けられる．Maenhout [9] は，Black-Scholes 証券市場モデルの下で，相似拡大的頑健効用を持つ投資家が短期債と株式に投資する消費・投資の最適化問題に解析解を与えている．

本稿では，バトボルド他 [2] のアフィン潜在ファクター証券市場モデルにナイトの不確実性を導入し，相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題を考察する．

本稿の主要な結果は以下の通りである．先ず，相似拡大的頑健効用投資家は，最悪確率の下で，富の実質期待超過収益率をリスクの市場価格よりも相対的曖昧性回避度の水準に応じて低く想定することを数式で明示した．これは，想定する確率の曖昧性に対する忌避の度合が強い投資家ほど，最悪確率において，単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも低く想定することを示しており，経済学的に自然な結果と言える．

次に，最適化問題の価値関数は非線形・非斉次偏微分方程式に従うが，Campbell and Viceira [6]，楠田 [8] の対数線形近似法を適用することで，最適投資の近似解析解を導出した．ここで，相対的危険回避度と相対的曖昧性回避度の和の逆数を「相対的不確実性許容度」と呼ぶと，危険証券への最適投資は，単位投資リスク当たりの対価を相対的不確実性許容度で，潜在ファクターの変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1− 相対的不確実性許容度」で，それぞれ重み付けた加重平均となる．相似拡大的頑健効用投資家は，最悪確率決定の第 1 段階で，単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも相対的曖昧性回避度に応じて低く想定し，消費・投資決定の第 2 段階で，第 1 段階で低く想定された最悪確率下の単位投資リスク当たりの対価を，相対的危険回避度に応じてさらに低く評価する．両回避度のかかる効果が相俟って，両回避度の和である相対的不確実性回避度が単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方，潜在ファクターの変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を相対的に高く評価していると解釈できる．

本稿の構成は次の通りである．第 2 節では，アフィン潜在ファクター証券市場モデル，相似拡大的頑健効用，同効用を持つ投資家の最適化問題を説明する．第 3 節で，最悪確率を決

定し，同確率を織り込んだ HJB 方程式から価値関数の非斉次偏微分方程式を導出する．第 4 節で，同偏微分方程式の非斉次項を対数線形近似し，近似解析解を導出する．第 5 節で，今後の課題を述べる．

2. アフィン潜在ファクター証券市場モデルと投資家の最適化問題

本節では，先ず，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し，証券価格過程の従う確率微分方程式を示す．次に，相似拡大的頑健効用を紹介し，相似拡大的頑健効用を持つ投資家の消費と投資の最適化問題を示す．

2.1. 市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．消費者共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は N 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである．確率測度 P の下での期待値作用素を E，$\mathcal{F}_t$ の下での期待値作用素を E_t と表記する．

市場では，1 種類の消費財，短期債（以下，適宜「短期安全証券」と呼ぶ），満期までの期間が最長 $\bar{\tau}$，額面が 1 単位の消費財，任意の満期の信用リスクの無い割引物価連動債（以下,「物価連動債」と呼ぶ），J 種類の非債券の主要指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で取引されている．

以下では，消費財を価値基準財とし，諸証券の価格を実質価格で表示する．短期債の実質価格を P_t，満期 T の物価連動債の実質価格を P_t^T，非債券の主要指数の配当込みの実質価格を S_t^j と表記する．また，A の転置を A' と表記する．消費財空間は非負値可測過程の空間とする．

本稿では，一般性の高い，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する．

仮定 1. N 次元潜在ファクター X_t は次の確率過程に従う．

$$dX_t = K(\theta - X_t)\,dt + \Sigma\,dB_t, \tag{2.1}$$

ここで，θ は N 次元定数ベクトル，K, Σ は $N \times N$ 定数行列である．また，K は次のように対角化可能な正値対称行列である．

$$L = Q^{-1}KQ = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N \end{pmatrix},$$

ここで，$l_1, l_2, \cdots, l_N > 0$ であることに留意．

物価連動債 (金利の期間構造）については，潜在ファクター X_t のアフィン・モデル（Duffie and Kan [7] ）を仮定し，非債券の主要指数については，Mamaysky [10] の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する．

仮定 2. *1.* リスクの市場価格 Λ_t，瞬間的実質スポット・レート r_t は，潜在ファクター X_t のアフィン関数である．

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= \lambda + \Lambda X_t, & (2.2) \\ r_t &= r_0 + r' X_t, & (2.3) \end{aligned}$$

ここで，$K + \Sigma\Lambda$ は正則である．

2. 非債券の主要指数の実質配当過程 D_t^j は潜在ファクター X_t の次式で表される関数である．

$$D_t^j = (d_{0j} + d_j' X_t) \exp(b_{0j} t + b_j' X_t). \tag{2.4}$$

2.2. 証券価格過程と予算制約式

以下では，物価連動債の満期までの期間を $\tau = T - t$，$N \times N$ 単位行列を I_N と表記する．

補題 2.1. 仮定 *1*・*2* の下，諸証券の無裁定実質価格過程は次を満たしている．

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t \, dt, \qquad P_0 = 1. \tag{2.5}$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = (r_t + b(\tau)' \Sigma \Lambda_t) \; dt + b(\tau)' \Sigma \, dB_t, \qquad P_T^T = 1, \tag{2.6}$$

ここで，$b(\tau)$ は次式で与えられている．

$$b(\tau) = (K + \Sigma\Lambda)'^{-1} \big(e^{-\tau (K + \Sigma\Lambda)'} - I_N \big) r. \tag{2.7}$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \big(r_t + b_j' \Sigma \Lambda_t \big) \; dt + b_j' \Sigma \, dB_t, \tag{2.8}$$

ここで，b_j は次式で与えられている．

$$b_j = (K + \Sigma\Lambda)'^{-1} (d_j - r). \tag{2.9}$$

証明．補論 A.1 参照． □

非債券の主要指数に対する投資比率を Φ_t^j と表記する．また，物価連動債については，任意の満期の物価連動債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，物価連動債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$ と表記する *．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi_t = \Sigma' \left(\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) b(\tau) \, d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j b_j \right). \tag{2.10}$$

以下，Ψ_t を適宜「投資」と略称する．また，$u_t = (c_t, \Psi_t)$ と表記する．このとき，予算制約式が次の補題で示される．

補題 2.2. 投資過程 Ψ_t と消費過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 *1*・*2* の下，富過程 W_t は次の予算制約式を満たす．

$$\frac{dW_t}{W_t} = \left(r_t + \Psi_t' \Lambda_t - \frac{c_t}{W_t} \right) dt + \Psi_t' \, dB_t. \tag{2.11}$$

証明．補論 A.2 参照． □

---

*或る特定の満期の物価連動債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする．

留意点 1. 予算制約式 *(2.11)* は，投資 Ψ_t が大きくなるにつれて，富の実質収益率のリスクを高める一方，リスクの市場価格に比例して富の実質期待超過収益率を高めることを示している．すなわち，リスクの市場価格は，全投資家共通の単位投資リスク当たりの対価であることを示している．

予算制約式 (2.11) は，富過程が $u_t = (c_t, \Psi_t)$ で決定されることを示しており，消費者の効用最大化問題における制御過程は $u_t = (c_t, \Psi_t)$ であることが分かる．状態変数を $\mathbb{X}_t = (W_t, X_t')'$ と表記する．また，予算制約式 (2.11) を満たす制御過程 $u_t = (c_t, \Psi_t)$ を初期状態 $\mathbb{X}_0 = (W_0, X_0')'$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)$ と表記する．

2.3. 相似拡大的頑健効用と投資家の消費と証券投資の最適化問題

ナイトの不確実性下，相似拡大的頑健効用†（Maenhout [9]）を有する投資家は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度（以下,「参考確率」と呼ぶ）と認識しているが，参考確率 P 以外の確率測度である可能性を否定できない．そこで，投資家は参考確率 P 以外の確率測度の候補として，全ての等価確率測度‡の集合 $\mathbb{P}$ を想定する．尚，任意の等価確率測度 P^ξ は，Girsanov の定理により，Novikov の可積分条件を満たす可測過程 ξ により，Radon-Nikodým 微分として，次式のように表現されることに留意せよ．

$$\frac{d\mathrm{P}^\xi}{d\mathrm{P}} = \exp\left(\int_0^\infty \xi_t\, dB_t - \frac{1}{2}\int_0^\infty \xi_t'\xi_t dt\right).$$

そして，投資家は各消費計画に対し最悪の場合の等価確率測度を想定して，$\mathbb{P}$ 上で期待効用汎関数を最小化する等価確率測度（以下,「最悪確率」と呼ぶ）を求める．この際，参考確率 P を尤も有り得べき確率と認識している以上，参考確率 P と大幅に乖離する最悪確率を想定することは慎重を通り越して杞憂の誹りを免れない．そこで，最悪確率決定時に参考確率 P との乖離を次のように制御する相似拡大的頑健効用を効用汎関数とする§．

$$U(c) = \inf_{\mathrm{P}^\xi \in \mathbb{P}} \mathrm{E}^\xi\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\left\{\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_t^\xi(c)}{2\delta}\,\xi_t'\xi_t\right\} dt\right], \tag{2.12}$$

ここで，E^ξ は P^ξ の下での期待値，β は割引率，γ は相対的危険回避度，δ は「曖昧性の回避度合」を表す正の定数，U_t^ξ は次式で再帰的に定義される効用過程である．

$$U_t^\xi(c) = \mathrm{E}_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\left\{\frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_s^\xi(c)}{2\delta}\,\xi_s'\xi_s\right\} ds\right]. \tag{2.13}$$

以下では，δ を「相対的曖昧性回避度」と呼ぶ．

留意点 2. *(2.12)* 式において，$\delta \searrow 0$ とすると，最小化問題の結果得られる最悪確率は $\xi^* = 0$，すなわち $\mathrm{P}^{\xi^*} = \mathrm{P}$ となり，相似拡大的頑健効用は *CRRA* 効用に縮退する．相似拡大的頑健効用は，経済学で標準的効用とされてきた *CRRA* 効用を，ナイトの不確実性の存在する環境に，相似拡大性を保持しながら拡張したものと解釈できる．

---

†相似拡大的頑健効用は，Anderson *et al.* [1] が提案した「頑健効用」に相似拡大性を付与すべく，Maenhout [9] が修正したものである．

‡ここで，$\tilde{\mathrm{P}}$ が P の等価確率測度とは，両測度の零集合が一致している場合（$\mathrm{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathrm{P}}(A) = 0$）を言う．

§相似拡大的頑健効用の本表現は，Skiadas [12] による割引相対エントロピー過程 $\mathcal{R}_t^\xi$ の次式の表現を利用している．

$$\mathcal{R}_t^\xi = \frac{1}{2}E_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\xi_s'\xi_s ds\right].$$

仮定 3. 投資家は相似拡大的頑健効用 *(2.12)* の最大化を企図する．

間接効用汎関数 J^ξ が次式で再帰的に定義される．

$$J^\xi(\mathbb{X}_t) = \mathrm{E}_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\left\{\frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi(\mathbb{X}_s)}{2\delta}\,\xi_s'\xi_s\right\}ds\right]. \tag{2.14}$$

このとき，本稿における消費と投資の最適化問題及び価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}\ \inf_{\mathrm{P}^\xi\in\mathbb{P}} J^\xi(\mathbb{X}_0). \tag{2.15}$$

3. 最悪確率と最適消費・投資の決定

本節では，頑健性確保のための最悪確率の決定問題を解いた後，同確率を織り込んだ HJB 方程式から推測された価値関数を構成する未知関数 $G(X_t)$ の偏微分方程式を導出する．

3.1. 最悪確率の決定

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 B_t^ξ は，

$$B_t^\xi = B_t - \int_0^t \xi_s\,ds,$$

と表されるので，等価確率測度 P^ξ の下での状態変数に関する確率微分方程式は次のように書き改められる．

$$d\mathbb{X}_t = \left(\begin{pmatrix} W_t(r_t + \Psi_t'\Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\xi_t\right)dt + \begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}dB_t^\xi. \tag{3.1}$$

従って，相似拡大的頑健効用における最適化の必要条件である HJB 方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned}\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}\ \inf_{\mathrm{P}^\xi\in\mathbb{P}}&\left\{\begin{pmatrix} W_t\left(r_t + \Psi_t'\Lambda_t\right) - c_t \\ K(\theta - X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W^\xi \\ J_X^\xi\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW}^\xi & J_{WX}^\xi \\ J_{XW}^\xi & J_{XX}^\xi\end{pmatrix}\right]\right.\\ &\left. -\beta J^\xi + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi}{2\delta}\xi_t'\xi_t + \xi_t'\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W^\xi \\ J_X^\xi\end{pmatrix}\right\} = 0, \end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\text{s.t.}\quad \lim_{T\to\infty}\mathrm{E}[e^{-\beta T}J^\xi(\mathbb{X}_T)] = 0.$$

HJB 方程式 (3.2) における ξ に関する最小化条件より，最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる．

$$\xi_t^* = -\frac{\delta}{(1-\gamma)J^*}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^*\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

ここで，J^* は最悪確率下の間接効用 J^{ξ^*} の簡略表記である．

留意点 3. 予算制約式 *(2.11)* 式，最悪確率 *(3.3)* 式より，最悪確率下の予算制約式は次式のように表される．

$$\frac{dW_t}{W_t} = \left\{r_t + \Psi_t'\left(\Lambda_t - \frac{\delta}{(1-\gamma)J^*}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^*\end{pmatrix}\right) - \frac{c_t}{W_t}\right\}dt + \Psi_t'\,dB_t^{\xi^*}. \tag{3.4}$$

(3.4) 式の富の実質期待収益率における投資 Ψ_t' の積の対象となっている括弧内の項は，相対的曖昧性回避度 δ の投資家にとっての，最悪確率における単位投資リスク当たりの対価と解釈できる．留意点 *1* で示したように，曖昧性が考慮されない場合の単位投資リスク当たりの対価は，全投資家共通のリスクの市場価格であったのに対し，相似拡大的頑健効用投資家にとっての最悪確率下の単位投資リスク当たりの対価は，相対的曖昧性回避度に依存しており，投資家によって異なることを示している．*(3.4)* 式は，より曖昧性回避的な相似拡大的頑健効用投資家であるほど，最悪確率において，単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも低く想定し，その結果，最悪確率下の富過程の実質期待超過収益率を低く想定することを示している．

最悪確率測度 P^* を HJB 方程式 (3.2) に代入すると，次式を得る．

$$\sup_{u\in\mathcal{B}(X_0)}\left[\begin{pmatrix} W_t\left(r_t+\Psi_t'\Lambda_t\right)-c_t \\ K(\theta-X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^*\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW}^* & J_{WX}^* \\ J_{XW}^* & J_{XX}^*\end{pmatrix}\right]\right.$$
$$\left.-\beta J^*+\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\frac{\delta}{2(1-\gamma)J^*}\begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^*\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W^* \\ J_X^*\end{pmatrix}\right]=0. \quad (3.5)$$

3.2. 最悪確率下の最適消費・投資の決定

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $u^*=(c^*,\Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.6)$$
$$\Psi_t^* = \frac{\pi_t}{W_t^2\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}, \quad (3.7)$$

ここで，

$$\pi_t=W_t\left\{-V_W\Lambda_t+\Sigma'\left(\frac{\delta V_W}{(1-\gamma)V}V_X-V_{XW}\right)\right\}. \quad (3.8)$$

留意点 4. *(3.7)* 式は次のように書き換えられる．

$$\Psi_t^*=\frac{-V_W}{W_t\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\Lambda_t+\Sigma'\frac{\frac{\delta V_W}{(1-\gamma)V}V_X-V_{XW}}{W_t\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}. \quad (3.9)$$

危険証券（非短期債）に対する需要は *2* 項に分解される．第 *1* 項は潜在変数の変化を考慮しない近視眼的需要を表している．第 *2* 項は，潜在変数の変化に伴い将来の効用が変動するリスクに対する保険需要を表している．この効用の変動リスクは，状態変数 X_t の変動に起因する投資機会集合（予算制約式）の変化から生じるものと解釈できる．

最適消費 (3.6) 式と最適投資 (3.7) 式を HJB 方程式 (3.5) に代入し，

$$W_tV_W\Lambda_t'\Psi_t^*+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX}\end{pmatrix}\right]$$
$$-\frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\begin{pmatrix} V_W \\ V_X\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t(\Psi_t^*)' \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} V_W \\ V_X\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'V_{XX}\right]-\frac{\delta}{2(1-\gamma)V}V_X'\Sigma\Sigma'V_X-\frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^{*2}\left(V_{WW}-\frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}, \quad (3.10)$$

に注意して整理すると，次の価値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}V_X'\Sigma\Sigma' V_X - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^2\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)} + W_t r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X + \frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \beta V = 0. \quad (3.11)$$

価値関数は X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$V(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(X_t)\big)^{\gamma}. \quad (3.12)$$

(3.12) 式で表される価値関数 V に偏微分を施し，(3.7) 式に代入し，価値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.11) に代入すると，次の命題を得る．

命題 3.1. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(2.15)* の最適消費，最適投資は，それぞれ *(3.13)* 式，*(3.14)* 式を満たしており，価値関数 V を構成する未知関数 $G(X_t)$ は *2* 階の偏微分方程式 *(3.15)* の解である．

$$c_t^* = \frac{W_t}{G(X_t)}, \quad (3.13)$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\Lambda_t + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\Sigma'\frac{G_X(X_t)}{G(X_t)}, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G} + \left\{K(\theta - X_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_t'\Sigma\right\}\frac{G_X}{G} + \frac{1}{G} - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_t - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \quad (3.15)$$

証明. 補論 A.3 参照. □

留意点 5. *CRRA* 効用（$\delta = 0$）の場合，最適投資 $\bar{\Psi}$ は次式で表される．

$$\bar{\Psi}_t = \frac{1}{\gamma}\Lambda_t + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\Sigma'\frac{G_X(X_t)}{G(X_t)}. \quad (3.16)$$

上式の第 *2* 項に現れる，

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\Sigma'\frac{G_X(X_t)}{G(X_t)}, \quad (3.17)$$

については，*Campbell and Viceira [6]* の第 *3* 章では，危険資産の収益率と，将来の短期金利の期待割引現在価値の時間変化を表す項との共分散を，危険資産の標準偏差で除して負としたものとして表現されている．これは，危険資産の収益率と将来の短期金利が異なる向きに動くと予想される場合，従って，投資収益率の基盤である短期金利の低下リスクに対する保険として危険資産が機能する場合，保険需要項は正となることを示している．すなわち，*(3.17)* で表される項は「将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値」と解釈できる．*(3.16)* 式では，*CRRA* 効用投資家の最適投資が，単位投資リスク当たりの対価を相対的危険許容度（相対的危険回避度の逆数）で，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下

リスクに対する投資の保険価値を「1− 相対的危険許容度」で重み付けた加重平均として表されている．これは，相対的危険回避度が，単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を相対的に高く評価する度合であることを示している．

以下では，相対的危険回避度と相対的曖昧性回避度の和を「相対的不確実性回避度」，相対的不確実性回避度の逆数を「相対的不確実性許容度」と呼ぶことにする．*(3.14)* 式では，相似拡大的頑健効用投資家の最適投資が，単位投資リスク当たりの対価を相対的不確実性回避許容度で，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を「1− 相対的不確実性許容度」で重み付けた加重平均として表されている．留意点 *3* で，相似拡大的頑健効用投資家は，最悪確率下で単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも相対的曖昧性回避度に応じて低く想定することを示した．すなわち，相似拡大的頑健効用投資家は，最悪確率決定の第 *1* 段階で，単位投資リスク当たりの対価をリスクの市場価格よりも相対的曖昧性回避度に応じて低く想定し，消費・投資決定の第 *2* 段階で，第 *1* 段階で低く想定された最悪確率下の単位投資リスク当たりの対価を相対的危険回避度に応じてさらに低く評価する．*(3.14)* 式は，両回避度のかかる効果が相俟って，両回避度の和である相対的不確実性回避度が単位投資リスク当たりの対価を相対的に低く評価する一方，状態変数の変化に伴う将来の短期金利低下リスクに対する投資の保険価値を相対的に高く評価していることを示唆しており，非常に興味深い結果である．

4. 対数線形近似法による近似解析解の導出

本節では，前節で導出された偏微分方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [6]，楠田 [8] の方法で対数線形近似し，近似解析解を導出する．

4.1. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

偏微分方程式 (3.15) は非斉次項 $1/G$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．Campbell and Viceira [6] は CRRA 効用と Vasicek 金利モデルを仮定し，消費と 2 証券（安全証券と長期物価連動債）投資の最適化問題で導出した常微分方程式の近似解析解を導出する際に非斉次項の対数線形近似を用いている．すなわち，(3.13) 式より，$1/G(X_t)$ が消費・富比率 c_t^*/W_t と等しく，同比率が安定的であることに着目し，$1/G(X_t)$ を $\mathrm{E}[\log(c_t^*/W_t)]$ の周りで対数線形近似している．しかし，この場合，$\mathrm{E}[\log(c_t^*/W_t)]$ は時間変数に依存する．そこで，楠田 [8] は一定値をとる $\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[\log(c_t^*/W_t)]$ の周りで対数線形近似を行っている．本稿もこれに従って非斉次項を次のように対数線形近似する．

$$\frac{1}{G(X_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t), \tag{4.1}$$

ここで，

$$\begin{aligned} g_0 &= g_1(1 - \log g_1), && (4.2)\\ g_1 &= \exp\Bigl(\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\Bigl[\log\Bigl(\frac{c_t^*}{W_t}\Bigr)\Bigr]\Bigr). && (4.3) \end{aligned}$$

偏微分方程式 (3.15) における非斉次項 $1/G$ を (4.1) 式で近似し，Λ_t，r_t に，それぞれ (2.2) 式，(2.3) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G} \\
&\qquad + \left\{K(\theta - X_t) - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma(\lambda+\Lambda X_t)\right\}'\frac{G_X}{G} - g_1\log G \\
&\qquad + g_0 - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}(\lambda+\Lambda X_t)'(\lambda+\Lambda X_t) - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r'X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

近似偏微分方程式 (4.4) の解は，次式で表される 2 次形式の指数関数と推測される．

$$G(X_t) = \exp\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right), \quad (4.5)$$

ここで，A は一般性を失うことなく対称行列である．

このとき，

$$g_1 = \exp\left(-\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\left[\log G(X_t)\right]\right) = \exp\left(\lim_{t\to\infty}\left[-a_0 - a'\mathrm{E}[X_t] - \frac{1}{2}\mathrm{E}[X_t'AX_t]\right]\right), \quad (4.6)$$

は次の補題で計算される．

補題 4.1. 仮定 *1-3* の下，g_1 は (a_0, a, A) により次式で表される．

$$g_1 = \exp\left(-a_0 - a'\theta - \frac{1}{2}\left(\theta'A\,\theta + \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)'MQ^{-1}\Sigma\right]\right)\right), \quad (4.7)$$

ここで，行列 P の第 (i,j) 成分を P_{ij} と表記すると，

$$M_{ij} = \frac{1}{l_i + l_j}(Q'A\,Q)_{ij}.$$

証明. X_t は線形確率微分方程式 (2.1) の解として，次のように表される．

$$X_t = Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I_N - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\,dB_s.$$

よって，$\lim_{t\to\infty} e^{-tL} = 0, \mathrm{E}[dB_s] = 0$ に注意すると，$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[X_t] = \theta$ が得られる．

次に，

$$\begin{aligned}
X_t'AX_t = &\left\{Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I_N - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\,dB_s\right\}' \\
&\qquad A\left\{Qe^{-tL}Q^{-1}X_0 + Q\left(I_N - e^{-tL}\right)Q^{-1}\theta + Q\int_0^t e^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\,dB_s\right\}.
\end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{E}[dB_s dB_t'] = \delta_{st}I_N ds$（ここで，$\delta_{st}$ は Kronecker のデルタ）に注意すると，

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[X_t'AX_t] &= \theta'A\,\theta + \lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)'e^{-(t-s)L}Q'A\,Qe^{-(t-s)L}Q^{-1}\Sigma\right]ds \\
&= \theta'A\,\theta + \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)'\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-(t-s)L}Q'A\,Qe^{-(t-s)L}ds\,Q^{-1}\Sigma\right] \\
&= \theta'A\,\theta + \mathrm{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)'MQ^{-1}\Sigma\right].
\end{aligned}$$

以上より，(4.7) 式が導かれる． □

4.2. 近似解析解

関数 (4.5) に偏微分を施し，偏微分方程式 (4.4) に代入し，g_0 に (4.2) 式を代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left(aa'+A+aX_t'A+AX_ta'+AX_tX_t'A\right)\right] \\
&\qquad +\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(a'+X_t'A\right)\Sigma\Sigma'\left(a+AX_t\right) \\
&\qquad +\left\{K\theta-\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\lambda-\left(K+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\Lambda\right)X_t\right\}'\left(a+AX_t\right) \\
&\quad +g_1(1-\log g_1)-g_1\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\left(\lambda'\lambda+2\lambda'\Lambda X_t+X_t'\Lambda'\Lambda X_t\right) \\
&\qquad -\frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0+r'X_t)-\frac{\beta}{\gamma}=0. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

上式は X_t に関する恒等式なので，次の (a_0,a,A) に関する代数方程式が導出される．

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}a'\Sigma\Sigma'a+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma'A]+\left\{K\theta-\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\lambda\right\}'a \\
&\qquad +g_1(1-a_0-\log g_1)-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{\gamma}r_0-\frac{\beta}{\gamma}=0, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}A\Sigma\Sigma'a+AK\theta-K'a-\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}(A\Sigma\lambda+\Lambda'\Sigma'a)-g_1a \\
&\qquad -\frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{\gamma}r=0, \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}A\Sigma\Sigma'A-\left(K'+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'\Sigma'\right)A-\frac{1}{2}g_1A-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\Lambda=0, \qquad (4.11)$$

ここで，g_1 は (4.7) 式で表されている．

上記価値関数を構成する未知関数が近似偏微分方程式 (4.4) の解として近似されている場合の価値関数，最適消費，最適投資をそれぞれ「近似価値関数」,「近似最適消費」,「近似最適投資」と呼び，$\tilde{V},\tilde{c}^*,\tilde{\Psi}^*$ と表記する．このとき，次の命題を得る．

命題 4.1. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(2.15)* の近似価値関数，近似最適消費，近似最適投資は次を満たしている．

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(\mathbb{X}_t) &= \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left[\gamma\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], && (4.12)\\
\tilde{c}_t^* &= W_t\exp\left[-\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], && (4.13)\\
\tilde{\Psi}_t^* &= \frac{1}{\gamma+\delta}\left(\lambda+\Lambda X_t\right)+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}\Sigma'\left(a+AX_t\right), && (4.14)
\end{aligned}$$

ここで，(a_0,a,A) は代数方程式 *(4.9)–(4.11)* の解である．

標準ブラウン運動が N 次元で，非債券の代表的指数が J 種類なので，物価連動債については，$I(=N-J)$ 群の投資対象を設定することにより，最適投資を決定できる．次に，代表的な 2 例を示す．

例 1. 投資家が物価連動債の満期までの期間を I 群に区分し，各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する．説明の便宜上，$\tau_0=0$，$\tau_I=\bar{\tau}$ と表記し，物価連動債の満期までの期間を $(\tau_0,\tau_1],(\tau_1,\tau_2],\cdots,(\tau_{I-1},\tau_I]$ に区分する．また，投資比率密度過程を $(\varphi_t^1,\varphi_t^2,\cdots,\varphi_t^I)$ とするほか，次のように記法を定める．

$$\varPhi_{1t}=\begin{pmatrix}\varPhi_{1t}^P\\ \varPhi_{1t}^S\end{pmatrix},\qquad B_1=\begin{pmatrix}B_1^P\\ B_1^S\end{pmatrix},\tag{4.15}$$

ここで，

$$\varPhi_{1t}^P=\begin{pmatrix}\varphi_t^1(\tau_1-\tau_0)\\ \varphi_t^2(\tau_2-\tau_1)\\ \vdots\\ \varphi_t^I(\tau_I-\tau_{I-1})\end{pmatrix},\ \varPhi_{1t}^S=\begin{pmatrix}\varPhi_t^1\\ \varPhi_t^2\\ \vdots\\ \varPhi_t^J\end{pmatrix},\ B_1^P=\begin{pmatrix}(\tau_1-\tau_0)^{-1}\int_{\tau_0}^{\tau_1}b(\tau)'d\tau\\ (\tau_2-\tau_1)^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}b(\tau)'d\tau\\ \vdots\\ (\tau_I-\tau_{I-1})^{-1}\int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I}b(\tau)'d\tau\end{pmatrix},\ B_1^S=\begin{pmatrix}b_1'\\ b_2'\\ \vdots\\ b_J'\end{pmatrix}.$$

このとき，$\varPsi_{1t}^*$ の定義式 *(2.10)* から，

$$\varPsi_{1t}^*=\Sigma' B_1'\varPhi_t^*,$$

であることに注意すると，近似最適投資比率 *(4.14)* 式より，危険証券（非短期安全証券）への近似最適投資比率 $\tilde{\varPhi}_{1t}^*$ は次式で表される．

$$\tilde{\varPhi}_{1t}^*=\frac{1}{\gamma+\delta}(\Sigma' B_1')^{-1}(\lambda+\Lambda X_t)+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}(B_1')^{-1}(a+AX_t).\tag{4.16}$$

尚，短期債（短期安全証券）への近似最適投資比率は $1-\sum_{i=1}^{I}\tilde{\varphi}_t^{*i}(\tau_i-\tau_{i-1})-\sum_{j=1}^{J}\tilde{\varPhi}_t^{*j}$ である．

例 2. 投資家は I 種類の一定満期の物価連動債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．投資対象とする物価連動債の満期を $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_I\le\bar{\tau}$ とし，各満期の物価連動債への投資比率を $\varPhi_P^1,\varPhi_P^2,\cdots,\varPhi_P^I$ とする．次のように記法を定める．

$$\varPhi_{2t}=\begin{pmatrix}\varPhi_{2t}^P\\ \varPhi_{2t}^S\end{pmatrix},\qquad B_2=\begin{pmatrix}B_2^P\\ B_2^S\end{pmatrix},\tag{4.17}$$

ここで，

$$\varPhi_{2t}^P=\begin{pmatrix}\varPhi_{Pt}^1\\ \varPhi_{Pt}^2\\ \vdots\\ \varPhi_{Pt}^I\end{pmatrix},\quad \varPhi_{2t}^S=\begin{pmatrix}\varPhi_t^1\\ \varPhi_t^2\\ \vdots\\ \varPhi_t^J\end{pmatrix},\quad B_2^P=\begin{pmatrix}b(\tau_1)'\\ b(\tau_2)'\\ \vdots\\ b(\tau_I)'\end{pmatrix},\quad B_2^S=\begin{pmatrix}b_1'\\ b_2'\\ \vdots\\ b_J'\end{pmatrix}.$$

このとき，*(4.14)* 式より，危険証券への近似最適投資比率 $\tilde{\varPhi}_{2t}^*$ は次式で表される．

$$\tilde{\varPhi}_{2t}^*=\frac{1}{\gamma+\delta}(\Sigma' B_2')^{-1}(\lambda+\Lambda X_t)+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\gamma}{\gamma-1}(B_2')^{-1}(a+AX_t).\tag{4.18}$$

尚，短期債への近似最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^{I} \tilde{\Phi}_{Pt}^{*i} - \sum_{j=1}^{J} \tilde{\Phi}_{t}^{*j}$ である．

留意点 6. *(4.16)*・*(4.18)* 式では，近似最適投資比率は，潜在ファクター X_t のアフィン関数として表されており，X_t の変化が近視眼的需要項ではリスクの市場価格の変化を通じて，保険需要項では効用の変化を通じて，最適投資に影響を及ぼすことがみてとれる．

留意点 7. 最近になって，バトボルド他 *[3]* は，*Epstein-Zin* 効用投資家の最適消費・投資問題に対する近似解析解を与え，上記例 *2* における相対的危険回避度 $\hat{\gamma}$，相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）$\hat{\zeta}$ を持つ *Epstein-Zin* 効用投資家の危険証券の近似最適投資比率 $\hat{\Phi}_{2t}$ が次式で表されることを示している．

$$\hat{\Phi}_{2t} = \frac{1}{\hat{\gamma}}(\Sigma' B_2')^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + \left(1 - \frac{1}{\hat{\gamma}}\right)\frac{\hat{\zeta}}{\hat{\zeta} - 1}(B_2')^{-1}(a + AX_t). \tag{4.19}$$

(4.18)・*(4.19)* 両式より，相似拡大的頑健効用 (γ, δ) を持つ投資家と *Epstein-Zin* 効用 $(\hat{\gamma}, \hat{\zeta})$ を持つ投資家の回避度が次式の関係にある場合，

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

外部の観察者からは当該投資家が相似拡大的頑健効用 (γ, δ) を持っているのか，*Epstein-Zin* 効用 $(\hat{\gamma}, \hat{\zeta})$ を持っているのかを識別し難い状況となる．これは，既に *Maenhout [9]* が，*Black-Scholes* 証券市場モデル（状態変数が富過程のみで，金利一定且つリスクの市場価格一定）の下，消費者が短期債と株式に投資する問題において指摘していることであるが，一般次元のアフィン潜在ファクター証券市場モデルの下，消費者が短期債，全満期の物価連動債，非債券主要指数に投資する本問題においても再確認された．

但し，相対的曖昧性回避度と相対的異時点間変動回避度が最適投資に及ぼす影響は大きく異なっている．留意点 *5* で既にみたように，相対的曖昧性回避度は相対的危険回避度と相俟って近視眼的需要項に対する重み付けを低める．一方，*(4.19)* 式から分かるように，相対的異時点間変動回避度は，近視眼的需要項に対する重み付けに影響を与えていない．これは，異時点間変動回避度が，危険回避度や曖昧性回避度とは異なり，異なる状態間の変化とは無関係な係数であることに起因していると解釈できる．このように，相対的異時点間変動回避度は，近視眼的需要項に対する重み付けに影響を与えないが，保険需要項における重み付けの対象に影響を及ぼしている．これは，相対的異時点間変動回避度が，状態変数の変化を通じた効用の変動に対する保険需要に影響を与える係数であることに起因していると解釈できる．

5. 今後の課題

近似価値関数を構成する係数体系 (a_0, a, A) に関する代数方程式 (4.9)–(4.11) は一般に解が複数存在するので，これら複数の解は本問題の最適解の候補に過ぎない．従って，これら複数の候補解から最適解を識別する必要がある．実用的には，想定される状態変数空間の領域内の幾つかの状態変数 $\mathbb{X}_0$ に対し，価値関数 $\tilde{V}(\mathbb{X}_0)$ の数値の大小関係を比較すれば識別できるのかもしれない．しかし，本稿では価値関数が近似関数に過ぎず，算出される価値関数の数値には近似誤差も含まれるため，大小関係が微差といった場合は最適解を識別できたのか，

不安を払拭し難い．こうした観点から，バトボルド他 [2] では，Maslowski and Veverka [11] の理論を援用して，複数候補解から最適解を識別するための十分条件を与えている．しかし，Maslowski and Veverka [11] では，通常の非再帰的効用の最大化問題を対象としており，本稿のような最小・最大化問題に適用することはできない．本稿の問題に対しても，最適解の十分条件を提示することは今後の課題である．

本稿では，対数線形近似法を適用し，最適投資比率の近似解析表現を得た．しかし，近似精度についての検証は行えていない．近似精度の検証は，先ず，証券市場モデルのパラメータを推定した上で，近似最適投資比率と厳密解に基づく最適投資比率を算出する必要がある．これには，第 4 節で導出した近似価値関数を構成する係数体系が従う代数方程式を数値計算により解くことによって近似最適投資比率を算出することに加え，価値関数が従う非斉次偏微分方程式を数値的に解いて厳密解に基づく最適投資比率を求めるという手順を踏むことになる．しかし，投資対象を株式指数，REIT 指数，長期物価連動債に限定した場合でも，最低三つの潜在ファクターが不可欠となる．このため，証券市場モデルの推定には，Kalman フィルターに基づく最尤法といった，最適な点推定値を探索するために相応の時間を要する方法が求められる．また，厳密解に基づく最適投資比率の算出には，三つ以上の変数を持つ非線形・非斉次偏微分方程式を数値的に解くことも必要となる．以上の点を考慮し，本稿では近似最適投資比率の精度検証を断念せざるを得なかったが，これは独立した論文で扱われる価値がある課題と考えられる．

謝辞

有益なコメントを頂いた査読者 2 名，審査の編集をされた編集委員長，担当編集委員に感謝申し上げる．また，著者の一人である楠田は日本学術振興会より科学研究費補助金基盤研究 (C)No.26380392 の助成を受けたことに感謝申し上げる．

参考文献

[1] E. Anderson, L. Hansen, and T. Sargent: A quartet of semi-groups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection. *Journal of the European Economic Association*, **1** (2003), 68–123.

[2] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-60, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018).

[3] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: Epstein-Zin 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, **62** (2019), 23–53.

[4] J. Campbell: Intertemporal asset pricing without consumption data. *The American Economic Review*, **83** (1993), 487–512.

[5] J. Campbell, J. Cocco, F. Gomes, P. Maenhout, and L. Viceira: Stock market mean reversion and the optimal equity allocation of a long-lived investor. *Review of Finance*, **5** (2001), 269–292.

[6] J. Campbell and L. Viceira: *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, New York, 2002).

[7] D. Duffie and R. Kan: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6** (1996), 379–406.

[8] 楠田浩二: 消費と債券投資の多期間最適化問題における高次の近似解析解. Discussion paper J-35, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2013).

[9] P. Maenhout: Robust portfolio rules and asset pricing. *The Review of Financial Studies*, **17** (2004), 951–983.

[10] H. Mamaysky: A model for pricing stocks and bonds. Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management (2002).

[11] B. Maslowski and P. Veverka: Sufficient stochastic maximum principle for discounted control problem. *Applied Mathematics and Optimization*, **70** (2014), 225–252.

[12] C. Skiadas: Robust control and recursive utility. *Finance and Stochastics*, **7** (2003), 475–489.

A. 補論

A.1. 補題 2.1 の証明

標準ブラウン運動 B_t とリスクの市場価格 Λ_t により,

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \Lambda_s\, ds, \tag{A.1}$$

で定義される確率過程 $\tilde{B}_t$ は，Girsanov の定理より，リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である．よって，リスク中立確率測度の下で，潜在ファクターの確率微分方程式は,

$$\begin{aligned} dX_t &= (K(\theta - X_t) - \Sigma\Lambda_t)\, dt + \Sigma\, d\tilde{B}_t \\ &= \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}\, dt + \Sigma\, d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

と表現される．

今，割引物価連動債 P^T を r_t の上に書かれた派生資産と看做すと，r_t は X_t のアフィン関数なので，滑らかな関数 $f(X_t, t)$ により,

$$P_t^T = f(X_t, t), \tag{A.2}$$

と表される．このとき，無裁定条件から，f は次の偏微分方程式の解となっていることが示される．

$$f_t + \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}' f_X + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' f_{XX}] - (r_0 + r'X_t)f = 0, \qquad f(X_T, T) = 1. \tag{A.3}$$

一方，本モデルはアフィン・モデルなので，$\tau = T - t$ とおくと，上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 $b_0(\tau), b(\tau)$ によって

$$f(X_t, t) = e^{b_0(\tau) + b(\tau)' X_t}, \qquad (b_0(0), b(0)) = (0, 0), \tag{A.4}$$

と書けることが示される．先ず，上式を対数微分して P_t^T の確率微分方程式を導出すると，(2.6) 式を得る．次に，(A.4) 式に偏微分を施し，(A.3) 式に代入すると，次式を得る．

$$-\frac{db_0(\tau)}{d\tau} - \frac{db(\tau)'}{d\tau} X_t + b(\tau)'\{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2} b(\tau)'\Sigma\Sigma' b(\tau) - (r_0 + r'X_t) = 0. \tag{A.5}$$

(A.5) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，次式を得る．

$$\frac{db(\tau)}{d\tau}=-(K+\Sigma\Lambda)'b(\tau)-r, \qquad b(0)=0. \tag{A.6}$$

上式を定数変化法で解いて，(2.7) 式を得る．

非債券の第 j 指数を $\tilde{S}_t^j$ と表記する．このとき，Mamaysky [10] より，$\tilde{S}_t^j$ は次式で表される．

$$\tilde{S}_t^j=\exp(b_{0j}t+b_j'X_t). \tag{A.7}$$

配当率過程は次式となる．

$$\frac{D_t^j}{\tilde{S}_t^j}=(d_{0j}+d_j'X_t). \tag{A.8}$$

(A.7)(A.8) 両式より，配当込み指数に関する無裁定条件から，次式を得る．

$$b_{0j}+b_j'\{K\theta-\Sigma\lambda-(K+\Sigma\Lambda)X_t\}+\frac{1}{2}b_j'\Sigma\Sigma'b_j+(d_{0j}+d_j'X_t)-(r_0+r'X_t)=0. \tag{A.9}$$

(A.9) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(2.9) 式を得る．

A.2. 補題 2.2 の証明

本稿では，消費財を価値基準財とする実質証券価格を対象としてきたが，ここでは先ず，名目価格を対象とする．すなわち，満期までの期間 τ の物価連動債の名目価格を $\tilde{P}_t(\tau)$，主要指数の配当込みでない名目価格を $\tilde{S}_t^{*j}$ と表記する．また，或る拡散過程に従う一般物価過程を p_t と表記する．

短期債，物価連動債，主要指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta,(\vartheta(\tau)),(\vartheta^{*j}))$ とすると，富の名目価値 $\tilde{W}_t$ は次式で表現される．

$$\tilde{W}_t=\vartheta_t\tilde{P}_t+\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^{*j}\tilde{S}_t^{*j}. \tag{A.10}$$

このとき，配当込み主要指数のポートフォリオは，

$$\vartheta_t^j=\frac{\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^j}\vartheta_t^{*j}, \tag{A.11}$$

で定義され，配当込み主要指数の名目収益率と主要指数の名目収益率の間に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}=\frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}}+\tilde{D}_t^jdt, \tag{A.12}$$

が成り立っていることに注意すると，所与の c_t の下，自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta,(\vartheta(\tau)),(\vartheta^{*j}))$ は，次式を満たしている．

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} &= \frac{1}{\tilde{W}_t}\left\{\vartheta_td\tilde{P}_t+\int_0^{\bar{\tau}}\vartheta_t(\tau)d\tilde{P}_t(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^{*j}\left(d\tilde{S}_t^{*j}+\tilde{D}_t^j\tilde{S}_t^{*j}dt\right)-p_tc_tdt\right\}\\
&= \frac{\vartheta_t\tilde{P}_t}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t}+\int_0^{\bar{\tau}}\frac{\vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\frac{\vartheta_t^j\tilde{S}_t^j}{\tilde{W}_t}\left(\frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}}+\tilde{D}_t^jdt\right)-\frac{c_t}{W_t}dt\\
&= \left(1-\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\right)\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t}+\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\Phi_t^j\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}-\frac{c_t}{W_t}dt.
\end{aligned}$$

このとき，各証券の名目収益率の項に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j} = \frac{dS_t^j}{S_t^j} + \frac{dp_t}{p_t} + \left(\frac{dS_t^j}{S_t^j}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right),$$

等を代入し整理すると，次式が導かれる．

$$\begin{aligned}\frac{dW_t}{W_t} &= \frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} - \frac{dp_t}{p_t} - \left(\frac{dW_t}{W_t}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right)\\ &= \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j\right)\frac{dP_t}{P_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)}d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} - \frac{c_t}{W_t}dt.\end{aligned}$$

上式に，(2.5)(2.6)(2.8) 式を代入し，整理すると，(2.11) 式を得る．

A.3. 命題 3.1 の証明

先ず，最適消費は，

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \left\{\left(\frac{G}{W_t}\right)^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t}{G},$$

すなわち，(3.13) 式が得られる．

次に，価値関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$W_t V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = \gamma V \frac{G_X}{G}, \qquad W_t^2 V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,$$

$$W_t V_{XW} = \gamma(1-\gamma)V\frac{G_X}{G}, \qquad V_{XX} = \gamma V\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}.$$

価値関数の偏微分結果より，最適投資 (3.7) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$\pi_t = V\left((\gamma-1)\Lambda_t + \gamma(\gamma+\delta-1)\Sigma'\frac{G_X}{G}\right), \tag{A.13}$$

$$W_t^2\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right) = (\gamma-1)(\gamma+\delta)V. \tag{A.14}$$

ゆえに，最適投資 (3.7) 式に (A.13)(A.14) 式を代入すると，(3.14) 式を得る．

価値関数 V の偏微分方程式 (3.11) における第 1 項～第 3 項については，(A.13)(A.14) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}V_X'\Sigma\Sigma' V_X - \frac{\pi_t'\pi_t}{2W_t^2\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right)}\\ &= \frac{\gamma}{2}V\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\}\right] + \frac{\gamma^2\delta}{2(\gamma-1)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}\\ &- \frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}V\left((\gamma-1)\Lambda_t' + \gamma(\gamma+\delta-1)\frac{G_X'}{G}\Sigma\right)\left((\gamma-1)\Lambda_t' + \gamma(\gamma+\delta-1)\frac{G_X'}{G}\Sigma\right)'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= V\left\{\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{\gamma}{2}\left(\gamma-1+\frac{\gamma\delta}{\gamma-1} - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\right)\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}\\
&= \gamma V\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_t'\Sigma'\frac{G_X}{G}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}\right\}. \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

価値関数の偏微分方程式 (3.11) における第 6 項については，(3.6) 式と (3.13) 式を用いて整理すると，

$$
\frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{1-\frac{1}{\gamma}} = \gamma\frac{V}{W}\left\{\left(\frac{G}{W}\right)^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \gamma\frac{V}{G}, \qquad \text{(A.16)}
$$

を得る．

(A.15)(A.16) 式等を価値関数の偏微分方程式 (3.11) に代入し，両辺を γV で除して整理すると，(3.15) 式が得られる．

菊池健太郎
滋賀大学
経済学部
〒 522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1
E-mail: kentaro-kikuchi@shiga-u.ac.jp

ABSTRACT

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION TO CONSUMPTION AND LONG-TERM SECURITY INVESTMENT OPTIMIZATION PROBLEM WITH HOMOTHETIC ROBUST UTILITY

Bolorsuvd Batbold
Graduate School of Shiga University

Kentaro Kikuchi Koji Kusuda
Shiga University

After the global financial crisis, there has been a growing recognition for the necessity of robust investment optimization which considers Knightian uncertainty, which cannot specify the assumed stochastic process itself. This paper explores the consumption and long-term security investment optimization problem of the investor, who has homothetic robust utility proposed by Maenhout, under generalized security markets including all maturity inflation-indexed bonds, where short-term interest rate and market price of risk depend on state variables. Although a closed-form solution cannot be obtained due to non-linear and non-homogeneous PDE of the value function, an approximate analytical solution is derived applying log-linear approximation of Campbell and Viceira and Kusuda, to the PDE. It is revealed that approximate optimal investment hinges not only on relative risk aversion but also on relative ambiguity aversion to Knightian uncertainty.