

## Epstein-Zin 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ  
滋賀大学大学院博士後期課程

菊池 健太郎  
滋賀大学

楠田 浩二

(受理 2018 年 8 月 13 日 ; 再受理 2019 年 4 月 12 日)

**和文概要** Campbell and Viceira [8] は, 相対的危険回避度と異時点間代替弾力性を分離できる Epstein-Zin 効用を持つ消費者が短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する消費と投資の最適化問題を考察し, Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式に現れる非斉次項を対数線形近似することで近似解析解を導出している. 本稿では, Epstein-Zin 効用を持つ消費者の投資対象を全満期の物価連動債, 株式指数等の主要指数に拡大し, これら証券の価格が潜在状態変数に従うと仮定して, 消費と投資の最適化問題を考察する. 我々は上記非斉次項の対数線形近似により近似解析解候補を導出し, 近似最適投資が状態変数に依存することを示す. また, 近似解析解候補は一般に複数存在することから, これら複数の解候補から最適解を識別するための条件を提示する. 最後に, 近似最適消費・富比率と近似最適投資比率の近似精度の簡便評価を行い, 近似精度が総じて非常に高いことを確認する.

**キーワード:** 確率的最適化, 近似解析解, 金融, 再帰的効用, 最適制御, 十分条件

### 1. 序論

現代証券投資理論では, 効率的なポートフォリオを組成するため, 分散投資に加えて長期投資が推奨されている. Campbell and Viceira [8] は, 長期投資においては安全証券は短期債ではなく長期物価連動債であることを指摘し, 金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが, 同問題では, 一般に, HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式は非斉次偏微分方程式となり解析解の導出を困難にする.

他方, 従来消費と投資の問題で仮定されてきた CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 効用は, 消費者の異なる状態間の変動(危険)に対する回避度と異なる時点間の変動に対する回避度を分離できないという欠陥を抱えている. Epstein-Zin 効用(Epstein and Zin [11]) は, これらの変動に対する回避度を分離できるように CRRA 効用を一般化したものである.

Campbell and Viceira [8] は, 同書第 5 章で, 短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する消費と投資の最適化問題を消費者の Epstein-Zin 効用と Vasicek 金利モデルの下で確率制御により解いている. その結果, 最適解の導出は非斉次偏微分方程式の求解問題に帰着されている. 彼等は同方程式の非斉次項を Campbell [6] の提案した対数線形近似法を応用し, 近似解析解を導出している. 尚, Kogan and Uppal [13] は, CRRA 効用を持つ消費者が状態変数に金利を含む一般的資産に投資する消費と投資の最適化問題に対し漸近展開により近似解析解を導出しているが, Campbell and Viceira [8] は, 同近似解析解が彼等の導出した近似解析解の特殊な場合と解釈でき, しかも近似精度が低いことを指摘している. また, Campbell *et al.* [7] は, 消費・富比率が通常想定される範囲内では, 彼等の近似解析解の精度が高いことを示している.

楠田 [15] は, Campbell and Viceira [8] の導出した近似解析解が高次の一般解における低

次の候補解に過ぎないことを示した。最近になって、バトボルド・菊池・楠田 [4] は、証券投資の対象を短期債、全満期の物価連動債、株式指数等の主要指数に拡大したアフィン潜在ファクター証券市場モデルに一般化し、消費者の CRRA 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対し、高次の近似解析解を導出している。また、バトボルド他 [5] は、同アフィン潜在ファクター証券市場モデルにナイトの不確実性を導入し、消費者の「相似拡大的頑健効用」(Maenhout [17]) に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対し、高次の近似解析解を導出している。

本稿では、アフィン潜在ファクター証券市場モデルの下、消費者の Epstein-Zin 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題を考察する。

本稿の主要な結果は次の通りである。まず、消費と投資の最適化問題に対し、Campbell and Viceira [8], 楠田 [15] の近似法を用いて、高次の近似解析解を導出した。同近似解析解では、近似価値関数における未知係数群の従う代数方程式が導出されるが、同方程式では、解が一般に複数存在しており、これらの候補解から最適解を識別する必要がある。そこで、Agram and Øksendal [1] が示した前進・後退確率微分方程式の最適制御問題の最適解の十分条件を援用して、上記候補解の中から近似最適解を識別する条件を提示した。

次に、同近似解析解に基づく「危険証券」(非短期債)の近似最適投資は、将来の潜在ファクターの変化に伴う投資機会集合の変化を考慮しない第1項の近視眼的動機に基づく需要項(以下「近視眼的需要項」と、同変化に対し保険を掛ける第2項の保険的動機に基づく需要項(以下「保険需要項」)から成る。Campbell and Viceira [8] で導出されている最適投資では両項とも定数であったのに対し、本稿で導出された近似最適投資では、潜在ファクターの変化が、第2項の保険需要項では直接的に、第1項の近視眼的需要項ではリスクの市場価格の変化を通じて間接的に、最適投資に影響を与えることが示されている。これは、リスクの市場価格の変化に伴うリスク・プレミアムの変化に加え、将来の潜在ファクターの水準変化に伴う金利等の水準変化を考慮して、消費者が株式・中長期債投資への投資比率を調整することを意味しており、自然で合理的な投資行動である。

さらに、Campbell and Viceira [8] が Vasicek 金利モデルの下で示している通り、異時点間代替弾力性が1の場合には、偏微分方程式の非斉次項が対数関数で表されるので、対数線形近似を適用するまでもなく、厳密な解析解を得た。

最後に、近似最適消費・富比率と近似最適投資比率の近似精度の簡便評価をアフィン1ファクター証券市場モデルで行い、近似精度が総じて非常に高いことを確認した。

本稿の次節以降の構成は次の通りである。第2節では、アフィン潜在ファクター証券市場モデルと消費者の最適化問題を説明する。第3節で、HJB 方程式から導出される価値関数の偏微分方程式より近似解析解を導出する。第4節で、異時点間代替弾力性が1の場合の解析解を導出する。第5節で、最適解の十分条件を提示し、第6節で、近似最適消費・富比率と近似最適投資比率の近似精度の簡便評価を行う。

## 2. アフィン潜在ファクター証券市場モデルと消費者の最適化問題

本節では、まず、アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し、証券価格過程の従う確率微分方程式を示す。次に、消費者の最適消費・投資問題を示す。

### 2.1. 市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。消費者共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  によりモデル化されている。ここで、

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$  は  $N$  次元標準ブラウン運動  $B$  によって生成される自然なフィルター付けである。確率測度  $P$  の下での期待値作用素を  $E$ ,  $\mathcal{F}_t$  の下での期待値作用素を  $E_t$  と表記する。

市場では, 1 種類の消費財, 短期債 (以下, 適宜「短期安全証券」と呼ぶ), 「中長期安全証券」としての満期までの期間が最長  $\tau$ , 額面が 1 単位の消費財, 任意の満期の信用リスクの無い割引物価連動債 (以下, 「物価連動債」と呼ぶ),  $J$  種類の非債券の主要指数 (株式指数, REIT 指数等) が任意の時点で取引されている。

以下では, 消費財を価値基準財とし, 諸証券の価格を実質価格で表示する。短期債の実質価格を  $P_t$ , 満期  $T$  の物価連動債の実質価格を  $P_t^T$ , 非債券の主要指数の配当込みの実質価格を  $S_t^j$  と表記する。また,  $A$  の転置を  $A'$  と表記する。消費財空間は非負値可測過程の空間とする。

本稿では, 一般性の高い, アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する。

仮定 1.  $N$  次元潜在ファクター  $X_t$  は次の確率過程に従う。

$$dX_t = K(\theta - X_t) dt + \Sigma dB_t, \quad (2.1)$$

ここで,  $\theta$  は  $N$  次元定数ベクトル,  $K, \Sigma$  は  $N \times N$  定数行列である。また,  $K$  は次のように対角化可能な正値対称行列である。

$$L = Q^{-1}KQ = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N \end{pmatrix},$$

ここで,  $l_1, l_2, \dots, l_N > 0$  であることに留意。

物価連動債 (金利の期間構造) については, 潜在ファクター  $X_t$  のアフィン・モデル (Duffie and Kan [10]) を仮定し, 非債券の主要指数については, Mamaysky [18] の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する。

仮定 2. 1. リスクの市場価格  $\Lambda_t$ , 瞬間的実質スポット・レート  $r_t$  は, 潜在ファクター  $X_t$  のアフィン関数である。

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda X_t, \quad (2.2)$$

$$r_t = r_0 + r' X_t, \quad (2.3)$$

ここで,  $K + \Sigma \Lambda$  は正則である。

2. 非債券の主要指数の実質配当過程  $D_t^j$  は潜在ファクター  $X_t$  の次式で表される関数である。

$$D_t^j = (d_{0j} + d_j' X_t) \exp(b_{0j} t + b_j' X_t). \quad (2.4)$$

## 2.2. 証券価格過程

以下では, 物価連動債の満期までの期間を  $\tau = T - t$  と表記する。

補題 2.1. 仮定 1・2 の下, 諸証券の無裁定実質価格過程は次を満たしている。

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t dt, \quad P_0 = 1. \quad (2.5)$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = (r_t + b(\tau)' \Sigma \Lambda_t) dt + b(\tau)' \Sigma dB_t, \quad P_T^T = 1, \quad (2.6)$$

ここで、 $b(\tau)$  は次式で与えられている。

$$b(\tau) = (K + \Sigma\Lambda)^{\prime-1} (e^{-\tau(K+\Sigma\Lambda)'} - I_N)r, \quad (2.7)$$

ここで、 $I_N$  は  $N \times N$  単位行列である。

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = (r_t + b_j' \Sigma \Lambda_t) dt + b_j' \Sigma dB_t, \quad (2.8)$$

ここで、

$$b_j = (K + \Sigma\Lambda)^{\prime-1} (d_j - r). \quad (2.9)$$

証明. バトボルド他 [4] の補論 A.1 参照.  $\square$

### 2.3. 消費者の最適消費・投資問題

非債券の主要指数に対する投資比率を  $\Phi_t^j$  と表記する。また、物価連動債については、任意の満期の物価連動債を投資対象としているため、富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる。そこで、物価連動債の富に対する投資比率密度過程を  $\varphi_t(\tau)$  と表記する\*。以下では、次の記法を用いる。

$$\Psi_t = \Sigma' \left( \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) b(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \Phi_t^j b_j \right). \quad (2.10)$$

以下、 $\Psi_t$  を適宜「投資」と略称する。また、 $u_t = (c_t, \Psi_t)$  と表記する。このとき、予算制約式が次の補題で示される。

**補題 2.2.** 投資過程  $\Psi_t$  と消費過程  $c_t$  を所与とする。このとき、仮定 1・2 の下、富過程  $W_t^u$  は次の予算制約式を満たす。

$$dW_t^u = \{W_t^u (r_t + \Psi_t' \Lambda_t) - c_t\} dt + W_t^u \Psi_t' dB_t. \quad (2.11)$$

証明. 補論 A.1 参照.  $\square$

予算制約式 (2.11) は、富過程が  $u_t = (c_t, \Psi_t)$  で決定されることを示しており、消費者の効用最大化問題における制御過程は  $u_t = (c_t, \Psi_t)$  であることが分かる。

従来、標準的効用として仮定されてきた CRRA 効用は、異時点間代替弾力性の逆数である異時点間消費の変動に対する回避度（本稿では、「相対的異時点間変動回避度」と呼ぶ）が相対的危険回避度と等しいことを仮定している。本稿では、CRRA 効用を拡張し、相対的危険回避度と相対的異時点間変動回避度を分離した Epstein-Zin 効用（Epstein and Zin [11]）を仮定する。尚、Epstein-Zin 効用自体は離散時間で定義されているので、本稿では、Duffie and Epstein [9] による同効用の連続時間版の表現を採用する。

**仮定 3.** 消費者は次式で再帰的に定義される Epstein-Zin 効用汎関数  $U_0(c)$  を予算制約式 (2.11) の下で最大化する。

$$U_t(c) = E_t \left[ \int_t^\infty f(c_s, U_s(c)) ds \right], \quad \forall t \geq 0, \quad (2.12)$$

\*或る特定の満期の物価連動債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため、許容される関数  $\varphi$  の空間は超関数を含む関数空間とする。

ここで,

$$f(c_s, U_s) = \begin{cases} \frac{\beta}{1-\zeta}(1-\gamma)U_s \left\{ \left( \frac{c_s}{((1-\gamma)U_s)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\}, & \text{if } \zeta \neq 1, \\ \beta(1-\gamma)U_s \left\{ \log c_s - \frac{1}{1-\gamma} \log((1-\gamma)U_s) \right\}, & \text{if } \zeta = 1, \end{cases} \quad (2.13)$$

ここで,  $\gamma$  は相対的危険回避度,  $\zeta$  は相対的異時点間変動回避度 (異時点間代替弾力性の逆数) である. 先行実証研究の結果を踏まえて,  $\gamma > 1$ ,  $\zeta > 0$  と仮定する.

状態過程を  $\mathbb{X}_t^u = (W_t^u, X_t^u)'$  と表記する. また, 予算制約式 (2.11) を満たす制御過程  $u_t = (c_t, \Psi_t)$  を初期状態  $\mathbb{X}_0 = (W_0, X_0)'$  に対する許容的制御と呼び, 許容的制御の集合を  $\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)$  と表記する. このとき, 富を含む状態変数を変数とする「広義の間接効用汎関数」 $J$  が次式で再帰的に定義される.

$$J(\mathbb{X}_t^u) = \mathbb{E}_t \left[ \int_t^\infty f(c_s, J(\mathbb{X}_s^u)) ds \right], \quad \forall t \geq 0. \quad (2.14)$$

本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数  $V(\mathbb{X}_0)$  が次式で定義される.

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} J(\mathbb{X}_0). \quad (2.15)$$

### 3. 一般の Epstein-Zin 効用に対する近似解析解

本節では, 一般の Epstein-Zin 効用に対し, HJB 方程式から推測された価値関数を構成する未知関数  $G(X_t)$  の偏微分方程式を導出した後, 同方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [8], 楠田 [15] の技法で近似して, 近似解析解を導出する.

#### 3.1. 価値関数の偏微分方程式の導出

HJB 方程式は次式のように表される.

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \left\{ \begin{pmatrix} W_t^u (r_t + \Psi_t' \Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_W(\mathbb{X}_t^u) \\ J_X(\mathbb{X}_t^u) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} W_t^u \Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t^u \Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_{WW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{WX}(\mathbb{X}_t^u) \\ J_{XW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{XX}(\mathbb{X}_t^u) \end{pmatrix} \right] \right. \\ \left. + \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} J(\mathbb{X}_t^u) \left\{ \left( \frac{c_t}{((1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u))^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\} \right\} = 0, \quad (3.1) \\ \text{s.t. } \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-\nu T} |J(\mathbb{X}_T^u)|] = 0, \end{aligned}$$

ここで,  $\nu$  は或る正の定数である.

HJB 方程式左辺の最大化の必要条件から最適制御  $u^* = (c^*, \Psi^*)$  は次式を満たしている.

$$c_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}} V_W^{-\frac{1}{\zeta}} \left\{ ((1-\gamma)V)^{-\frac{\gamma-\zeta}{(1-\gamma)\zeta}} \right\}, \quad (3.2)$$

$$\Psi_t^* = \frac{\pi_t}{W_t^{*2} V_{WW}}, \quad (3.3)$$

ここで,  $W_t^*$  は  $W_t^{u^*}$  を簡略表記したものであり,

$$\pi_t = -W_t^* \{V_W \Lambda_t + \Sigma' V_{XW}\}. \quad (3.4)$$

最適消費 (3.2) 式と最適投資 (3.3) 式を HJB 方程式 (3.1) に代入し, (3.3) 式から導かれる次式,

$$W_t^* V_W \Lambda_t' \Psi_t^* + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} W_t^* (\Psi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t^* (\Psi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\pi_t' \pi_t}{2W_t^{*2} V_{WW}}, \quad (3.5)$$

に注意して整理すると, 次の価値関数  $V$  に関する偏微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\pi_t' \pi_t}{2W_t^{*2} V_{WW}} + W_t^* r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X \\ - c_t^* V_W + \frac{\beta}{1-\zeta} (c_t^*)^{1-\zeta} ((1-\gamma)V)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} - \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} V = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

上記偏微分方程式から価値関数は, 状態変数  $X_t$  の未知関数  $G(X_t)$  を用いて次の関数形で表されると推測される.

$$V(X_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} (G(X_t))^{\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}}. \quad (3.7)$$

従って, HJB 方程式左辺の最大化の十分条件が満たされることは, 次式で表される Hessian  $\mathbf{H}_{\text{HJB}}$  が任意の制御変数  $(c, \Psi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$  に対し負定符号であることで確認できる.

$$\mathbf{H}_{\text{HJB}} = \begin{pmatrix} -\beta\zeta((1-\gamma)V)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} c^{-\zeta-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma(W_t^*)^{-\gamma} (G(X_t))^{\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma(W_t^*)^{-\gamma} (G(X_t))^{\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

価値関数  $V$  に偏微分を施し, (3.2)(3.3) 両式に代入し, 価値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.6) に代入すると, 次の命題を得る.

**命題 3.1.** 仮定 1-3 の下, 本問題 (2.15) の価値関数, 最適消費, 最適投資は, それぞれ (3.7) 式, (3.9) 式, (3.10) 式で表される. ここで,  $G(X_t)$  は偏微分方程式 (3.11) の解である.

$$c_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}} \frac{W_t^*}{G}, \quad (3.9)$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma} \Lambda_t + \frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)} \Sigma' \frac{G_X}{G}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] - \frac{\gamma-\zeta}{2(1-\zeta)} \frac{G'_X}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} + \{\gamma K(\theta - X_t) + (1-\gamma)\Sigma \Lambda_t\}' \frac{G_X}{G} \\ + \frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}} \gamma}{G} + \frac{1-\zeta}{2\zeta} \Lambda_t' \Lambda_t + \frac{\gamma(1-\zeta)}{\zeta} r_t - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

証明. 補論 A.2 参照. □

### 3.2. 偏微分方程式の解析解導出の困難

偏微分方程式 (3.11) は、第 2 項に非線形項、第 4 項に非斉次項を含んでおり、解析解の導出を困難にしている。効用汎関数が CRRA 効用 ( $\gamma = \zeta$ ) の場合、第 2 項は存在せず、偏微分方程式は次の線形偏微分方程式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tr} \left[ \Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] + \{ \gamma K(\theta - X_t) + (1 - \gamma) \Sigma \Lambda_t \}' \frac{G_X}{G} \\ + \frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}} \gamma}{G} + \frac{1 - \zeta}{2\zeta} \Lambda_t' \Lambda_t + \frac{\gamma(1 - \zeta)}{\zeta} r_t - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

上記偏微分方程式の解法として、Liu [16] は、次の偏微分方程式の初期値問題の解析解が導出できることに着目した。

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau, x) + \mathcal{L}F(\tau, x) = 0, \quad F(0, x) = 1. \quad (3.13)$$

ここで、 $\mathcal{L}$  は次式で定義される線形微分作用素である。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}F = \frac{1}{\beta^{\frac{1}{\zeta}} \gamma} \left\{ \frac{\gamma}{2} \operatorname{tr} [\Sigma \Sigma' F_{XX}] + \{ \gamma K(\theta - X_t) + (1 - \gamma) \Sigma \Lambda_t \}' F_X \right. \\ \left. + \left( \frac{1 - \zeta}{2\zeta} \Lambda_t' \Lambda_t + \frac{\gamma(1 - \zeta)}{\zeta} r_t - \frac{\beta\gamma}{\zeta} \right) F \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

偏微分方程式 (3.13) の解は、

$$F(\tau, x) = \exp \left( a_0(\tau) + a(\tau)'x + \frac{1}{2}x'A(\tau)x \right), \quad (3.15)$$

と表現でき、係数体系  $(a_0(\tau), a(\tau), A(\tau))$  は (3.15) 式を (3.13) 式に代入した後に現れる  $x$  に関する恒等式から導かれる、初期条件  $(a_0(0), a(0), A(0)) = (0, 0, 0)$  を持つ常微分方程式の解となる。

Kraft, Seifried, and Steffensen [14] は、偏微分方程式 (3.13) の解  $F$  が次式右辺の意味で可積分であれば、微分作用素  $\mathcal{L}$  の線形性により、偏微分方程式 (3.12) の解は次式で表現できることを示している。

$$G(x) = \int_0^\infty F(\tau, x) d\tau. \quad (3.16)$$

以上の議論より、効用汎関数が CRRA 効用 ( $\gamma = \zeta$ ) の場合は Liu [16], Kraft *et al.* [14] の解析解構成法の適用可能性が検討されるべきである。しかし、効用汎関数が一般の Epstein-Zin 効用の場合に導出される非線形偏微分方程式 (3.11) に、同様に微分作用素を定義しても、非線形項の存在により非線形となるため、Liu [16], Kraft *et al.* [14] の解析解構成法は適用できない。

### 3.3. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

一方、偏微分方程式 (3.11) の数値解法についても、3 変数以上の高次元の場合、有限差分法等の数値解法を適用することは難しい。そこで本稿では、近似解析解の導出を検討する。

近似解析解導出法として、Campbell and Viceira [8] が、消費と 2 証券投資の最適化問題で常微分方程式の近似解析解を導出する際に適用した非斉次項の対数線形近似法に我々は着

目した。彼等は、(3.9) 式より、非斉次項  $\beta^{1/\zeta}/G(X_t)$  が消費・富比率  $c_t^*/W_t^*$  と等しく、同比率が安定的であることに着目し、 $1/G(X_t)$  を  $E[\log\{(\beta^{-1/\zeta}c_t^*)/W_t^*\}]$  の周りで対数線形近似している。但し、この場合、 $E[\log\{(\beta^{-1/\zeta}c_t^*)/W_t^*\}]$  は時間変数に依存する。そこで、楠田 [15] は一定値をとる  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\log\{(\beta^{-1/\zeta}c_t^*)/W_t^*\}]$  の周りで対数線形近似を行っている。本稿も楠田 [15] に従って非斉次項を次のように対数線形近似する。

$$\frac{1}{G(X_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t), \quad (3.17)$$

ここで、

$$g_0 = g_1(1 - \log g_1), \quad (3.18)$$

$$g_1 = \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} E\left[\log\left(\frac{\beta^{-1/\zeta}c_t^*}{W_t^*}\right)\right]\right). \quad (3.19)$$

偏微分方程式 (3.11) における非斉次項  $1/G$  を (3.17) 式で近似し、 $\Lambda_t$ ,  $r_t$  に、それぞれ (2.2) 式, (2.3) 式を代入すると、次の近似偏微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] - \frac{\gamma - \zeta}{2(1 - \zeta)} \frac{G'_X}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} + \{\gamma K(\theta - X_t) + (1 - \gamma)\Sigma(\lambda + \Lambda X_t)\}' \frac{G_X}{G} \\ & - \beta^{1/\zeta} \gamma g_1 \log G + \beta^{1/\zeta} \gamma g_0 + \frac{1 - \zeta}{2\zeta} (\lambda + \Lambda X_t)' (\lambda + \Lambda X_t) + \frac{\gamma(1 - \zeta)}{\zeta} (r_0 + r' X_t) - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

近似偏微分方程式 (3.20) の解が次式で表される  $X_t$  の 2 次形式の指数関数であることは容易に推測される。

$$G(X_t) = \exp\left(a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t\right). \quad (3.21)$$

ここで、 $A$  は一般性を失うことなく対称行列である。

このとき、

$$g_1 = \exp\left(-\lim_{t \rightarrow \infty} E[\log G(X_t)]\right) = \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left[-a_0 - a' E[X_t] - \frac{1}{2} E[X_t' A X_t]\right]\right), \quad (3.22)$$

は次の補題で計算される。

**補題 3.1.** 仮定 1-3 の下、 $g_1$  は  $(a_0, a, A)$  により次式で表される。

$$g_1 = \exp\left(-a_0 - a'\theta - \frac{1}{2} (\theta' A \theta + \text{tr} [(Q^{-1}\Sigma)' M Q^{-1}\Sigma])\right), \quad (3.23)$$

ここで、行列  $P$  の第  $(i, j)$  成分を  $P_{ij}$  と表記すると、

$$M_{ij} = \frac{1}{l_i + l_j} (Q' A Q)_{ij}.$$

証明. バトボルド他 [4] の補題 3 の証明参照。 □

## 3.4. 近似解析解

関数 (3.21) に偏微分を施し、偏微分方程式 (3.20) に代入し、 $g_0$  に (3.18) 式を代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' (aa' + A + aX_t' A + AX_t a' + AX_t X_t' A)] - \frac{\gamma - \zeta}{2(1 - \zeta)} (a' + X_t' A) \Sigma \Sigma' (a + AX_t) \\ & \quad + \{ \gamma K \theta + (1 - \gamma) \Sigma \lambda - (\gamma K - (1 - \gamma) \Sigma \Lambda) X_t \}' (a + AX_t) \\ & + \beta^{\frac{1}{\zeta}} \gamma g_1 (1 - \log g_1) - \beta^{\frac{1}{\zeta}} \gamma g_1 \left( a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) + \frac{1 - \zeta}{2\zeta} (\lambda' \lambda + 2\lambda' \Lambda X_t + X_t' \Lambda' \Lambda X_t) \\ & \quad + \frac{\gamma(1 - \zeta)}{\zeta} (r_0 + r' X_t) - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

上式は  $X_t$  に関する恒等式なので、次の  $(a_0, a, A)$  に関する代数方程式が導出される。

$$\frac{(1 - \gamma)\zeta}{2(1 - \zeta)} A \Sigma \Sigma' A - (\gamma K' - (1 - \gamma) \Lambda' \Sigma') A - \frac{1}{2} \beta^{\frac{1}{\zeta}} \gamma g_1 A + \frac{1 - \zeta}{2\zeta} \Lambda' \Lambda = 0, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \gamma)\zeta}{1 - \zeta} A \Sigma \Sigma' a + \gamma (AK\theta - K'a) + (1 - \gamma) (A \Sigma \lambda + \Lambda' \Sigma' a) \\ & \quad - \beta^{\frac{1}{\zeta}} \gamma g_1 a + \frac{1 - \zeta}{\zeta} \Lambda' \lambda + \frac{\gamma(1 - \zeta)}{\zeta} r = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \gamma)\zeta}{2(1 - \zeta)} a' \Sigma \Sigma' a + \frac{\gamma}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' A] + (\gamma K \theta + (1 - \gamma) \Sigma \lambda)' a \\ & \quad + \beta^{\frac{1}{\zeta}} \gamma g_1 (1 - a_0 - \log g_1) + \frac{1 - \zeta}{2\zeta} \lambda' \lambda + \frac{\gamma(1 - \zeta)}{\zeta} r_0 - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで、 $g_1$  は (3.23) 式で表されている。

上記価値関数を構成する未知関数が近似偏微分方程式 (3.20) の解として近似されている場合の価値関数、最適消費、最適投資をそれぞれ「近似価値関数」、「近似最適消費」、「近似最適投資」と呼び、 $\tilde{V}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*$  と表記する。このとき、次の命題を得る。

**命題 3.2.** 仮定 1-3 の下、本問題 (2.15) の近似価値関数、近似最適消費、近似最適投資は次を満たしている。

$$\tilde{V}(\tilde{X}_t^*) = \frac{\tilde{W}_t^{*1-\gamma}}{1-\gamma} \exp \left[ \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} \left( a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) \right], \quad (3.28)$$

$$\tilde{c}_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}} \exp \left[ - \left( a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) \right] \tilde{W}_t^*, \quad (3.29)$$

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma} (\lambda + \Lambda X_t) + \frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)} \Sigma' (a + AX_t). \quad (3.30)$$

ここで、 $(a_0, a, A)$  は代数方程式 (3.25)-(3.27) の解である。

**留意点 1.** 近似価値関数を構成する係数体系  $(a_0, a, A)$  の非線形代数方程式 (3.25)-(3.27) には一般に解が複数存在するので、これら複数の解は本問題の最適解の候補に過ぎない。これら複数の候補解から最適解を識別するための条件は第 5 節で示す。

**留意点 2.** 近似最適投資が満たす (3.30) 式は、将来の状態変数の変化を考慮しない近視眼的動機に基づく「危険証券」(非短期債)の需要を示す第 1 項と、同変化に保険を掛けるための保険的動機に基づく需要を示す第 2 項から成っているが、第 2 項の係数には相対的危険回避度  $\gamma$  と相対的異時点間変動回避度  $\zeta$  が明示的に現れている。両回避度が一致する CRRA 効用の場合、近似最適投資が満たす式は、(3.30) 式から

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma} (\lambda + \Lambda X_t) + \Sigma' (a + AX_t), \quad (3.31)$$

となり、保険的動機に基づく第 2 項の係数に両回避度は明示的に現れなくなる。但し、両回避度は  $(a, A)$  に陰伏的に含まれている。

標準ブラウン運動が  $N$  次元で、非債券の主要指数が  $J$  種類なので、物価連動債については、 $I (= N - J)$  群の投資対象を設定することにより、最適投資を決定できる。次に、典型的な 2 例を示す。

**例 1.** 消費者が物価連動債の満期までの期間を  $I$  群に区分し、各時点において各区分の投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する。説明の便宜上、 $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_I = \bar{\tau}$  と表記し、物価連動債の満期までの期間を  $(\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \dots, (\tau_{I-1}, \tau_I]$  に区分する。また、投資比率密度過程を  $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \dots, \varphi_t^I)$  とするほか、次のように記法を定める。

$$\Phi_{1t} = \begin{pmatrix} \Phi_{1t}^P \\ \Phi_{1t}^S \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^P \\ B_1^S \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

ここで、

$$\Phi_{1t}^P = \begin{pmatrix} \varphi_t^1(\tau_1 - \tau_0) \\ \varphi_t^2(\tau_2 - \tau_1) \\ \vdots \\ \varphi_t^I(\tau_I - \tau_{I-1}) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{1t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_1^P = \begin{pmatrix} (\tau_1 - \tau_0)^{-1} \int_{\tau_0}^{\tau_1} b(\tau)' d\tau \\ (\tau_2 - \tau_1)^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} b(\tau)' d\tau \\ \vdots \\ (\tau_I - \tau_{I-1})^{-1} \int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I} b(\tau)' d\tau \end{pmatrix}, \quad B_1^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_j' \end{pmatrix}.$$

このとき、(2.10) 式より、

$$\Psi_{1t}^* = \Sigma' B_1' \Phi_{1t}^*,$$

であることに注意すると、(3.30) 式より、危険証券 (非短期債) への近似最適投資比率  $\tilde{\Phi}_{1t}^*$  は次式で表される。

$$\tilde{\Phi}_{1t}^* = \frac{1}{\gamma} (\Sigma' B_1')^{-1} (\lambda + \Lambda X_t) + \frac{(1 - \gamma)\zeta}{\gamma(1 - \zeta)} B_1'^{-1} (a + AX_t). \quad (3.33)$$

尚、短期安全証券 (短期債) の近似最適投資比率は  $1 - \sum_{i=1}^I \tilde{\varphi}_t^{*i} (\tau_i - \tau_{i-1}) - \sum_{j=1}^J \tilde{\Phi}_t^{*j}$  である。

**例 2.** 消費者が  $I$  種類の一定満期の物価連動債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する。投資対象とする物価連動債の満期を  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_I \leq \bar{\tau}$  とし、各満期の物価連動債の投資比率を  $\Phi_P^1, \Phi_P^2, \dots, \Phi_P^I$  とする。次のように記法を定める。

$$\Phi_{2t} = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^P \\ \Phi_{2t}^S \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_2^P \\ B_2^S \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

ここで,

$$\Phi_{2t}^P = \begin{pmatrix} \Phi_{Pt}^1 \\ \Phi_{Pt}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{Pt}^I \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_2^P = \begin{pmatrix} b(\tau_1)' \\ b(\tau_2)' \\ \vdots \\ b(\tau_I)' \end{pmatrix}, \quad B_2^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_j' \end{pmatrix}.$$

このとき, (3.30) 式より, 危険証券の近似最適投資比率  $\tilde{\Phi}_{2t}^*$  は次式で表される.

$$\tilde{\Phi}_{2t}^* = \frac{1}{\gamma} (\Sigma' B_2')^{-1} (\lambda + \Lambda X_t) + \frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)} B_2'^{-1} (a + AX_t). \quad (3.35)$$

尚, 短期安全証券の近似最適投資比率は  $1 - \sum_{i=1}^I \tilde{\Phi}_{Pt}^{*i} - \sum_{j=1}^J \tilde{\Phi}_t^{*j}$  である.

#### 4. $\zeta = 1$ の場合の解析解

本節では, Epstein-Zin 効用において, 相対的異時点間変動回避度 (異時点間代替弾力性の逆数) が 1 の場合の解析解を導出する.

相対的異時点間変動回避度が 1 のとき, 本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数  $V(\mathbb{X}_0)$  が次式で定義される.

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \beta(1-\gamma) J(\mathbb{X}_t^u) \left\{ \log c_t - \frac{1}{1-\gamma} \log((1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)) \right\} dt \right]. \quad (4.1)$$

HJB 方程式は次式のように表される.

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \left\{ \begin{pmatrix} W_t(r_t + \Psi_t' \Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_W(\mathbb{X}_t^u) \\ J_X(\mathbb{X}_t^u) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} W_t \Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_{WW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{WX}(\mathbb{X}_t^u) \\ J_{XW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{XX}(\mathbb{X}_t^u) \end{pmatrix} \right] \right. \\ \left. + \beta(1-\gamma) J(\mathbb{X}_t^u) \left\{ \log c_t - \frac{1}{1-\gamma} \log((1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)) \right\} \right\} = 0, \quad (4.2)$$

$$\text{s.t.} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-\nu T} |J(\mathbb{X}_t^u)|] = 0,$$

ここで,  $\nu$  は或る正の定数である.

前節と同様に最適化を行うと, 価値関数は次式で推測され,

$$V(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} h(X_t), \quad (4.3)$$

次の命題を得る.

**命題 4.1.** 仮定 1-3 の下, 本問題 (4.1) の価値関数, 最適消費, 最適投資は, それぞれ (4.3) 式, (4.4) 式, (4.5) 式で表される. ここで,  $h(X_t)$  は偏微分方程式 (4.6) の解である.

$$\hat{c}_t = \beta \hat{W}_t, \quad (4.4)$$

$$\hat{\Psi}_t = \frac{1}{\gamma} \Lambda_t + \frac{1}{\gamma} \Sigma' \frac{h_X}{h}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \Sigma' \frac{h_{XX}}{h} \right] + \frac{1-\gamma}{2} \frac{h'_X}{h} \Sigma \Sigma' \frac{h_X}{h} + \left\{ \gamma K(\theta - X_t) + (1-\gamma) \Sigma \Lambda_t \right\}' \frac{h_X}{h} \\ & - \beta \gamma \log h + \left\{ \frac{1-\gamma}{2} \Lambda_t' \Lambda_t + \gamma(1-\gamma)(r_t + \beta(\log \beta - 1)) \right\} = 0. \quad (4.6) \end{aligned}$$

証明. 補論 A.3 参照. □

価値関数を構成する未知関数  $h$  の偏微分方程式 (4.6) は, 非斉次項が対数関数で表されており, 次の関数形の解析解が導出される.

$$h(X_t) = \exp \left( a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t \right), \quad (4.7)$$

ここで,  $A$  は一般性を失うことなく対称行列である.

次の命題を得る.

**命題 4.2.** 仮定 1-3 の下, 本問題 (4.1) の価値関数, 最適投資は次を満たしている.

$$V(\hat{X}_t) = \frac{\hat{W}_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp \left[ a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t \right], \quad (4.8)$$

$$\hat{\psi}_t = \frac{1}{\gamma} (\lambda + \Lambda X_t) + \frac{1}{\gamma} \Sigma' (a + AX_t), \quad (4.9)$$

ここで,  $(a_0, a, A)$  は代数方程式 (4.10)-(4.12) の解である.

$$\frac{1}{2}A\Sigma\Sigma'A - \left( \gamma K' - (1-\gamma)\Lambda'\Sigma' + \frac{\beta\gamma}{2} \right) A + \frac{1-\gamma}{2}\Lambda'\Lambda = 0, \quad (4.10)$$

$$A\Sigma\Sigma'a + \gamma(AK\theta - K'a) + (1-\gamma)(A\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma'a) - \beta\gamma a + (1-\gamma)\Lambda'\lambda + \gamma(1-\gamma)r = 0, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a'\Sigma\Sigma'a + \frac{\gamma}{2} \text{tr}[\Sigma\Sigma'A] + (\gamma K\theta + (1-\gamma)\Sigma\lambda)'a \\ - \beta\gamma a_0 + \frac{1-\gamma}{2}\Lambda'\lambda + \gamma(1-\gamma)r_0 - \beta(1-\log\beta)\gamma(1-\gamma) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

証明. 補論 A.4 参照. □

## 5. 最適解の十分条件

一般の Epstein-Zin 効用汎関数の場合の最適化問題において導かれた近似価値関数を構成する係数体系  $(a_0, a, A)$  は代数方程式 (3.25)-(3.27) の解であるが, 同解は一般に非最適解を含めて複数存在する. 本節では, Agram and Øksendal [1] が 1次元ブラウン運動に基づく確率過程の前進・後退確率微分方程式の無限時間最適制御で展開した理論を多次元ブラウン運動に基づく確率過程の場合に応用して最適解の十分条件を提示する.

### 5.1. 前進・後退確率微分方程式の最適制御による本問題の再定式化

本問題を Agram and Øksendal [1] において考察されている前進・後退確率微分方程式の無限時間最適制御問題の枠組みで再定式化するため, 先ず, 次の前進・後退確率微分方程式を考察する.

可測過程  $\mathbb{X}_t^u = (W_t^u, X_t^u)'$  の前進確率微分方程式:

$$d\mathbb{X}_t^u = \mu(\mathbb{X}_t^u, u_t) dt + \sigma(\mathbb{X}_t^u, u_t) dB_t, \quad \mathbb{X}_0^u = \mathbb{X}_0, \quad (5.1)$$

ここで,

$$\mu(\mathbb{X}_t^u, u_t) = \begin{pmatrix} W_t^u (r_t + \Psi_t' \Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t^u \{r_0 + \Psi_t' \lambda + (r' + \Psi_t' \Lambda) X_t\} - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\sigma(\mathbb{X}_t^u, u_t) = \begin{pmatrix} W_t^u \Psi_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}_0 = (W_0, X_0)'. \quad (5.3)$$

可測過程  $(z_t^u, Z_t^u)$  の後退確率微分方程式:

$$-dz_t^u = f(c_t, z_t^u)dt - Z_t^u dB_t, \quad \mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} e^{kt} (z_t^u)^2 + \int_0^\infty e^{kt} (Z_t^u)^2 dt \right] < \infty, \quad (5.4)$$

ここで,  $f$  は (2.13) 式で表されており,  $k$  は或る正の定数である.

(5.4) 式より,  $z_t^u$  は次式で表現される.

$$z_t^u = \mathbb{E}_t \left[ \int_t^T f(c_s, z_s^u) ds + z_T^u \right]. \quad (5.5)$$

このとき, 本最適化問題 (2.15) は次のように表現される.

$$z_0^* = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty f(c_t, z_t^u) dt \right]. \quad (5.6)$$

Hamiltonian を定義するための随伴過程  $(p_t, q_t, R_t)$  を次のように表記する.

$$q_t = \begin{pmatrix} q_t^W \\ q_t^X \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} R_t^W \\ R_t^X \end{pmatrix},$$

ここで,  $p_t$ ,  $q_t^W$  はスカラー,  $q_t^X$  は  $N \times 1$  ベクトル,  $R_t^W$  は  $1 \times N$  ベクトル,  $R_t^X$  は  $N \times N$  行列である.

このとき, Hamiltonian  $H$  は次式で定義される.

$$\begin{aligned} H(\mathbb{X}, z, Z, u, p, q, R) &= f(c, z)p + \mu(\mathbb{X}, u)'q + \text{tr}[\sigma(\mathbb{X}, u)'R] \\ &= \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} z \left\{ \left( \frac{c}{((1-\gamma)z)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\} p + \{W \{r_0 + \Psi' \lambda + (r' + \Psi' \Lambda) X\} - c\} q^W \\ &\quad + (K\theta - KX)'q^X + \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} W\Psi' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} R^W \\ R^X \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

## 5.2. 制御過程及び随伴過程の最適解

問題 (5.6) は次の随伴過程の前進・後退確率微分方程式に関連付けられる.

随伴前進確率微分方程式:

$$dp_t = H_z(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dt + H_Z(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dB_t, \quad p_0 = 1. \quad (5.8)$$

随伴後退確率微分方程式：

$$-dq_t = H_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dt - R_t dB_t, \quad \mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} e^{kt} q_t^2 + \int_0^\infty e^{kt} (R_t)^2 dt \right] < \infty, \quad (5.9)$$

ここで、 $k$  は或る正の定数である。

上記随伴前進・後退確率微分方程式に Hamiltonian (5.7) 式を代入して計算すると、次の前進・後退確率微分方程式（初期条件と横断条件は省略）を得る。

$$dp_t = f_z(c_t, z_t^u) p_t dt, \quad (5.10)$$

$$-dq_t = \left( \mu_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}_t^u, u_t) q_t + \sum_{n=1}^N \sigma_{\mathbb{X}}^n(\mathbb{X}_t^u, u_t) R_t^n \right) dt - R_t dB_t, \quad (5.11)$$

ここで、 $\sigma^n$ ,  $R_t^n$  は各行列の第  $n$  列を示しており、従って、 $\sigma_{\mathbb{X}}^n$  は  $N \times (N+1)$  行列である。

次の補題を得る。

**補題 5.1.** 仮定 1-3 の下、制御過程  $u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$  が HJB 方程式 (3.1) の解であり、対応する前進・後退確率微分方程式 (5.1)(5.4) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.8)(5.9) が一意の解  $(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$  を持つと仮定する。このとき、 $(z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$  は次で表される。

$$z_t^* = V(\mathbb{X}_t^*), \quad (5.12)$$

$$Z_t^* = \begin{pmatrix} V_W(\mathbb{X}_t^*) \\ V_X(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

$$p_t^* = \exp \left( \int_0^t \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} \left\{ -\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma} \left( \frac{c_s^*}{((1-\gamma)z_s^*)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\} ds \right), \quad (5.14)$$

$$q_t^* = p_t^* \begin{pmatrix} V_W(\mathbb{X}_t^*) \\ V_X(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

$$R_t^* = p_t^* \begin{pmatrix} V_{WW}(\mathbb{X}_t^*) & V_{WX}(\mathbb{X}_t^*) \\ V_{XW}(\mathbb{X}_t^*) & V_{XX}(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t^*(\Psi_t^*)' \\ \Sigma \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

また、次の条件付き最大値原理が成立する。

$$\mathbb{E}_t[H(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)] \geq \mathbb{E}_t[H(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, u_t, p_t^*, q_t^*, R_t^*)]. \quad (5.17)$$

証明. 補論 A.5 参照. □

### 5.3. 十分条件

Agram and Øksendal [1] の定理 3.1 は、 $u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$  が最適解であるための十分条件は、前進・後退確率微分方程式 (5.1)(5.4) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.8)(5.9) の解の一意的存在を保証する正則条件（横断条件及び成長条件）<sup>†</sup> 及び条件付き最大値原理の成立の下、関数  $(\mathbb{X}, z, Z, u) \rightarrow H(\mathbb{X}, z, Z, u, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$  が凹関数であることを示している。従って、

<sup>†</sup>本モデルにおける状態変数等は、このままでは正則条件を満たしていないので、正則条件を満たすように、ドリフト及び拡散係数は十分大きな定数以下であると仮定する。

補題 5.1 より,  $u^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$  が最適解であるための十分条件は, 次の Hessian  $\mathbf{H}$  が負定符号であることに帰着される.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & H_{WX} & 0 & 0 & 0 & H_{W\Psi} \\ H_{XW} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{X\Psi} \\ 0 & 0 & H_{zz} & 0 & H_{zc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{cz} & 0 & H_{cc} & 0 \\ H_{\Psi W} & H_{\Psi X} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

ここで,

$$\begin{aligned} H_{XW} &= p_t^* V_W(\mathbb{X}_t^*) (r + \Lambda' \Psi), \\ H_{zz} &= \beta(\gamma - \zeta) c^{1-\zeta} ((1 - \gamma) z)^{\frac{\gamma+\zeta-2}{1-\gamma}} p_t^*, \\ H_{cz} &= \beta(\gamma - \zeta) c^{-\zeta} ((1 - \gamma) z)^{-\frac{1-\zeta}{1-\gamma}} p_t^*, \\ H_{cc} &= -\beta \zeta c^{-\zeta-1} ((1 - \gamma) z)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} p_t^*, \\ H_{\Psi W} &= p_t^* \{ V_W(\mathbb{X}_t^*) (\lambda + \Lambda X) + W_t^* V_{WW}(\mathbb{X}_t^*) \Psi_t^* + \Sigma' V_{XW}(\mathbb{X}_t^*) \}, \\ H_{\Psi X} &= W p_t^* V_W(\mathbb{X}_t^*) \Lambda. \end{aligned}$$

上式群における価値関数  $V$  の偏微分を数値計算できる場合は, 最適解の十分条件は上記 Hessian  $\mathbf{H}$  が負定符号となることである. しかし, 第 3 節で議論したように, 偏微分方程式 (3.11) は, 3 変数以上の高次元の場合, 有限差分法等の数値解法を適用することは難しい. そこで, Hessian  $\mathbf{H}$  に現れる  $W_t^*, z_t^*, c_t^*, \Psi_t^*, V(\mathbb{X}_t^*)$  をそれぞれ近似式  $\tilde{W}_t^*, \tilde{z}_t^*, \tilde{c}_t^*, \tilde{\Psi}_t^*, \tilde{V}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)$  に置き換えると, 本問題の近似価値関数の最適性を検証するための近似 Hessian  $\tilde{\mathbf{H}}$  は次のように表される.

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{H}_{WX} & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{W\Psi} \\ \tilde{H}_{XW} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{X\Psi} \\ 0 & 0 & \tilde{H}_{zz} & 0 & \tilde{H}_{zc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{H}_{cz} & 0 & \tilde{H}_{cc} & 0 \\ \tilde{H}_{\Psi W} & \tilde{H}_{\Psi X} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{XW} &= \tilde{p}_t^* \tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) (r + \Lambda' \Psi), \\ \tilde{H}_{zz} &= \beta(\gamma - \zeta) c^{1-\zeta} ((1 - \gamma) z)^{\frac{\gamma+\zeta-2}{1-\gamma}} \tilde{p}_t^*, \\ \tilde{H}_{cz} &= \beta c^{-\zeta} ((1 - \gamma) z)^{-\frac{1-\zeta}{1-\gamma}} \tilde{p}_t^*, \\ \tilde{H}_{cc} &= -\beta \zeta c^{-\zeta-1} ((1 - \gamma) z)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} \tilde{p}_t^*, \\ \tilde{H}_{\Psi W} &= \tilde{p}_t^* \left\{ \tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) + \tilde{W}_t^* \tilde{V}_{WW}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) \tilde{\Psi}_t^* + \Sigma' \tilde{V}_{XW}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) \right\}, \\ \tilde{H}_{\Psi X} &= W \tilde{p}_t^* \tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) \Lambda, \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\tilde{V}_W(\tilde{X}_t) &= \tilde{W}_t^{*- \gamma} \exp \left[ \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} \left( a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t \right) \right], \\ \tilde{V}_{WW}(\tilde{X}_t) &= -\gamma\tilde{W}_t^{*- \gamma - 1} \exp \left[ \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} \left( a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t \right) \right], \\ \tilde{V}_{XW}(\tilde{X}_t) &= \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} \tilde{W}_t^{*- \gamma} \exp \left[ \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} \left( a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t \right) \right] (a + AX_t).\end{aligned}$$

従って、状態変数・制御変数空間の実用上適切な領域において偏微分方程式の対数線形近似の精度が十分に高く、それゆえ、近似価値関数 (3.28) 式の近似精度が十分に高いのであれば、代数方程式 (3.25)-(3.27) の複数候補解から最適解を識別するための条件として、近似 Hessian  $\tilde{H}$  が負定符号であることを利用できる。

上記条件を満たす候補解が複数存在した場合は、有り得べき幾つかの  $X_0$  に対し、 $\tilde{V}(X_0)$  を比較して最適解を見極めざるを得ない。

## 6. 近似最適投資比率の近似精度の簡便評価

本節では、対数線形近似法により導いた近似解析解に基づく近似最適消費・富比率と近似最適投資比率の近似精度を簡便に評価する。

### 6.1. 近似精度の本格的評価の困難

対数線形近似法により導いた近似解析解に基づく近似最適投資比率を厳密解に基づく最適投資比率と比較するためには、証券市場モデルのパラメータを推定した後、価値関数のパラメータの代数方程式を数値的に解いて近似最適投資比率を算出するほか、非斉次偏微分方程式を数値的に解いて厳密解に基づく最適投資比率を計算する必要がある<sup>‡</sup>。本稿で仮定された一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルの特定において、対象証券を株式指数、REIT 指数、短期物価連動債、長期物価連動債に限定した最小限の 3 ファクター・モデルの推定でさえも、Kalman フィルター推定やベイジアン推定といった計算負担の重い方法で推定しなければならない。また、厳密解に基づく最適投資比率を求めるためには、3 変数関数の非線形・非斉次偏微分方程式 (3.11) を数値的に解く必要がある。以上の点を考慮して、本稿では近似最適投資比率の近似精度の本格的評価は断念せざるを得なかった。同評価は独立した論文の課題として検証される価値があり、今後の研究課題としたい。

### 6.2. 証券市場モデルの特定と推定結果

本格的アフィン潜在ファクター証券市場モデルを推定することは困難なので、 $N = 1$ ,  $r_t = X_t$  と特定する。また、消費者は短期債と時価総額加重型株式指数のみに投資すると仮定する。すなわち、次の証券市場モデルを仮定する。

$$dr_t = K(\theta - r_t) dt + \Sigma dB_t, \quad (6.1)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t + b \Sigma \Lambda_t) dt + b \Sigma dB_t, \quad (6.2)$$

ここで、 $b > 0$ ,

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda r_t. \quad (6.3)$$

<sup>‡</sup>尚、第 4 節で示された相対的異時点間変動回避度  $\zeta = 1$  の厳密解が得られる場合は、最適投資比率と近似最適投資比率が一致するので、近似最適投資比率の近似精度の分析には利用できないことに留意されたい。

**留意点 3.** 上記証券市場モデルにおいては、 $b > 0$  と仮定されているほか、後述する実証により、 $\Lambda < 0$  と推定されている。従って、株式指数と短期金利が完全正相関となっているほか、株式指数とリスクの市場価格が完全負相関となっている。これらは明らかに現実の証券市場を過度に単純化しているが、1ファクター・モデルを簡便評価の対象とする以上、やむを得ないものである。因みに、株式指数と短期金利の完全正相関は、一般に、金利と完全負相関の関係にある債券価格と株価が負相関であることを踏まえて設定した仮定である。株式指数とリスクの市場価格の完全負相関は、Wachter [20] も同様の1ファクター証券市場モデル（但し、短期金利一定）において、Barberis [3] の研究を踏まえて仮定している。

米国の1990年10月末～2018年10月末の日次終値を対象に推定を行った。短期金利は財務省短期証券3カ月物、時価総額加重型株式指数はS&P500指数を用い、実質化は1991年～2018年の消費者物価指数のインフレ率で行った。

推定については、(6.1)式と(6.2)式をEuler離散化し、線形回帰モデルと見做し、各線形回帰モデルをOLSで推定する簡便推定を行った。推定結果は表1の通りである。

表 1: 証券市場モデルの係数体系の推定結果

係数	$K$	$\theta$	$\Sigma$	$\lambda$	$\Lambda$	$b$
推定値	0.140753	-0.00988256	0.00736040	0.506620	-2.00042	23.8609

このとき、リスクの市場価格は、

$$\Lambda_t = 0.506620 - 2.00042 r_t,$$

と実質短期金利の減少関数となっている。本モデルでは、株式指数のSharpe測度はリスクの市場価格なので、これは、株式指数のSharpe測度が金利水準が高くなるにつれて小さくなることを示している。

また、株式指数の期待収益率は、

$$r_t + b \Sigma \Lambda_t = 0.0889755 + 0.648675 r_t,$$

と実質短期金利の増加関数となっている。従って、ポートフォリオの期待収益率も実質短期金利の増加関数となるので、実質短期金利の上昇は所得増大効果を有する。

### 6.3. 近似解析解と厳密解の数値解の算出

Epstein-Zin 効用の係数体系については、Bansal and Yaron [2] が、Epstein-Zin 効用を有する代表的個人の下で導出されるC-CAPMの実証分析において、次のように設定している。すなわち、主観的割引率を $\beta = 0.002$ に、相対的危険回避度を、Mehra and Prescott [19] が合理的な上限は10近辺と議論していることを踏まえて、低水準の場合 $\gamma = 7.5$ 、高水準の場合 $\gamma = 10.0$ に設定している。また、相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）については、Hansen and Singleton [12] 等が1より低いと推定していることに基づき、 $\zeta = 0.67$ に設定している。そこで本稿でも、当面は、主観的割引率を $\beta = 0.002$ に、相対的危険回避度を、低水準の場合 $\gamma = 7.5$ 、高水準の場合 $\gamma = 10.0$ に、相対的異時点間変動回避度を $\zeta = 0.67$ に設定する。

状態変数である実質短期金利 $r_t$ については、推定対象期間中、概ね $-4.0\% \sim 3.0\%$ で推移していることから、初期値 $r_0$ を中心値 $-0.5\%$ に設定し、 $-4.0\% \sim 3.0\%$ の範囲を対象に近似解と厳密解を求めた。

まず、近似解析解については、関数  $G$  の係数  $(a_0, a, A)$  を代数方程式 (3.25)-(3.27) に代入して数値的に解いた。数値解法の手順は以下の通りである。予め、(3.23) 式の  $g_1$  が取り得る範囲を  $0 < g_{\min} \leq g_1 \leq g_{\max}$  と定めておく。ここで、 $g_{\min}$  は十分に小さく、 $g_{\max}$  は十分に大きな値に設定しておく。まず、十分大きな自然数  $n$  について  $\Delta_n = (g_{\max} - g_{\min})/n$  と置き、 $j = 1, \dots, n+1$  に対して  $g_{1,j} = g_{\min} + \Delta_n(j-1)$  とする。 $g_1 = g_{1,j}$  を (3.25) 式に代入すると、解  $A$  は最大で 2 個存在する。2 個存在する場合、それぞれの解を  $A_j^m$  ( $m = 1, 2$ ) と記す。次に、 $(g_1, A) = (g_{1,j}, A_j^m)$  を (3.26) 式に代入し、 $a$  について解くと、解  $a_j^m$  が得られる。さらに、(3.23) 式と  $(g_1, A, a) = (g_{1,j}, A_j^m, a_j^m)$  から  $a_{0,j}^m$  を計算し、 $(g_1, A, a, a_0) = (g_{1,j}, A_j^m, a_j^m, a_{0,j}^m)$  を (3.27) 式の左辺に代入し、得られる値が 0 と等しくなるか判定する。0 と等しくなった場合、 $(A, a, a_0) = (A_j^m, a_j^m, a_{0,j}^m)$  が代数方程式 (3.25)-(3.27) の解の一つである。(3.25) 式に  $g_1 = g_{1,j}$  を代入したときの  $A$  の解が 1 個存在する場合でも計算過程は上と同様である。全ての  $j$  に対して、上で示した計算過程を取るにより、複数の解の組が得られる可能性がある。

以上の数値解法を適用した結果、解は 1 組しか存在しなかったため、これを価値関数の近似解と見做した<sup>§</sup>。同近似解における  $G$  の係数体系は表 2 の通りである。

表 2: 価値関数の近似解における  $G$  の係数体系

$\gamma$	$a_0$	$a$	$A$
7.5	-4.58148	3.06441	0.989791
10.0	-4.85518	3.13700	0.736863

次に、厳密解については、

$$G_{XX} = Y_X = \Xi(G, Y),$$

と変形した上で、次の連立常微分方程式を 4 次の Runge-Kutta 法により数値的に解いた。

$$\begin{pmatrix} G_X \\ Y_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ \Xi(G, Y) \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

尚、本無限時間問題の最適化の結果導出された偏微分方程式 (3.11) は、有限時間問題の場合には課される境界条件が与えられていない。そこで、上記連立常微分方程式を数値的に解く際、初期値として  $G(r_0), Y(r_0) = G_X(r_0)$  の値が必要となるので、近似偏微分方程式 (3.20) の解形式である (3.21) 式から計算される次の値、

$$G(r_0) = \exp\left(a_0 + ar_0 + \frac{1}{2}Ar_0^2\right), \quad (6.5)$$

$$Y(r_0) = (a + Ar_0)G(r_0), \quad (6.6)$$

を用いることにした。

#### 6.4. 現実の投資比率と整合的な Epstein-Zin 効用の係数体系

まず、厳密解に基づく株式指数の最適投資比率は図 1、図 2 の通りである。

低中金利水準（-4%~2%程度）では、金利上昇に伴う Sharpe 測度の低下につれて、近視眼的需要項が正值で緩やかに減少していることから、投資比率は緩やかに右肩下がりであ

<sup>§</sup>同解が 2 組以上存在する場合は、第 5 節で示した十分条件で近似解を判定することになる。

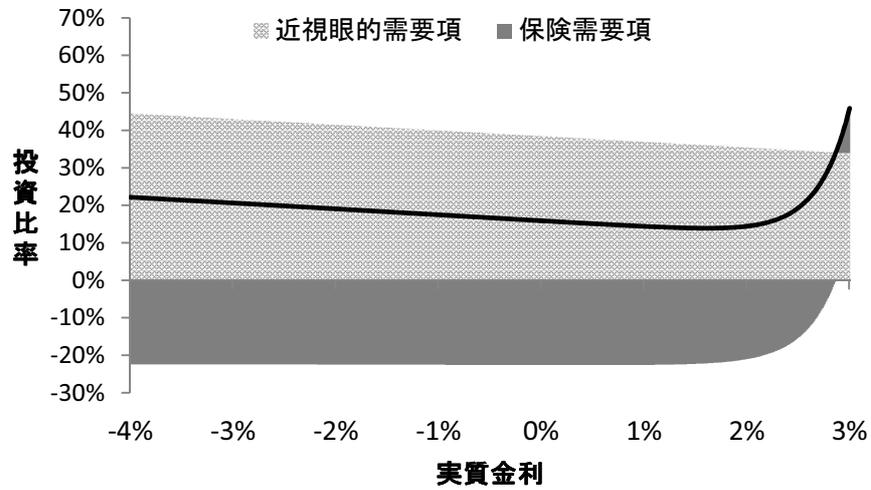


図 1:  $(\gamma, \zeta) = (7.5, 0.67)$  の場合の厳密解に基づく株式指数の最適投資比率

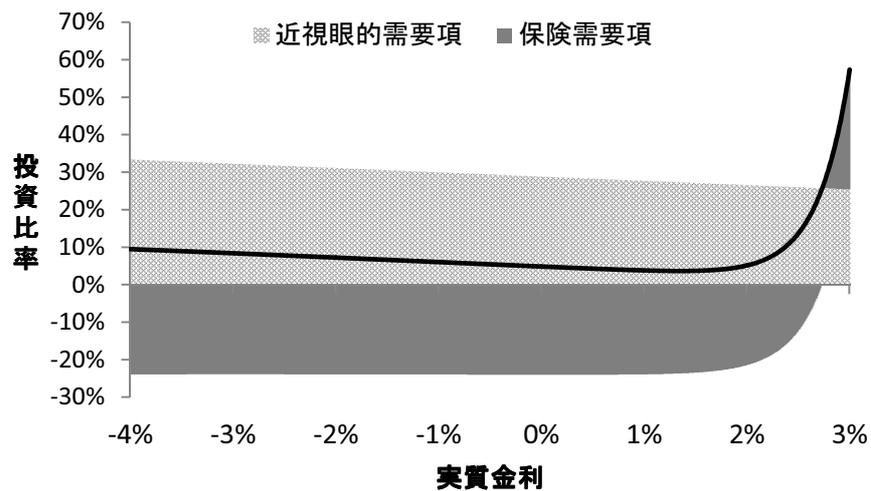


図 2:  $(\gamma, \zeta) = (10.0, 0.67)$  の場合の厳密解に基づく株式指数の最適投資比率

る。しかし、高金利水準では、金利上昇につれて、近視眼的需要項が引続き緩やかに減少しているのに対し、保険需要項が急増していることから、投資比率は急激な右肩上がりになっている。

投資比率の保険需要項に現れる影響は複雑であり、今後の比較静学分析・実証分析が待たれるが、高金利水準において、Sharpe 測度の低下に伴う近視眼的需要項の減少の効果を保険需要項の変化の効果が大きく上回り、その結果、投資比率が急激な右肩上がりになっていることは、経済学的に解釈し難い。また、緩やかな右肩下がりとなっている低中金利水準においても、投資比率の水準が、現実に観察される投資水準に比べ低水準に止まっている。

そこで、適切な投資比率の水準と高金利水準での挙動を同時に表現できる Epstein-Zin 効用の係数体系を模索した。  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$  の場合、上記数値計算における代数方程式 (3.25)-(3.27) の解は 1 組となり、同解をもとに厳密投資比率を計算すると、その水準は尤もらしく、高金利水準での右肩上がりも合理的な範囲内に収まる結果を得た (図 3 参照)。

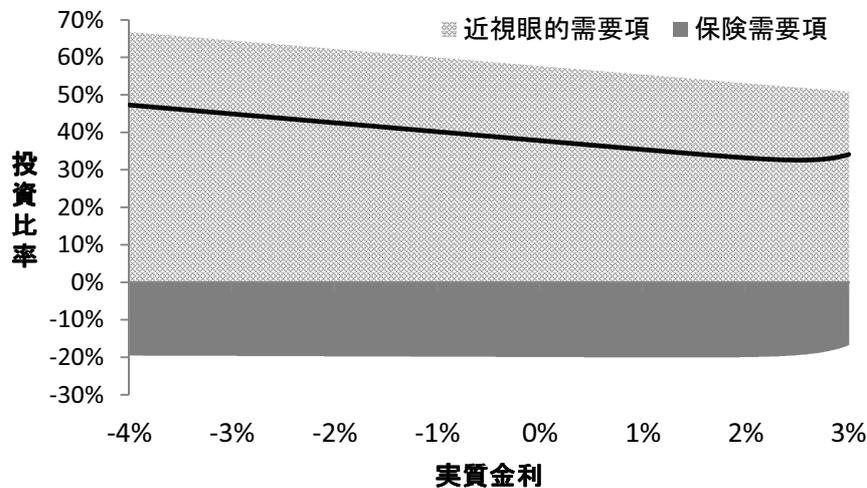


図 3:  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$  の場合の厳密解に基づく株式指数の最適投資比率

### 6.5. 近似消費・富比率と近似投資比率の近似精度

近似最適消費・富比率と近似最適投資比率の近似精度を現実の投資比率と統合的な Epstein-Zin 効用である  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$  の場合と、相対的異時点間変動回避度が 1 を上回る  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$  の場合で分析する。

尚、最適消費・富比率は、(3.9) 式より、

$$\frac{c_t^*}{W_t^*} = \frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}}}{G}, \quad (6.7)$$

であり、 $G$  の減少関数となっていること、最適投資  $\Psi_t^*$  は、(3.10) 式より、

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma} \Lambda_t + \frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)} \Sigma \frac{d}{dr} \log G, \quad (6.8)$$

と表されることに留意せよ。また、以下では、 $G$  の近似関数を  $\tilde{G}$  と表記する。

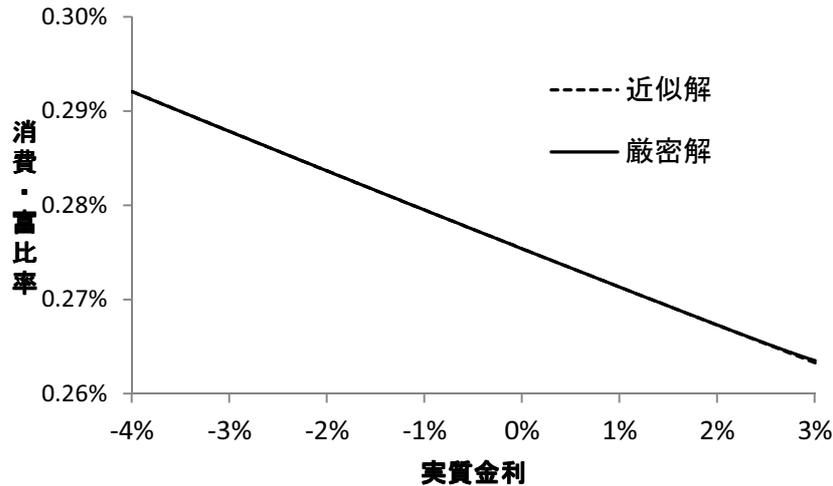


図 4:  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$  の場合の近似最適消費・富比率の近似精度

### 6.5.1. $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$ の場合

先ず、上記数値解法を適用した結果、代数方程式 (3.25)-(3.27) の解は 1 組であったので、同解に基づいて、近似解と厳密解を得た。同近似解と同厳密解を最適消費・富比率で比較した (図 4 参照)。

厳密解に基づく最適消費・富比率は、直観的に妥当な水準である。また、同比率は実質金利の上昇に伴い低下している。これについては、本モデルでは実質金利の上昇がポートフォリオの期待収益率を向上させる所得増大効果を有しているが、相対的異時点間変動回避度が 1 より小さいため、代替効果が所得効果を上回る結果である、と解釈できる。尚、最適消費・富比率は  $G$  の減少関数であったので、最適消費・富比率が実質金利の減少関数であることは、 $G_r > 0$  を意味していることに留意せよ。

そして、近似解と厳密解を比較すると、殆ど一致しており、近似精度は非常に高い。これは  $G$  の近似精度が非常に高いことを示している。ただ、実質金利が高金利水準 (約 2%) に達すると、近似消費・富比率は厳密消費・富比率に対し僅かに下方に乖離している (図 5 参照)。これは  $G$  の近似関数の導関数  $\tilde{G}_r$  が高金利水準では厳密値  $G_r$  に対し上方に乖離していること ( $\tilde{G}_r > G_r > 0$ ) を示している。

次に、近似解と厳密解を株式指数の最適投資比率で比較した (図 6 参照)。

実質金利が高金利水準 (約 2%) に達するまでは、近似投資比率は厳密投資比率と殆ど一致しているが、同水準を超えると、厳密投資比率に対する下方乖離が生じている。 $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$  の場合、(6.8) 式において、

$$\frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)}\Sigma < 0,$$

であることを考慮すると、高金利水準における近似値  $\tilde{G}_r$  の厳密値  $G_r$  に対する上方乖離 ( $\tilde{G}_r > G_r > 0$ ) が近似投資比率の厳密投資比率に対する下方乖離をもたらしているのである。ただ、同乖離は限定的であり、近似精度は総じて非常に高いと評価できる。また、かかる乖離が安定的なものであれば、同乖離を補正する運用により対処できる。

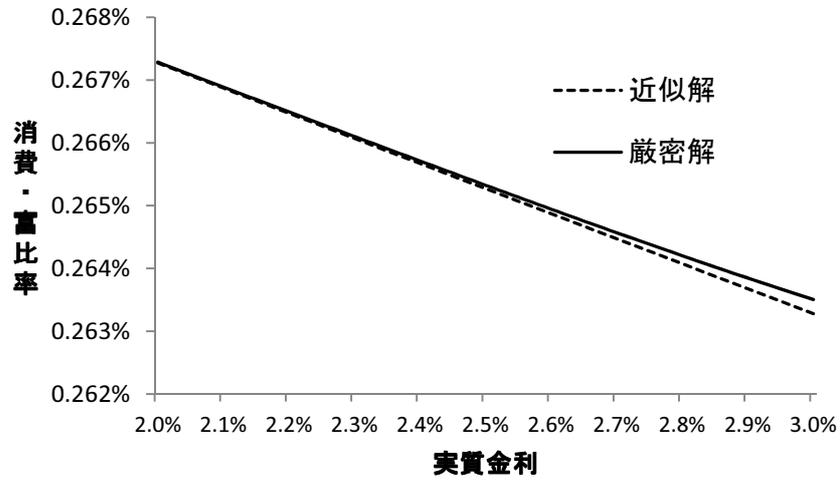


図 5:  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$  の場合の高金利水準における近似最適消費・富比率の近似精度

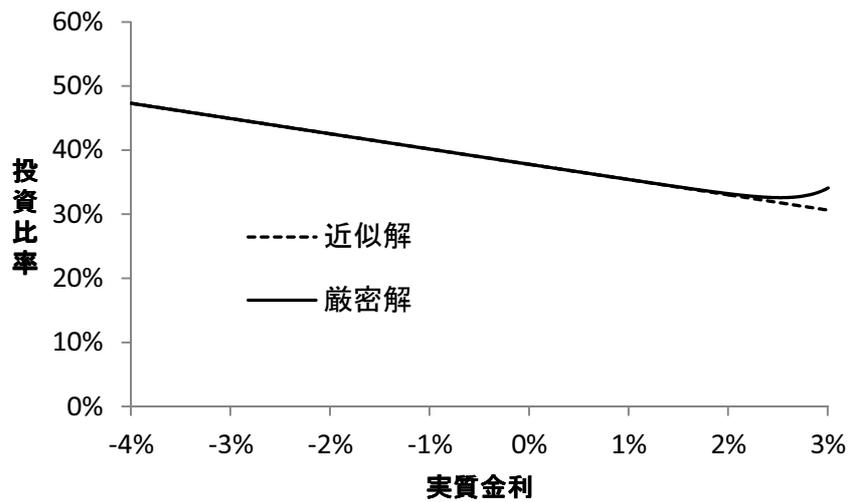


図 6:  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$  の場合の近似最適投資比率の近似精度

### 6.5.2. $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$ の場合

現実の投資比率と整合的な例として取り上げた  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 0.80)$  の場合の近似解の近似精度については、消費・富比率は非常に高く、投資比率も総じて非常に高かった。上記効用は、異時点間代替弾力性（相対的異時点間変動回避度の逆数）が1を上回り、代替効果が所得効果を上回る場合であるが、最後に、異時点間代替弾力性が1を下回り、代替効果が所得効果を下回る場合にも、近似解の精度が維持されるか否かを  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$  の場合で検証する。

まず、上記数値解法を適用した結果、代数方程式 (3.25)-(3.27) の解は1組であったので、同解に基づいて、近似解と厳密解を得た。同近似解と同厳密解を最適消費・富比率で比較した（図7参照）。厳密解に基づく最適消費・富比率は、 $\zeta = 0.80$  の場合に比べ50%程度の水

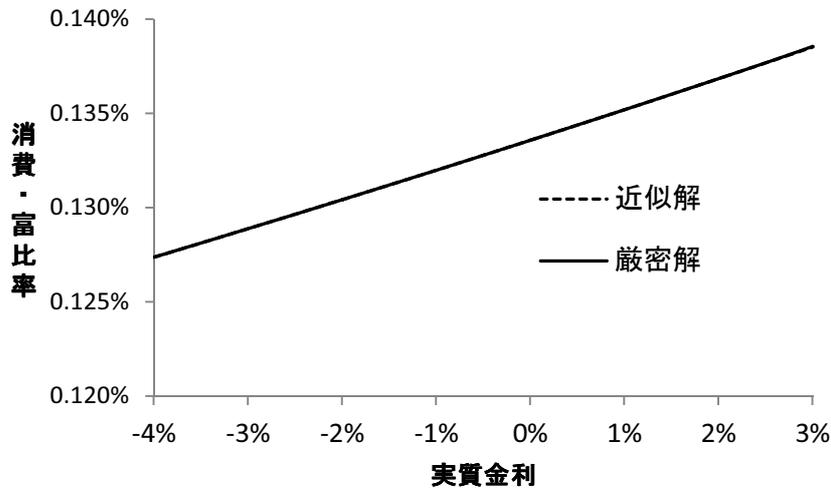


図 7:  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$  の場合の近似最適消費・富比率の近似精度

準に低下している。これは、相対的異時点間変動回避度が高いため、実質金利の変動に伴う富収益率の変動を消費変動に影響させないように、富収益率の水準を高めようとする動機に基づいていると解釈できる。実際、実質金利の変動（-4.0%~3.0%）に対する消費・富比率の変動幅は、 $\zeta = 0.80$  の場合は約0.03%であったのに対し、 $\zeta = 1.25$  の場合は約0.01%に止まっている。

また、 $\zeta = 0.80$  の場合とは逆に、実質金利の上昇に伴い消費・富比率は上昇しているが、これは、相対的異時点間変動回避度が1より大きく、所得効果が代替効果を上回っていることに起因していると解釈できる。尚、最適消費・富比率は  $G$  の減少関数であったので、最適消費・富比率が実質金利の増加関数であることは、 $G_r < 0$  を意味していることに留意せよ。

そして、近似解と厳密解を比較すると、殆ど一致しており、近似精度は非常に高い。ただ、実質金利が高金利水準（約2%）に達すると、近似消費・富比率は厳密消費・富比率に対し非常に僅かながら下方に乖離している（図8参照）。

これは近似値  $\tilde{G}_r$  が高金利水準では厳密値  $G_r$  に対し上方に僅かながら乖離していること ( $G_r < \tilde{G}_r < 0$ ) を示している。

次に、近似解析解と厳密解を株式指数の最適投資比率で比較した（図9参照）。実質金利が高金利水準（約2%）に達するまでは、近似投資比率は厳密投資比率と殆ど一致しているが、同水準を超えると、厳密投資比率に対する上方乖離が僅かながら生じている。 $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$

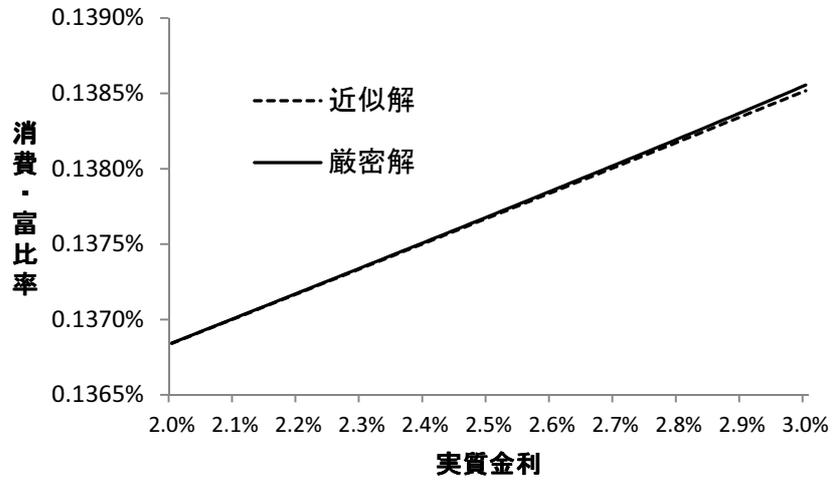


図 8:  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$  の場合の高金利水準における近似最適消費・富比率の近似精度

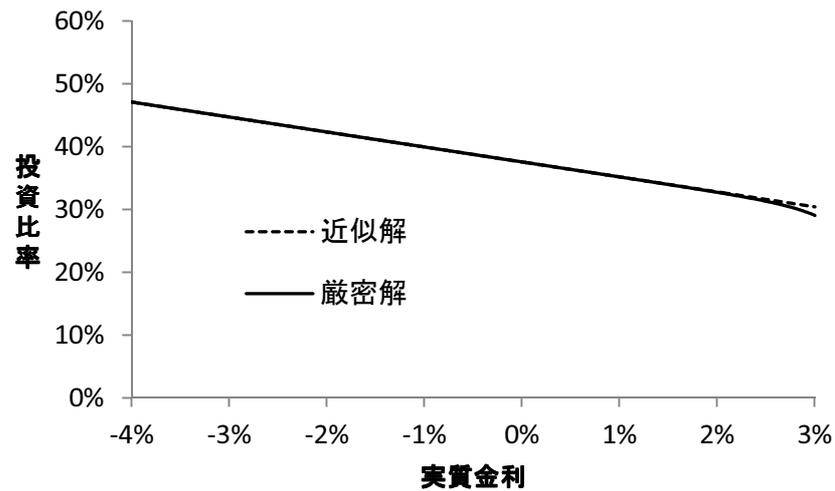


図 9:  $(\gamma, \zeta) = (5.0, 1.25)$  の場合の近似最適投資比率の近似精度

の場合, (6.8) 式において,

$$\frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)}\Sigma > 0,$$

であることを考慮すると, 高金利水準における近似値  $\tilde{G}_r$  の厳密値  $G_r$  に対する上方乖離 ( $G_r < \tilde{G}_r < 0$ ) が近似投資比率の厳密投資比率に対する上方乖離をもたらしているのである. ただ, 同乖離は非常に限定的であり, 近似精度は非常に高いと評価できる.

## 謝辞

有益なコメントを頂いた査読者2名, 審査の編集をされた編集委員長, 担当編集委員に感謝申し上げます. また, 著者の一人である楠田は日本学術振興会より科学研究費補助金基盤研究(C)No.26380392の助成を受けたことに感謝申し上げます.

## 参考文献

- [1] N. Agram and B. Øksendal: Infinite horizon optimal control of forward-backward stochastic differential equations with delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **259** (2014), 336–349.
- [2] R. Bansal and A. Yaron: Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles. *The Journal of Finance*, **59** (2004), 1481–1509.
- [3] N. Barberis: Investing for the long run when returns are predictable. *The Journal of Finance*, **55** (2000), 225–264.
- [4] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-60, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018).
- [5] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 相似拡大的頑健効用消費者の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-61, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018). 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌近刊.
- [6] J. Campbell: Intertemporal asset pricing without consumption data. *The American Economic Review*, **83** (1993), 487–512.
- [7] J. Campbell, J. Cocco, F. Gomes, P. Maenhout, and L. Viceira: Stock market mean reversion and the optimal equity allocation of a long-lived investor. *Review of Finance*, **5** (2001), 269–292.
- [8] J. Campbell and L. Viceira: *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, New York, 2002).
- [9] D. Duffie and L. Epstein: Asset pricing with stochastic differential utility. *The Review of Financial Studies*, **5** (1992), 411–436.
- [10] D. Duffie and R. Kan: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6** (1996), 379–406.
- [11] L. Epstein and S. Zin: Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework. *Econometrica*, **57** (1989), 937–969.

- [12] L. Hansen and K. Singleton: Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models. *Econometrica*, **50** (1982), 1269–1286.
- [13] L. Kogan and R. Uppal: Risk aversion and optimal portfolio policies in partial and general equilibrium economies. Working paper 8609, National Bureau of Economic Research (2001).
- [14] H. Kraft, F. Seifried, and M. Steffensen: Consumption-portfolio optimization with recursive utility in incomplete markets. *Finance and Stochastics*, **17** (2013), 161–196.
- [15] 楠田 浩二: 消費と債券投資の多期間最適問題における高次の近似解析解. Discussion paper J-35, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2013).
- [16] J. Liu: Portfolio selection in stochastic environments. *The Review of Financial Studies*, **20** (2007), 1–39.
- [17] P. Maenhout: Robust portfolio rules and asset pricing. *The Review of Financial Studies*, **17** (2004), 951–983.
- [18] H. Mamaysky: A model for pricing stocks and bonds. Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management (2002).
- [19] R. Mehra and E. Prescott: The equity premium: A puzzle. *Journal of Monetary Economics*, **15** (1985), 145–161.
- [20] J. Wachter: Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **37** (2002), 63–91.

## A. 補論

### A.1. 補題 2.2 の証明

本稿では、消費財を価値基準財とする実質証券価格を対象としてきたが、ここでは先ず、名目価格を対象とする。すなわち、短期債の名目価格を  $\tilde{P}_t$ 、満期までの期間  $\tau$  の物価連動債の名目価格を  $\tilde{P}_t(\tau)$ 、主要指数の配当込みでない名目価格を  $\tilde{S}_t^{*j}$  と表記する。また、或る拡散過程に従う一般物価過程を  $p_t$  と表記する。

短期債、物価連動債、主要指数から組成されるポートフォリオを  $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^{*j}))$  とすると、富の名目価値  $\tilde{W}_t$  は次式で表現される。

$$\tilde{W}_t = \vartheta_t \tilde{P}_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) \tilde{P}_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \vartheta_t^{*j} \tilde{S}_t^{*j}. \quad (\text{A.1})$$

このとき、配当込み主要指数のポートフォリオは、

$$\vartheta_t^j = \frac{\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^j} \vartheta_t^{*j}, \quad (\text{A.2})$$

で定義され、配当込み主要指数の名目収益率と主要指数の名目収益率の間に、

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j} = \frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}} + \tilde{D}_t^j dt, \quad (\text{A.3})$$

が成り立っていることに注意すると、所与の  $c_t$  の下、自己資金充足的ポートフォリオ  $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^{*j}))$  は、次式を満たしている。

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} &= \frac{1}{\tilde{W}_t} \left\{ \vartheta_t d\tilde{P}_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) d\tilde{P}_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \vartheta_t^{*j} \left( d\tilde{S}_t^{*j} + \tilde{D}_t^j \tilde{S}_t^{*j} dt \right) - p_t c_t dt \right\} \\ &= \frac{\vartheta_t \tilde{P}_t}{\tilde{W}_t} \frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \frac{\vartheta_t(\tau) \tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{W}_t} \frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)} d\tau + \sum_{j=1}^J \frac{\vartheta_t^j \tilde{S}_t^j}{\tilde{W}_t} \left( \frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}} + \tilde{D}_t^j dt \right) - \frac{c_t}{W_t} dt \\ &= \left( 1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^J \Phi_t^j \right) \frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)} d\tau + \sum_{j=1}^J \Phi_t^j \frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j} - \frac{c_t}{W_t} dt. \end{aligned}$$

このとき、各証券の名目収益率の項に、

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j} = \frac{dS_t^j}{S_t^j} + \frac{dp_t}{p_t} + \left( \frac{dS_t^j}{S_t^j} \right) \left( \frac{dp_t}{p_t} \right),$$

等を代入し整理すると、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{dW_t}{W_t} &= \frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} - \frac{dp_t}{p_t} - \left( \frac{dW_t}{W_t} \right) \left( \frac{dp_t}{p_t} \right) \\ &= \left( 1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^J \Phi_t^j \right) \frac{dP_t}{P_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} d\tau + \sum_{j=1}^J \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} - \frac{c_t}{W_t} dt. \end{aligned}$$

上式に、(2.5)(2.6)(2.8) 式を代入し、整理すると、(2.11) 式を得る。

## A.2. 命題 3.1 の証明

先ず、最適消費は、

$$c_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}} \left( \frac{(1-\gamma)V}{W_t^*} \right)^{-\frac{1}{\zeta}} ((1-\gamma)V)^{-\frac{\gamma-\zeta}{(1-\gamma)\zeta}} = \beta^{\frac{1}{\zeta}} W_t^{*\frac{1}{\zeta}} \left( W_t^{*1-\gamma} G^{\frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta}} \right)^{-\frac{1-\zeta}{(1-\gamma)\zeta}} = \beta^{\frac{1}{\zeta}} \frac{W_t^*}{G}.$$

次に、価値関数に偏微分を施すと、次の式群を得る。

$$W_t^* V_W = (1-\gamma)V, \quad V_X = \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} V \frac{G_X}{G}, \quad W_t^{*2} V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,$$

$$W_t^* V_{XW} = \frac{(1-\gamma)^2 \zeta}{1-\zeta} V \frac{G_X}{G}, \quad V_{XX} = \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} V \left\{ \frac{(2-\gamma)\zeta - 1}{1-\zeta} \frac{G_X}{G} \frac{G'_X}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\}.$$

価値関数の偏微分結果より、最適投資 (3.3) 式右辺の分子・分母は次のように表される。

$$\pi_t = -(1-\gamma)V \left( \Lambda_t + \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} \Sigma' \frac{G_X}{G} \right), \quad (\text{A.4})$$

$$W_t^{*2} V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V. \quad (\text{A.5})$$

ゆえに、最適投資 (3.3) 式に (A.4)(A.5) 式を代入すると、(3.10) 式を得る。

価値関数  $V$  の偏微分方程式 (3.6) における第 2 項までは, (A.4)(A.5) 式を代入し整理すると, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\pi_t' \pi_t}{2W_t^{*2} V_{WW}} &= \frac{(1-\gamma)\zeta}{2(1-\zeta)} V \text{tr} \left[ \Sigma \Sigma' \left( \frac{(2-\gamma)\zeta - 1}{1-\zeta} \frac{G_X}{G} \frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right) \right] \\ &+ \frac{1-\gamma}{2\gamma} V \left( \Lambda_t + \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} \Sigma' \frac{G_X}{G} \right)' \left( \Lambda_t + \frac{(1-\gamma)\zeta}{1-\zeta} \Sigma' \frac{G_X}{G} \right) \\ &= V \left\{ \frac{(1-\gamma)\zeta}{2(1-\zeta)} \text{tr} \left[ \Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] + \frac{1-\gamma}{2\gamma} \Lambda_t' \Lambda_t + \frac{(1-\gamma)^2 \zeta}{\gamma(1-\zeta)} \Lambda_t' \Sigma' \frac{G_X}{G} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\gamma)\zeta(\gamma-\zeta)}{2\gamma(1-\zeta)^2} \frac{G_X'}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \right\}. \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

価値関数の偏微分方程式 (3.6) における第 5・6 項は,

$$-V_W + \beta(c_t^*)^{-\zeta} ((1-\gamma)V)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} = 0, \quad (\text{A.7})$$

に注意し, 最後に (3.2) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} -c_t^* V_W + \frac{\beta}{1-\zeta} (c_t^*)^{1-\zeta} ((1-\gamma)V)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} \\ = c_t^* \left\{ -V_W + \beta(c_t^*)^{-\zeta} ((1-\gamma)V)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} \right\} + \frac{\zeta}{1-\zeta} \beta(c_t^*)^{1-\zeta} ((1-\gamma)V)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} \\ = \frac{\zeta}{1-\zeta} c_t^* V_W = \frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}} (1-\gamma)\zeta V}{1-\zeta}, \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

を得る.

(A.6)(A.8) 式等を価値関数の偏微分方程式 (3.6) に代入し, 両辺を

$$\frac{(1-\gamma)\zeta}{\gamma(1-\zeta)} V$$

で除して整理すると, (3.11) 式が得られる.

### A.3. 命題 4.1 の証明

HJB 方程式 (4.2) における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解  $\hat{c}$  は (A.9) 式を,  $\hat{\psi}$  は (A.10) 式をそれぞれ満たしている.

$$\hat{c}_t = \beta(1-\gamma) \frac{V}{V_W}, \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{\psi}_t = \frac{\hat{\pi}_t}{\hat{W}_t^2 V_{WW}}, \quad (\text{A.10})$$

ここで,

$$\hat{\pi}_t = -\hat{W}_t \{V_W \Lambda_t + \Sigma' V_{XW}\}. \quad (\text{A.11})$$

最適消費 (A.9) 式と最適投資 (A.10) 式を HJB 方程式 (4.2) に代入し, (A.10) 式から導かれる次式,

$$\hat{W}_t V_W \Lambda_t' \hat{\psi}_t + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} \hat{W}_t \hat{\psi}_t' \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{W}_t \hat{\psi}_t' \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\hat{\pi}_t' \hat{\pi}_t}{2\hat{W}_t^2 V_{WW}},$$

に注意して整理すると、次の価値関数  $V$  に関する偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\hat{\pi}_t' \hat{\pi}_t}{2 \hat{W}_t^2 V_{WW}} + \hat{W}_t r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X \\ - \hat{c}_t V_W + \beta(1 - \gamma)V \left\{ \log \hat{c}_t - \frac{1}{1 - \gamma} \log((1 - \gamma)V) \right\} = 0. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

価値関数は (4.3) 式で推測されるので、最適消費は (A.9) 式から直ちに (4.4) 式を得る。

次に、価値関数に偏微分を施すと、次の式群を得る。

$$\begin{aligned} \hat{W}_t V_W = (1 - \gamma)V, \quad V_X = V \frac{h_X}{h}, \quad \hat{W}_t^{*2} V_{WW} = -\gamma(1 - \gamma)V, \\ \hat{W}_t V_{XW} = (1 - \gamma)V \frac{h_X}{h}, \quad V_{XX} = V \frac{h_{XX}}{h}. \end{aligned}$$

価値関数の偏微分結果より、最適投資 (A.10) 式右辺の分子は (A.13) 式、分母は (A.5) 式のように表される。

$$\hat{\pi}_t = -(1 - \gamma)V \left( \Lambda_t + \Sigma' \frac{h_X}{h} \right). \quad (\text{A.13})$$

ゆえに、最適投資 (A.10) 式に (A.13)(A.5) 式を代入すると、(4.5) 式を得る。

価値関数  $V$  の偏微分方程式 (A.12) における第 2 項までは、(A.13)(A.5) 式を代入し整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\hat{\pi}_t' \hat{\pi}_t}{2 \hat{W}_t^2 V_{WW}} = \frac{1}{2} V \text{tr} \left[ \Sigma \Sigma' \frac{h_{XX}}{h} \right] + \frac{1 - \gamma}{2\gamma} V \left( \Lambda_t + \Sigma' \frac{h_X}{h} \right)' \left( \Lambda_t + \Sigma' \frac{h_X}{h} \right) \\ = V \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Sigma \Sigma' \frac{h_{XX}}{h} \right] + \frac{1 - \gamma}{2\gamma} \Lambda_t' \Lambda_t + \frac{1 - \gamma}{\gamma} \Lambda_t' \Sigma' \frac{h_X}{h} + \frac{1 - \gamma}{2\gamma} \frac{h_X'}{h} \Sigma \Sigma' \frac{h_X}{h} \right\}. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

価値関数の偏微分方程式 (A.12) における第 5・6 項は、

$$\begin{aligned} - \hat{c}_t V_W + \beta(1 - \gamma)V \left\{ \log \hat{c}_t - \frac{1}{1 - \gamma} \log((1 - \gamma)V) \right\} \\ = \beta(1 - \gamma)V \left\{ -1 + \log \beta + \log \hat{W}_t - \log \hat{W}_t - \frac{1}{1 - \gamma} \log h \right\} \\ = \beta V \{ (\log \beta - 1)(1 - \gamma) - \log h \}. \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

(A.14)(A.15) 式等を価値関数の偏微分方程式 (A.12) に代入し、両辺を  $V/\gamma$  で除して整理すると、(4.6) 式が得られる。

#### A.4. 命題 4.2 の証明

関数 (4.7) に偏微分を施し、偏微分方程式 (4.6) に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' (aa' + A + aX_t' A + AX_t a' + AX_t X_t' A)] + \frac{1 - \gamma}{2} (a' + X_t' A) \Sigma' \Sigma (a + AX_t) \\ + \{ \gamma K \theta + (1 - \gamma) \Sigma \lambda - (\gamma K - (1 - \gamma) \Sigma \Lambda) X_t \}' (a + AX_t) \\ - \beta \gamma \left( a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) + \frac{1 - \gamma}{2} (\lambda' \lambda + 2 \lambda' \Lambda X_t + X_t' \Lambda' \Lambda X_t) \\ + \gamma(1 - \gamma)(r_0 + r' X_t) - \beta(1 - \log \beta) \gamma(1 - \gamma) = 0. \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

上式は  $X_t$  に関する恒等式なので、 $(a_0, a, A)$  の代数方程式 (4.10)-(4.12) が導出される。

## A.5. 補題 5.1 の証明

前進・後退確率微分方程式 (5.1)(5.4) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.8)(5.9) が一意の解を持つと仮定されているので, (5.12)-(5.16) 式で表される  $(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$  が前進・後退確率微分方程式 (5.1)(5.4) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.8)(5.9) を満たしていることを示せば良い. 先ず,  $(z_t^*, Z_t^*)$  が (5.4) 式を満たしていること,  $p_t^*$  が (5.8) 式を満たしていることは直ちに確認できる.  $(q_t^*, R_t^*)$  については,  $u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$  が代入された HJB 方程式 (3.1) の  $J_{\mathbb{X}}$  に (5.15) 式を代入すると, 次式が成立している (時間変数は省略, 以下同様).

$$\mu' q^* + \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma \sigma' q_{\mathbb{X}}] + \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} z^* \left\{ \left( \frac{c^*}{((1-\gamma)z^*)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\} = 0. \quad (\text{A.17})$$

上式を状態変数の第  $i$  成分  $\mathbb{X}_i$  で偏微分し, 整理すると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \mu' q_{\mathbb{X}_i}^* + \mu'_{\mathbb{X}_i} q^* + \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma \sigma' q_{\mathbb{X}\mathbb{X}_i}^*] + \text{tr} [q_{\mathbb{X}}^* \sigma \sigma'_{\mathbb{X}_i}] \\ + c_{\mathbb{X}_i}^* \left\{ \mu'_{c^*} q^* + \beta(c^*)^{-\zeta} ((1-\gamma)z^*)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} \right\} + \Psi_{\mathbb{X}_i}^* \{ \mu'_{\Psi^*} q^* + \text{tr} [q_{\mathbb{X}}^* \sigma \sigma'_{\Psi^*}] \} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

上式における第 5・6 項については,  $u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$  が最適制御であることに留意すると,

$$\mu'_{c^*} q^* + \beta(c^*)^{-\zeta} ((1-\gamma)z^*)^{-\frac{\gamma-\zeta}{1-\gamma}} = 0, \quad \mu'_{\Psi^*} q^* + \text{tr} [q_{\mathbb{X}}^* \sigma \sigma'_{\Psi^*}] = 0.$$

従って, 次式を得る.

$$\mu' q_{\mathbb{X}_i}^* + \mu'_{\mathbb{X}_i} q^* + \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma \sigma' q_{\mathbb{X}\mathbb{X}_i}^*] + \text{tr} [q_{\mathbb{X}}^* \sigma \sigma'_{\mathbb{X}_i}] = 0. \quad (\text{A.19})$$

他方,  $q_t^*$  を微分すると, 伊藤の補題により, 次式を得る.

$$-dq_t^* = - \left( \mu' q_{i\mathbb{X}}^* + \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma \sigma' q_{i\mathbb{X}\mathbb{X}}^*] \right) dt - (q_{i\mathbb{X}}^*)' \sigma dB_t. \quad (\text{A.20})$$

上式を (A.19) 式と  $R_t^* = (q_{i\mathbb{X}}^*)' \sigma$  を用いて変形すると,  $(q_t^*, R_t^*)$  が随伴後退確率微分方程式 (5.9) を満たしていることが確認できる.

条件付き最大値原理については, HJB 方程式左辺の  $\Psi_t$  に関する最適化の結果, (5.17) 式右辺  $E_t[H(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, c_t, \Psi_t, p_t^*, q_t^*, R_t^*)]$  の  $\Psi_t$  の現れる項が消滅する. 従って, (5.17) 式右辺が  $c_t^*$  で最大化されることを示せば良いが, このことは既に HJB 方程式左辺の最大化で確認した通りである.

菊池健太郎

滋賀大学

経済学部

〒 522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

E-mail: kentaro-kikuchi@shiga-u.ac.jp

## ABSTRACT

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION TO CONSUMPTION AND  
LONG-TERM SECURITY INVESTMENT OPTIMIZATION PROBLEM  
WITH EPSTEIN-ZIN UTILITY

Bolorsuvd Batbold                      Kentaro Kikuchi    Koji Kusuda  
*Graduate School of Shiga University*                      *Shiga University*

Campbell and Viceira examine the consumption and long-term security investment optimization problem of the consumer, who has Epstein-Zin utility, in which relative risk aversion and elasticity of intertemporal substitution are inseparable, under a securities market composed of the short-term bond and a long-term fixed-maturity inflation indexed bond. They derive an approximate analytical solution applying log-linear approximation to a non-homogeneous term in the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. This paper explores the problem under a general securities market in which all maturity inflation-indexed bonds and main indices including stock index are traded, and under the assumption that these security prices are subject to latent state variables. Approximate analytical candidate solutions are derived from the log-linear approximation, and it is revealed that optimal approximate investment depends on state variables. Also, a sufficient condition is presented in order to identify the optimal solution among candidate solutions. Finally, precisions of the approximate optimal consumption-wealth ratio and of the approximate optimal investment are evaluated by a simplified method, and it is confirmed that the approximations are overall highly accurate.