

学生にグループ分けのある学科配属問題 — 離散凸解析の適用例

赤堀 峻
株式会社日立製作所

関口 陽介
シスメックス株式会社

田村 明久
慶應義塾大学

(受理 2017 年 3 月 30 日; 再受理 2017 年 6 月 16 日)

和文概要 慶應義塾大学理工学部では1年生は学門という5つのグループに別れ、2年生に進級する際に11学科への学科分けが行われる。各学門の学生は学門に前もって割り当てられている3または4学科の中のいずれか1つに配属される。学門学科間の配属人数に制約があるため、この問題は通常安定マッチングモデルでは扱えない。本論文では、このように学生がグループ分けされた状況へと安定マッチングモデルを拡張し、学科配属アルゴリズムを2つ提案する。これらのアルゴリズムを2015年度および2016年度の学科分けに実際に用いた際の結果についても報告する。一方のアルゴリズムは離散凸解析を応用したもので、実問題に対して良好な結果を導いた。

キーワード: アルゴリズム, OR の実施, 離散最適化, 学科配属問題

1. はじめに

Gale と Shapley [8] が 1962 年に安定マッチングの概念を提案して以降現在に至るまで、安定マッチングに関する多くの事例研究および理論研究がなされてきた。国内においても臨床研修医の研修病院への割当を全国的な規模で行う医師臨床研修マッチング [17] に安定マッチングモデルの多対1版が利用されている。近年では、病院と研修医、学科と学生などの多対1版の安定マッチングモデルに対して追加制約を課したモデル、例えば男女や人種のマイノリティとマジョリティのバランスを考慮したモデル [1, 2], 病院などの定員の下限制約を導入したモデル [3, 6], 医師臨床研修マッチングにおいて県内などの領域での受入人数の上限制約を導入したモデル [10], 実行可能領域の遺伝性の下での一般的な追加制約を導入したモデル [9] などの研究がなされている。一方、離散最適化の道具を用いた安定マッチングモデルの一般化について、マトロイドを用いた拡張モデル [5], 離散凸解析を応用した拡張モデル [4, 7, 11, 15] が提案されている。

本論文では、慶應義塾大学理工学部の学科分けという現実の問題を解くために安定マッチングモデルに追加制約を課したモデル化を行い、学科配属アルゴリズムを2つ提案する。一方のアルゴリズムは離散凸解析を応用したもので、第5節で述べるように実問題に対しても良好な結果を導いた。

まず慶應義塾大学理工学部の配属方法について説明する。慶應義塾大学理工学部では学門制を導入している。学門制とは学部入学時に直接学科に配属されるのではなく、1年生の間は学門とよばれる5つのグループ(学門1から学門5)に所属し、2年生に進級する際に学科に配属されるという制度である。表1のようにそれぞれの学門から配属可能な学科が決められている。例えば、学門1の学生は機械工学科, 電子工学科, 物理情報工学科, 物理学科の4学科のいずれかに配属される。このように各学門に所属する学生は3または4学科の中のいずれか1つに配属され、各学科は1つまたは2つの学門から学生を受け入れる。表1にあ

表 1: 学科の学則定員, 配属目安一覧 [18][19]

	学門 1	学門 2	学門 3	学門 4	学門 5	学則定員
機械工学科	10%			50%		133 名
電子工学科	20%				30%	89 名
応用化学科			55%	10%		118 名
物理情報工学科	50%		10%			103 名
管理工学科		50%		10%		99 名
数理科学科		35%				60 名
物理学科	20%					41 名
化学科			20%			40 名
システムデザイン工学科				30%	25%	118 名
情報工学科		15%			35%	88 名
生命情報学科			15%		10%	43 名

るように各学科の学則定員と各学門から各学科への配属人数の目安が定まっている。例えば学門 1 では所属する学生の約 10% が機械工学科に、約 20% が電子工学科に、約 50% が物理情報工学科に、約 20% が物理学科に振り分けられる。しかし、この割合はあくまでも目安であり、学門の学生数も年によって異なるため、学科の学則定員も目安となる値である。

このような状況で、意思決定者は図 1 のように、

1. 学門学科間の配属定員を適宜設定する*,
2. 定めた学門学科間の配属定員の下で、学生の学科に対する選好順序と学科の学生に対する優先順位により、学事システムの配属アルゴリズム (Gale-Shapley アルゴリズム [8]) を用いて学生の学科への配属を求める,
3. 求めた配属を吟味し、満足できない場合は学門学科間の配属定員設定 1 に戻る

という試行錯誤を重ねて最終的な配属を決めていた。この試行錯誤の過程において、意思決定者は実験設備等の制約による学科に配属可能な人数を配慮しつつ、学生の希望をできる限り叶えることを目指している†。

従来手法では、上記プロセス 1 に当たる学門学科間定員をいかに決めるかが重要である。しかし、学生の希望をできる限り叶えるためにどのように学門学科間定員を定めれば良いかは簡単な課題ではない。また学事システム内の配属アルゴリズムを含めた枠組をすべて他のもの (例えば本論文で提案するアルゴリズム) に置き換えることも現実的ではない。そのため OR の実施という観点から、プロセス 1 の学門学科間定員の決定をできる限り自動化し意思決定者を支援する枠組の構築を目標とする。

この目標のために、以下のような安定マッチングモデルの拡張を考える (詳細は第 2 節参照)。

- (I1) 学生は幾つかの非空な集合に分割されている (各集合を学門とよぶ),
- (I2) 各学生は配属可能な学科に対して選好順序をもつ,

*2013 年度と 2014 年度では、表 1 の割合に従い学門学科間定員の初期設定をしていた。

†2015 年度の学科分けにおいては、意思決定者は学科への配属人数を配慮しつつ、第一義的に第 1 希望の配属学生数を増やし、以降第 4 希望の配属学生数を減らし、第 3 希望の配属学生数を減らすという基準を持っていた。

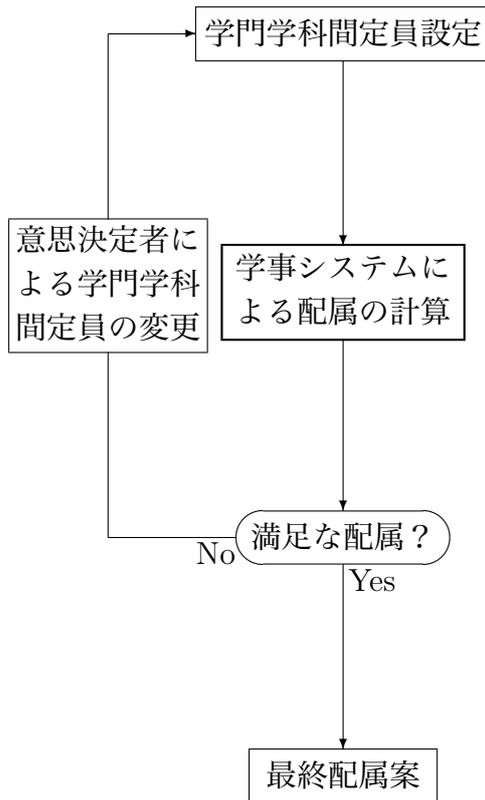


図 1: 従来手法

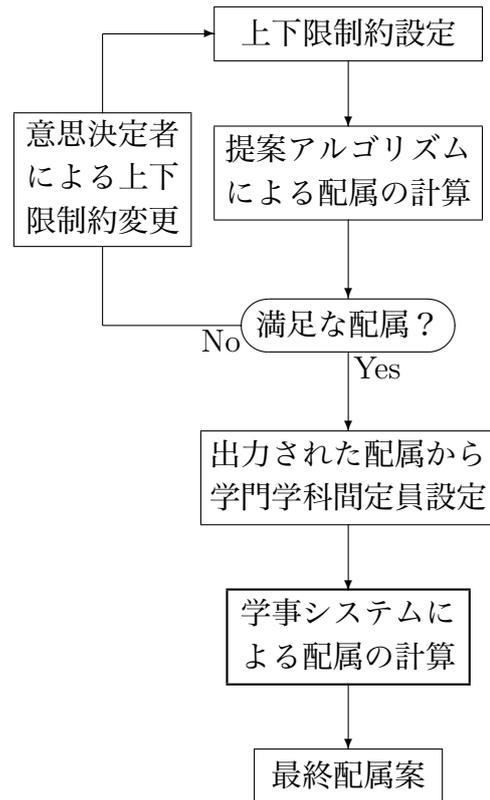


図 2: 提案手法

- (I3) 各学科は受入可能な学生に対して優先順位をもつ,
- (I4) 各学科は配属人数に関する上下限制約をもつ,
- (I5) 各学科は受入可能な学門に対する配属人数の上下限制約をもつ.

このような入力条件下において次の出力条件：

- (O1) 各学生が唯一の学科に配属される,
- (O2) 各学科の配属人数について (I4) と (I5) の制約 (あるいは緩和した制約) を満たす,
- (O3) ある種の安定性をもつ

を満たす配属を求めるという問題を設定する。学門学科間定員を固定する従来手法に対して、(I4) と (I5) のように条件を緩めることで学生の希望が叶いやすい設定としている。本論文では、入力条件 (I1)~(I5) あるいはその一部を緩和した条件下で出力条件 (O1)~(O3) を満たす配属を求めるアルゴリズムを構築する。

このアルゴリズムを意思決定者に提供することで、配属決定プロセスは図 2 のように変わる。意思決定者は

- a. (I4) と (I5) の上下限制約を適宜設定する,
- b. 提案アルゴリズムを用いて学生の学科への配属を求め、この配属を吟味する,
- c. 満足できない配属の場合は上下限制約の設定 a に戻る,
- d. 満足できる配属の場合は、その配属における学門学科間の配属人数を学門学科間定員と定め、これを学事システムに入力し最終配属を求める。

従来手法に比べた提案手法の長所は以下の点である。

- 従来手法では学門学科間定員を変更することで学生の希望を叶えることを目指してい

るが、人手によるもので明確な基準によるものではない。一方、提案手法では (I4) と (I5) という緩い条件下で配属を求めることで学生の希望を叶えやすい設定としている。さらに第 3 節の離散凸解析を応用したアルゴリズムの核となる一般化 Gale-Shapley アルゴリズム [4] は学生最適な配属を求める [11]。また、第 4 節のアルゴリズムは貪欲法により学生の希望を叶えることを狙っており、いずれのアルゴリズムも制約条件を満たす配属の中で学生に有利なものを目指している。

- 提案手法では (I4) と (I5) の上下限制約の変更により意思決定者の満足度 (納得度) を上げることを目指す。タイトな制約とそうでない制約を区別することができ、どの制約を修正するべきかの判断が容易である。
- 学事システムでは副次的な資料も作成するため計算実時間がかかることに比して、提案アルゴリズムは高速であるため作業時間の短縮が図れる。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 節では、数理モデルと必要な概念の説明を行う。第 3 節では、入力条件 (I1)~(I5) において、(I5) の学科配属人数の下限制約だけを無視した場合に対し、(O1)~(O3) を満たす配属を求める離散凸解析を応用したアルゴリズムを提案する。第 4 節では、入力条件 (I1)~(I5) において、(I3) の学科の優先順位が特殊な (現実的には妥当な) 場合に対し、(O1)~(O3) を満たす配属を求める貪欲法を用いたアルゴリズムを提案する。第 5 節では実際の問題への適用結果を示す。

2. 数理モデル

学生の集合を $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, 学科の集合を $D = \{d_1, \dots, d_m\}$ とし, S の非空な集合への分割を $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_l\}$ とする. \mathcal{G} の各要素 $G_k (\subseteq S)$ を **学門** とよぶことにする. 学門 G_k に属す学生数を n_k と表す. 各学門 G_k から配属可能な学科の集合を $D_k (\subseteq D)$ とし, 学生と配属可能学科のペア全体を $E (\subseteq S \times D)$, すなわち

$$E = \bigcup_{k=1}^l (G_k \times D_k)$$

とする. 各学科 $d_j \in D$ が受入可能な学生全体 $\{s \in S : (s, d_j) \in E\}$ を S_j と表記する.

E の部分集合を **割当** とよび, 割当 A に対し $(s, d) \in A$ であるとき, A において s は d に配属されるとする. 割当 A , 学生 s , 学科 d に対して

$$A(s) = \{d' \in D : (s, d') \in A\}, \quad A(d) = \{s' \in S : (s', d) \in A\}$$

と定義する. 特に $|A(s)| = 1$ であるとき, すなわち $A(s) = \{d\}$ であるとき, $A(s)$ はその要素 d そのものを指すことがある.

各学科 d_j の配属人数に関する上限を q_j , 下限を p_j と表す. また学門 G_k から学科 $d_j \in D_k$ への配属人数に関する上限を q_{jk} , 下限を p_{jk} と表す. ただし一般性を失うことなく

$$\sum_{k:d_j \in D_k} p_{jk} \leq p_j, \quad q_j \leq \sum_{k:d_j \in D_k} q_{jk}$$

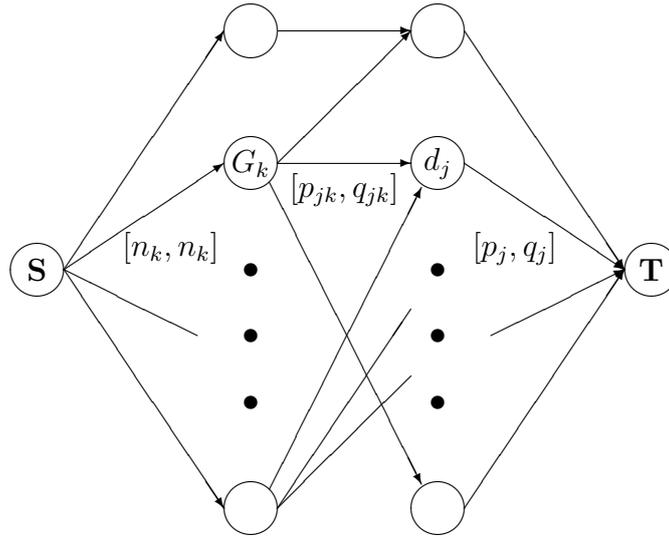


図 3: 実行可能完全割当の存在判定のためのネットワーク

が成り立つとする. 割当 A に対するこれらの上下限制約は以下のように記述できる:

$$|A(d_j)| \leq q_j \quad (j = 1, \dots, m), \quad (2.1)$$

$$|A(d_j)| \geq p_j \quad (j = 1, \dots, m), \quad (2.2)$$

$$|A(d_j) \cap G_k| \leq q_{jk} \quad (k = 1, \dots, l; d_j \in D_k), \quad (2.3)$$

$$|A(d_j) \cap G_k| \geq p_{jk} \quad (k = 1, \dots, l; d_j \in D_k). \quad (2.4)$$

割当 A が (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) のすべてを満たすとき A は**学科実行可能**であるという. 割当 A が

$$|A(s)| \leq 1 \quad (s \in S) \quad (2.5)$$

を満たすとき, A は**学生実行可能**であるといい, 特に A においてすべての学生が学科に配属されているという条件, すなわち

$$|A(s)| = 1 \quad (s \in S) \quad (2.6)$$

は, 最終的な割当が満たすべき重要な条件である. 学科実行可能 (2.1)~(2.4) で学生実行可能 (2.5) な割当を**実行可能割当**とよび, さらに (2.6) を満たすとき**実行可能完全割当**とよぶ. 実行可能完全割当が存在するかどうかは次の実行可能流の存在判定問題を解くことで判定できる.

頂点集合が始点 S , 終点 T , 学門集合 \mathcal{G} , 学科集合 D で構成されており, 始点から各学門間, 各学門 G_k から D_k の各学科間, 各学科から終点間に有向辺があるグラフを考える (図 3). 各辺の容量については, 始点 S と学門 $G_k \in \mathcal{G}$ の間の容量の上下限をともに n_k とし, 学門 G_k と学科 $d_j \in D_k$ の間の容量の上限を q_{jk} , 下限を p_{jk} とし, 学科 $d_j \in D$ と終点 T の間の容量の上限を q_j , 下限を p_j とする. 上下限 p_j, q_j, p_{jk}, q_{jk} と各学門の学生数 n_k は整数なので, 上記のネットワークにおいて容量制約を満たす実行可能流が存在するならば, 実行可能整数流が存在する. ネットワークの構成法より, 実行可能完全割当が存在するための必要十分条件は, 上記のネットワークに実行可能流が存在することである. 以上より, 実行可能完全割当の存在判定は学門数と学科数に関する多項式時間で実行できる.

ある種の安定性を満たす実行可能完全割当を求めるのが目的であるが、下限制約である (2.2) と (2.4) を扱うのは難しい場合がある。そのため (2.2) と (2.4) を無視した割当をマッチングとよぶことにする。すなわち、割当 M が (2.1), (2.3), (2.5) を満たすとき、 M を**実行可能マッチング**とよび、さらに (2.6) を満たすとき**実行可能完全マッチング**とよぶことにする。

次に実行可能マッチングの安定性を考えるために、学生の学科に対する選好順序と学科の学生に対する優先順位を導入する。各学生 $s \in G_k$ は配属可能なすべての学科 $d \in D_k$ に対して、同順位を許さない選好順序 \succ_s をもつとする。すなわち、 $d, d' \in D_k$ に対して $d \succ_s d'$ である場合に s は d を d' より好むとし、 $d \neq d'$ ならば $d \succ_s d'$ または $d' \succ_s d$ の一方のみが必ず成り立つとする。また $d \succeq_s d'$ は $d = d'$ または $d \succ_s d'$ を意味する。

学生と同様に各学科 $d_j \in D$ は受入可能なすべての学生 $s \in S_j$ に対し、同順位を許さない優先順位 \succ_{d_j} をもつとする。すなわち、 $s, s' \in S_j$ に対して $s \succ_{d_j} s'$ である場合に d_j は s を s' より優先するとし、 $s \neq s'$ ならば $s \succ_{d_j} s'$ または $s' \succ_{d_j} s$ の一方のみが必ず成り立つとする。また $s \succeq_{d_j} s'$ は $s = s'$ または $s \succ_{d_j} s'$ を意味する。

実行可能マッチング M の安定性を次に定義する。 M に対して $(s, d) \in E \setminus M$ が

$$(BP-s) \quad d \succ_s M(s) \neq \emptyset \text{ あるいは } M(s) = \emptyset$$

かつ

$$(BP-d1) \quad (M \setminus \{(s, M(s))\}) \cup \{(s, d)\} \text{ が実行可能マッチング, あるいは}$$

$$(BP-d2) \quad \text{ある } s' \in M(d) \text{ が存在して } s \succ_{d_j} s' \text{ かつ } (M \setminus \{(s, M(s)), (s', d)\}) \cup \{(s, d)\} \text{ が実行可能マッチング}$$

を満たすとき (s, d) を M に対する**ブロッキングペア**という。ただし $M(s) = \emptyset$ であるとき $\{(s, M(s))\}$ は \emptyset とする。上記の (BP-s) は s が M での配属あるいは未配属であることよりも d に配属されることを望み、(BP-d1) は学科 d に空きがあり s が d に追加配属可能であることを意味し、(BP-d2) は d にとって M で配属されている学生 s' が s より優先順位が低く、 s' と s を入れ替えられる状況を意味している。実行可能マッチングに対して、ブロッキングペアが存在するときそれは**不安定**であるいい、ブロッキングペアが存在しないとき**安定**であるという。以降では表現を簡略化するために、実行可能安定マッチングを単に**安定マッチング**とよぶことにする。安定マッチングが、特に実行可能完全マッチングや実行可能 (完全) 割当であるとき、これを**安定完全マッチング**や**安定 (完全) 割当**とよぶことにする。

一般に下限制約がある場合には、安定割当が存在するとは限らず、安定性を弱めた概念[‡]が考えられている ([9] 等参照)。我々の文脈では、以下の概念が重要になる。実行可能マッチング M が、各 $G_k \in \mathcal{G}$, $d_j \in D_k$ に対し、 G_k から d_j への配属人数の上限 q_{jk} を $|M(d_j) \cap G_k|$ と変更したとき安定であるならば、 M を**限定安定マッチング**とよぶ。限定安定マッチングが、特に実行可能完全マッチングや実行可能 (完全) 割当であるとき、これを**限定安定完全マッチング**や**限定安定 (完全) 割当**とよぶことにする。第 3 節、第 4 節で、限定安定完全割当を求めるアルゴリズムを提案する。

実用面における我々の目的は学門学科間定員を定めることであるが、そのために限定安定完全割当を利用する。図 2 の流れにおいて、提案アルゴリズムで得られた限定安定完全割当 A に対して、学門 G_k と学科 $d_j \in D_k$ の間の配属人数の上限を $q_{jk} = |A(d_j) \cap G_k|$ と定

[‡]例えば、実行可能マッチング M に対して、上記の (BP-s) と (BP-d1) を満たす $(s, d) \in E \setminus M$ が存在しないとき M は非浪費性を満たすといい、(BP-s) と (BP-d2) を満たす $(s, d) \in E \setminus M$ が存在しないとき M は公平性を満たすという。

める. A が実行可能完全割当であるので, 各学門 G_k に対して $\sum_{j:d_j \in D_k} q_{jk} = n_k$ が成立し, 各学科 d_j に対して $p_j \leq \sum_{k:d_j \in D_k} q_{jk} \leq q_j$ が成立する. このことより, 学門学科間の下限と学科上下限を無視して (学事システムの配属アルゴリズムである) Gale-Shapley アルゴリズム [8] (以降 GS と表記) を適用することで, 変更後の上限に対する安定完全マッチング M を求めることができる. 本節での設定において GS は以下のように記述される.

アルゴリズム GS

Step 0: $M = \emptyset$, $S' = S$, $L_s = \{d \in D : (s, d) \in E\} (s \in S)$ とする.

Step 1: $L_s \neq \emptyset$ となる学生 $s \in S'$ を選ぶ ($s \in G_k$ とする). L_s 内で s にとって最良の学科 d_j (すなわち $d_j \succeq_s d (d \in L_s)$) を探し $M = M \cup \{(s, d_j)\}$, $S' = S' \setminus \{s\}$, $L_s = L_s \setminus \{d_j\}$ とする.

Step 2: $|M(d_j) \cap G_k| > q_{jk}$ となる場合, \hat{s} を $M(d_j) \cap G_k$ 内で d_j にとって最下位の学生 (すなわち $s' \succeq_{d_j} \hat{s} (s' \in M(d_j) \cap G_k)$) とする. $M = M \setminus \{(\hat{s}, d_j)\}$ とし, $L_{\hat{s}} \neq \emptyset$ ならば $S' = S' \cup \{\hat{s}\}$ とする.

Step 3: $S' = \emptyset$ である場合, M を出力して終了. そうでない場合, Step 1 に戻る.

このアルゴリズムは学門 G_k と学科 $d_j \in D_k$ の組ごとに通常の Gale-Shapley アルゴリズムを適用することと同じ結果となる. Step 1 での学生 s の選び方に依らずに出力は一意に定まり, 特に上記のアルゴリズムの出力は学生最適安定マッチング (複数存在する安定マッチングの中で, 各学生がより好む学科に配属されるもの) となることが知られている [8]. 一般に学門学科間上限 q_{jk} を決定するために用いた限定安定完全割当 A と GS の出力である安定完全マッチング M が一致するとは限らない. 一致しない場合でも A は変更後の上限に関して安定完全マッチングであるから, 各学生にとって M は A よりも望ましい配属を与えることになる. A と M が一致する場合については, 第 3 節, 第 4 節でそれぞれ議論する.

3. 離散凸解析を用いた解法

第 2 節のモデルにおいて, 学門学科間の配属人数の上下限 q_{jk}, p_{jk} と学科の配属人数の上限 q_j は尊重しつつ, 学科の配属人数の下限を無視した場合について, すなわち $p_j = 0 (j = 1, \dots, m)$ の場合について, 離散凸解析を応用した限定安定完全割当を求めるアルゴリズムを提案する. 以下の 2 条件を前提とする.

(A1) 実行可能完全割当が存在する.

(A2) 学生達 $\{s_1, \dots, s_n\}$ は同順位を含まない成績の降順に添字付けされている.

(A1) は学生全員が配属されるための必須条件である. 一方, (A2) は必須条件というよりは複数存在する限定安定完全割当を絞り込むために用いられる. 具体的には, 以降で説明するように (A1) の仮定の下では安定マッチングが必ず存在するが, これが完全である (すなわち学生全員が配属されている) 保証はない. このような場合には (A1) を保ったままですぐれかの学門学科間上限 q_{jk} を減ずる操作を行う. このときに減ずる候補を 1 つに絞り込むために (A2) は用いられ, 「 E 上の全順序が与えられている」などの代替条件でも問題はない.

第 3.1 節では離散凸解析において中心的役割を担う M^{\square} 凹関数とこれを用いた問題の定式化を, 第 3.2 節では本節の提案アルゴリズムの核となる一般化 Gale-Shapley アルゴリズム [4] を紹介する. 第 3.3 節において限定安定完全割当を求めるアルゴリズムを提案し, その性質を述べる.

3.1. 離散凸解析による問題の定式化

有限集合 V と関数 $f: 2^V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ に対して, f の**実効定義域** $\text{dom } f$ を

$$\text{dom } f = \{X \subseteq V : f(X) \neq -\infty\}$$

と定義する. また任意の $X, X' \subseteq V$ に対して $X' \subseteq X$ かつ $X \in \text{dom } f$ ならば $X' \in \text{dom } f$ となるとき, $\text{dom } f$ を**遺伝的な実効定義域**という.

$\text{dom } f \neq \emptyset$ となる関数 $f: 2^V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ が任意の $X, Y \in \text{dom } f$, 任意の $u \in X \setminus Y$ に対して, 次の少なくとも一方を満たすとき f を \mathbb{M}^\sharp **凹関数** [14] という.

- a. $f(X) + f(Y) \leq f(X \setminus \{u\}) + f(Y \cup \{u\})$,
- b. ある $v \in Y \setminus X$ が存在して $f(X) + f(Y) \leq f((X \setminus \{u\}) \cup \{v\}) + f((Y \cup \{u\}) \setminus \{v\})$.

\mathbb{M}^\sharp 凹関数の例として以下のものを挙げておく.

例 3.1. V の部分集合族 \mathcal{T} が次の条件を満たすとき \mathcal{T} を**層族**という :

$$X, Y \in \mathcal{T} \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset \text{ または } X \subseteq Y \text{ または } Y \subseteq X).$$

層族 \mathcal{T} と \mathcal{T} の各要素 Z に対する 1 変数凹関数 $f_Z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ が与えられたとき

$$f(X) = \sum_{Z \in \mathcal{T}} f_Z(|X \cap Z|) \quad (X \subseteq V)$$

は, $\text{dom } f \neq \emptyset$ ならば \mathbb{M}^\sharp 凹関数である [12, 13]. この関数を**層型凹関数**とよぶ. □

次に第 2 節で述べた用語を離散凸解析の言葉で書き換えていく. まず学門学科間の下限制約を学科を細分化することで上限制約として表現する ([16] 参照). 各学門 $G_k \in \mathcal{G}$ と G_k から配属可能な学科 $d_j \in D_k$ に対して, 細分化した学科 d_{jk}^{reg} と d_{jk}^{ext} を用意し, これらをそれぞれ学科 d_j の学門 G_k に対する**通常枠**と**拡張枠**とよぶことにする. 学門 G_k の学生が d_{jk}^{reg} や d_{jk}^{ext} に配属されることは d_j に配属されることを意味し, 通常枠 d_{jk}^{reg} は p_{jk} を上限とする枠で, 拡張枠 d_{jk}^{ext} は上限 q_{jk} までの残り人数を受け入れる枠と解釈する. G_k から配属可能な通常枠・拡張枠全体を

$$D_k^* = \bigcup_{d_j \in D_k} \{d_{jk}^{\text{reg}}, d_{jk}^{\text{ext}}\}$$

と表記し, 通常枠・拡張枠全体を

$$D^* = \bigcup_{k=1}^l D_k^*$$

と表記する. 第 2 節で扱った学生と配属可能学科のペア全体 E に対応する $E^*(\subseteq S \times D^*)$ を

$$E^* = \bigcup_{k=1}^l (G_k \times D_k^*)$$

と定め, $M \subseteq E^*$ を**マッチング**とよぶ[§]. マッチング M , 学生 $s \in S$, 学科 $d \in D^*$ に対して, 第 2 節と同様に $M(s)$, $M(d)$ を

$$M(s) = \{d' \in D^* : (s, d') \in M\}, \quad M(d) = \{s' \in S : (s', d) \in M\}$$

[§]本節では下限制約がないので割当ではなく, マッチングとよぶことにする.

と定義する. マッチング M の学科実行可能性は以下のように表記できる:

$$|M(d_{jk}^{\text{reg}})| \leq p_{jk} \quad (k = 1, \dots, l; d_j \in D_k), \quad (3.1)$$

$$|M(d_{jk}^{\text{ext}})| \leq q_{jk} - p_{jk} \quad (k = 1, \dots, l; d_j \in D_k), \quad (3.2)$$

$$\sum_{k:d_j \in D_k} |M(d_{jk}^{\text{ext}})| \leq q_j - \sum_{k:d_j \in D_k} p_{jk} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j:d_j \in D_k} |M(d_{jk}^{\text{ext}})| \leq n - \sum_{k=1}^l \sum_{j:d_j \in D_k} p_{jk}. \quad (3.4)$$

(3.1) は通常枠 d_{jk}^{reg} の定員は p_{jk} であることを意味し, (3.2) は拡張枠 d_{jk}^{ext} には高々 $q_{jk} - p_{jk}$ 人しか配属されないことを意味している. (3.3) は学科 d_j に対応する拡張枠全体で, 学科定員 q_j から通常枠総定員を引いた人数しか受け入れられないこと, すなわち (2.1) に対応する条件である. (3.4) は拡張枠全体の定員が学生数から通常枠全体の定員を引いたもの以下であることを表現している. この条件より, M において全学生が配属されたとき, M は各学門学科間の下限制約を満たすことが保証される (命題 3.2 参照).

マッチング M が, (3.1)~(3.4) と

$$|M(s)| \leq 1 \quad (s \in S) \quad (3.5)$$

を満たすとき実行可能マッチングとなり, さらに

$$|M(s)| = 1 \quad (s \in S) \quad (3.6)$$

を満たすとき実行可能完全マッチングとなる. 実行可能完全マッチングが存在するかは第 2 節と同様にフロー問題を解くことにより判定できる. 具体的には, 通常枠を全て埋めたことを前提として, 図 3 の始点 \mathbf{S} と学門 G_k の間の容量を $n_k - \sum_{j:d_j \in D_k} p_{jk}$, 学門 G_k と学科 d_j の間の容量を $q_{jk} - p_{jk}$, 学科 d_j と終点 \mathbf{T} の間の容量の上限を (3.3) の右辺の値としたとき, 始点 \mathbf{S} から終点 \mathbf{T} への最大流量が (3.4) の右辺の値

$$n - \sum_{k=1}^l \sum_{j:d_j \in D_k} p_{jk}$$

となることが実行可能完全マッチングが存在するための必要十分条件となる.

実行可能完全マッチング $M \subseteq E^*$ から以下のように実行可能完全割当が構成できる.

命題 3.2. 実行可能完全マッチング $M \subseteq E^*$ に対して, 割当 $A \subseteq E$ を

$$A = \{(s, d_j) : (s, d_{jk}^{\text{reg}}) \in M\} \cup \{(s, d_j) : (s, d_{jk}^{\text{ext}}) \in M\} \quad (3.7)$$

と定めると, A は実行可能完全割当である.

証明 M が (3.1) と (3.2) を満たすので, (3.7) から A は (2.3) を満たす. 同様に M が (3.1) と (3.3) を満たすことより A は (2.1) を満たし, M が (3.6) を満たすことより A は (2.6) を満たす. M は (3.6) すなわち $|M| = n$ を満たすので, (3.4) から拡張枠への総配属人数 $\sum_{k=1}^l \sum_{j:d_j \in D_k} |M(d_{jk}^{\text{ext}})|$ を消去すると

$$\sum_{k=1}^l \sum_{j:d_j \in D_k} p_{jk} \leq \sum_{k=1}^l \sum_{j:d_j \in D_k} |M(d_{jk}^{\text{reg}})|$$

を得るが, (3.1) より

$$|M(d_{jk}^{\text{reg}})| = p_{jk} \quad (k = 1, \dots, l; d_j \in D_k)$$

でなければならず, A は (2.4) を満たす. 以上より A は実行可能完全割当である. \square

逆に実行可能完全割当から実行可能完全マッチングも構成できるので, 仮定 (A1) は実行可能完全マッチングの存在を意味している.

学生の選好順序や学科の優先順位については, 以下のように拡張する. 学生 $s \in G_k$ の D_k^* に対する選好順序は, s の D_k に対する選好順序において $d_j \in D_k$ を $d_{jk}^{\text{reg}}, d_{jk}^{\text{ext}}$ の順に置き換えたものとする, すなわち各学生は学科に対する選好順序を引き継ぎ, 通常枠を拡張枠より好むとする. また, $d_{jk}^{\text{reg}}, d_{jk}^{\text{ext}}$ には学門 G_k の学生のみ配属可能なので, 通常枠 d_{jk}^{reg} と拡張枠 d_{jk}^{ext} の学生に対する優先順位は, 元の学科 d_j の優先順位から順序を保存したまま G_k の学生を抜き出したものとする.

次に学生の選好順序と学科の優先順位を表現するために, 2つの正の重みベクトル $\mathbf{a} = (a_{sd} > 0 : (s, d) \in E^*), \mathbf{b} = (b_{sd} > 0 : (s, d) \in E^*) \in \mathbb{R}^{E^*}$ を導入する. これらは, $(s, d), (s, d'), (s', d) \in E^* (d \neq d', s \neq s')$ に対して,

$$a_{sd} > a_{sd'} \Leftrightarrow d \succ_s d', \quad b_{sd} > b_{s'd} \Leftrightarrow s \succ_d s'$$

を満たすとする. 重みベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を用いて学生の評価関数 $f_S : 2^{E^*} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ と学科の評価関数 $f_D : 2^{E^*} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ を次のように定義する:

$$f_S(M) = \begin{cases} \sum_{(s,d) \in M} a_{sd} & (M \text{ が (3.5) を満たす}) \\ -\infty & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (M \subseteq E^*), \quad (3.8)$$

$$f_D(M) = \begin{cases} \sum_{(s,d) \in M} b_{sd} & (M \text{ が (3.1)~(3.4) を満たす}) \\ -\infty & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (M \subseteq E^*). \quad (3.9)$$

f_S と f_D は次の性質をもつ.

命題 3.3. f_S と f_D は実効定義域が遺伝的な M^\sharp 凹関数である.

証明 定義より f_S と f_D の実効定義域が遺伝的なことは明らかである. 一方, f_S も f_D も層型凹関数であることが簡単に示せるので, 例 3.1 より f_S も f_D も M^\sharp 凹関数である. \square

次にマッチングの安定性を離散凸解析の言葉で表現するが, そのために関数の最大解集合という概念を導入する. 関数 $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ と $M \subseteq V$ に対して, $\text{argmax}\{f(X) : X \subseteq M\}$ を

$$\text{argmax}\{f(X) : X \subseteq M\} = \{X \subseteq M : f(X) \geq f(Y), Y \subseteq M\}$$

と定義する. 線形関数を適宜加え f を摂動する[¶]ことにより, $\text{argmax}\{f(X) : X \subseteq M\}$ が単集合としても一般性を失わない. 安定性の表現を簡潔にするために $\text{argmax}\{f(X) : X \subseteq M\}$ は単集合とし, M の部分集合の中の最大解そのものを表すとする. f が M^\sharp 凹関数のとき, $\text{argmax}\{f(X) : X \subseteq M\}$ は, f の値を計算するオラクルの存在を仮定したとき $|V|$ に関する多項式時間で求まる ([12, 13] 参照).

[¶]線形関数を f に加えても f の M^\sharp 凹性は保存される.

M^{\sharp} 凹評価関数を用いたマッチングの安定性の定義 ([4, 7, 11] を参照) を (3.8), (3.9) で定まる M^{\sharp} 凹評価関数 f_S, f_D に適用する. マッチング M が

$$M = \operatorname{argmax}\{f_S(Y) : Y \subseteq M\}, \quad M = \operatorname{argmax}\{f_D(Y) : Y \subseteq M\} \quad (3.10)$$

を満たすとき, M は**個人合理的**であるという. (3.10) は M が実行可能であり, かつどの学生もどの学科も M 内の配属をやめる動機がないと解釈できる. 実行可能マッチング M と $e = (s, d) \in E^* \setminus M$ に対して,

$$e \in \operatorname{argmax}\{f_S(Y) : Y \subseteq M \cup \{e\}\} \cap \operatorname{argmax}\{f_D(Y) : Y \subseteq M \cup \{e\}\}$$

が成り立つとき, $e = (s, d)$ を M に対する**ブロッキングペア**という. ブロッキングペア (s, d) 内の学生 s と学科 d はそれぞれ M での配属を壊して互いにペアを作る動機をもつと解釈できる. マッチング M が個人合理的で, かつ M に対するブロッキングペアが存在しないとき, M は**安定**であるという. 第 2 節と同様に実行可能安定 (完全) マッチングを単に安定 (完全) マッチングとよぶ.

命題 3.4. 安定完全マッチング $M \subseteq E^*$ に対して, (3.7) で定まる割当 $A \subseteq E$ は限定安定完全割当である.

証明 命題 3.2 より, A は実行可能完全割当である. $q_{jk} = |A(d_j) \cap G_k|$ ($G_k \in \mathcal{G}, d_j \in D_k$) と上限を変更したとき, A が (第 2 節の意味で) 安定であること, すなわち任意に (BP-s) を満たす $(s, d_j) \in E \setminus A$ に対して, (BP-d1) と (BP-d2) がともに不成立であることを示す. $s \in G_k$ とし, $d_h = A(s)$ とする.

$$A' = (A \setminus \{(s, d_h)\}) \cup \{(s, d_j)\} \text{ とすると}$$

$$|A'(d_j) \cap G_k| = |A(d_j) \cap G_k| + 1 = q_{jk} + 1$$

となるため上限変更後において A' は実行可能ではなく, (s, d_j) は (BP-d1) を満たさない.

仮に (BP-d2) が成り立つと仮定する. すなわち $s \succ_{d_j} s'$ を満たす $s' \in A(d_j)$ が存在して, $A'' = (A \setminus \{(s, d_h), (s', d_j)\}) \cup \{(s, d_j)\}$ が (第 2 節の意味で) 実行可能マッチングとなる. 上記の (BP-d1) の議論と同様に $s' \notin G_k$ であると A'' は実行可能ではなくなるので, $s' \in G_k$ でなければならない.

s' は M において学科 d_j に対応する通常枠あるいは拡張枠に配属されているが, これを d_{jk}^* と表記する. 同様に s は M において学科 d_h の通常枠か拡張枠に配属されているが, これを d_{hk}^{\dagger} と表記する. $d_j \succ_s d_h$ より $a_{sd_{jk}^*} > a_{sd_{hk}^{\dagger}}$ であり, f_S の定義 (3.8) より

$$(M \setminus \{(s, d_{hk}^{\dagger})\}) \cup \{(s, d_{jk}^*)\} = \operatorname{argmax}\{f_S(Y) : Y \subseteq M \cup \{(s, d_{jk}^*)\}\}$$

となる. 一方, $M' = (M \setminus \{(s', d_{jk}^*)\}) \cup \{(s, d_{jk}^*)\}$ は (3.1)~(3.4) を満たし, $s \succ_{d_j} s'$ より $b_{sd_{jk}^*} > b_{s'd_{jk}^*}$ であるから f_D の定義 (3.9) より

$$f_D(M') - f_D(M) = b_{sd_{jk}^*} - b_{s'd_{jk}^*} > 0$$

となる. これと M が (3.10) を満たすことより

$$(s, d_{jk}^*) \in \operatorname{argmax}\{f_D(Y) : Y \subseteq M \cup \{(s, d_{jk}^*)\}\}$$

でなければならない。上記より、 (s, d_{jk}^*) は M に対するブロッキングペアとなり、 M の安定性に矛盾する。よって (s, d_j) は (BP-d2) を満たさない。□

一般に、実効定義域が遺伝的な M^{\sharp} 凹評価関数 f_S, f_D に対して、[7] のモデルの特殊な場合としてマッチングの安定性は次のように特徴付けられる。

命題 3.5. [7] 実効定義域が遺伝的な M^{\sharp} 凹評価関数 $f_S, f_D : 2^{E^*} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ に対して、マッチング M が安定であるための必要十分条件は次の条件

$$M = \operatorname{argmax}\{f_S(Y) : Y \subseteq Z_S\}, \quad M = \operatorname{argmax}\{f_D(Y) : Y \subseteq Z_D\}, \quad Z_S \cup Z_D = E^* \quad (3.11)$$

を満たす $Z_S, Z_D \subseteq E^*$ が存在することである。□

3.2. 一般化 Gale-Shapley アルゴリズム

本節では、(3.11) を満たす M, Z_S, Z_D を求める一般化 Gale-Shapley アルゴリズム (GGS) [4] を記述し、その性質を調べる。

アルゴリズム GGS

Step 0: $Z_S = E^*, Z_D = \emptyset, M = \emptyset, M' = \emptyset$ とする。

Step 1: $M = \operatorname{argmax}\{f_S(X) : M' \subseteq X \subseteq Z_S\}$ とする。

Step 2: $M' = \operatorname{argmax}\{f_D(Y) : Y \subseteq M\}$ とする。

Step 3: $M = M'$ ならば $Z_D = Z_D \cup M$ とし (M, Z_S, Z_D) を出力し終了; そうでないならば $Z_S = Z_S \setminus (M \setminus M'), Z_D = Z_D \cup (M \setminus M')$ として Step 1 に戻る。

GGS の出力について次のことが知られている。

命題 3.6. [4] 実効定義域が遺伝的な M^{\sharp} 凹評価関数 $f_S, f_D : 2^{E^*} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ に対して、GGS は $|E^*|$ に関する多項式時間で (3.11) を満たす (M, Z_S, Z_D) を出力する。□

命題 3.3, 命題 3.5, 命題 3.6 より (3.8), (3.9) で定まる M^{\sharp} 凹評価関数 f_S, f_D に対して、GGS は必ず安定マッチングを出力する。しかし出力が安定完全マッチングである保証はない。GGS の出力の完全性について次のことがいえる。

命題 3.7. GGS の出力した安定マッチング M が完全でないならば、すなわち配属されない学生が存在するならば、 M に対し次のうち少なくとも一方が成り立つ。

(C1) 上限まで配属されない通常枠が存在する。

(C2) 配属されない学生の所属する学門 G_i に対して、 $|M(d_{j'i}^{\text{ext}})| < q_{j'i} - p_{j'i}$ となる拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ が存在する。そのような任意の拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ に対しては

$$\sum_{k:d_{j'k} \in D_k} |M(d_{j'k}^{\text{ext}})| = q_{j'} - \sum_{k:d_{j'k} \in D_k} p_{j'k}$$

が成立する、すなわち $d_{j'}$ に対応する拡張枠に対して (3.3) が等号で成立する。

証明 M を完全でない出力とする。完全性の定義 (3.6) より M によって配属されない学生が存在する。(C1) が成立しないときに (C2) が成立することを示す。配属されない学生を 1 人固定し、その学生を s 、 s が所属する学門を G_i とする。

M ではすべての通常枠に学生が上限まで配属されることから、学門 G_i に対するすべての拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ に対して $|(M \cup \{(s, d_{j'i}^{\text{ext}})\})|(d_{j'i}^{\text{ext}}) > q_{ji} - p_{ji}$ が成り立つとすると、実行可能マッチングが存在する上下制限約であることに反する。そのため $|(M \cup \{(s, d_{j'i}^{\text{ext}})\})|(d_{j'i}^{\text{ext}}) \leq q_{j'i} - p_{j'i}$ 、すなわち $|M(d_{j'i}^{\text{ext}})| < q_{j'i} - p_{j'i}$ となる拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ が存在する。

$|M(d_{j'i}^{\text{ext}})| < q_{j'i} - p_{j'i}$ かつ $\sum_{k:d_{j'k} \in D_k} |M(d_{j'k}^{\text{ext}})| < q_{j'} - \sum_{k:d_{j'k} \in D_k} p_{j'k}$ となる拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ が存在すると仮定する. この拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ に対し, $M' = M \cup \{(s, d_{j'i}^{\text{ext}})\}$ が実行可能であることを示す. M により通常枠は上限まで配属されていることより, M' も (3.1) を満たす. $|M'(d_{j'i}^{\text{ext}})| = |M(d_{j'i}^{\text{ext}})| + 1$ であり, $d_{j'i}^{\text{ext}}$ 以外の拡張枠 d に対して $|M'(d)| = |M(d)|$ であるので, M' は (3.2) と (3.3) を満たす. M' に対して (3.1) が等号で成立し, s は M で配属されていないので, M' は (3.4) を満たす. また, M' は明らかに (3.5) を満たす. 以上より $M' = M \cup \{(s, d_{j'i}^{\text{ext}})\}$ は実行可能である. このとき f_S, f_D の定義より $f_S(M \cup \{(s, d_{j'i}^{\text{ext}})\}) > f_S(M)$ かつ $f_D(M \cup \{(s, d_{j'i}^{\text{ext}})\}) > f_D(M)$ となるため, $(s, d_{j'i}^{\text{ext}})$ が M に対するブロッキングペアとなり M の安定性に矛盾する. 以上より, (C2) の後半の主張が成立しなければならない. \square

3.3. 提案アルゴリズム

学生の選好順序, 学科の優先順位, 学門学科間上下限 q_{jk}, p_{jk} , 学科上限 q_j により (3.8), (3.9) で定義される評価関数 f_S, f_D に対して, GGS を基に安定完全マッチングを求めるアルゴリズムを提案する. GGS が出力した安定マッチングが完全でない場合に, 命題 3.7 の (C1), (C2) に対応する手続きを導入する.

まず命題 3.7 の (C1) である場合を考える. このとき通常枠の定員を埋める操作が必要である. この操作として, 他学科の拡張枠の上限を減らすことで, この学科の拡張枠に配属された学生を通常枠へ誘導する. 次の命題 3.8 は, 上限を減らすべき拡張枠が存在することを保証する.

命題 3.8. 仮定 (A1) の下で GGS の出力 M が命題 3.7 の (C1) を満たすとする. $|M(d_{jk}^{\text{reg}})| < p_{jk}$ である通常枠 d_{jk}^{reg} に対して, 同じ学門 G_k から配属可能な拡張枠 $d_{j'k}^{\text{ext}}$ で次の 2 条件を満たすものが存在する.

- $|M(d_{j'k}^{\text{ext}})| \geq 1$,
- $d_{j'k}^{\text{ext}}$ の上限を 1 減らしても (A1) が保存される.

証明 変更前の上下制限約における実行可能完全マッチングを M' とする. M は安定マッチングであるため, 学門 G_k から配属可能である通常枠に空きがあることから, G_k に属するすべての学生は M において配属されている (そうでなければ配属されない学生と d_{jk}^{reg} のペアがブロッキングペアとなるからである).

M と M' では, G_k のすべての学生が学科に配属されていることから, $|M(d_{j'k}^{\text{ext}})| > |M'(d_{j'k}^{\text{ext}})|$ となる拡張枠 $d_{j'k}^{\text{ext}}$ が存在する. この拡張枠 $d_{j'k}^{\text{ext}}$ の上限を 1 減らしたとしても M' が実行可能完全マッチングであるため, 主張の条件を満たす拡張枠が存在する. \square

次に命題 3.7 の (C1) が不成立で, (C2) が成立する場合を考える. このときすべての通常枠は満席であるから, 配属されない学生が出てしまう原因は, その学生が本来配属できるすべての学科 d_j に対して, 対応する通常枠と拡張枠の配属人数の合計が上限 q_j まで達していることにある. そこで, 未配属の学生とは別の学門に対する拡張枠の上限を 1 つ減らすことで学科 d_j に空きを作る. 次の命題 3.9 により減らすべき拡張枠の上限が存在することが保証される.

命題 3.9. 仮定 (A1) の下で, GGS の出力 M が命題 3.7 の (C1) を満たさず, (C2) を満たすとする. M で配属されていない学生 $s \in G_i$ に対して, 次の 2 条件を満たす拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ と $d_{j'k'}^{\text{ext}}$ ($i \neq k'$) が存在する.

- $|M(d_{j'i}^{\text{ext}})| < q_{j'i} - p_{j'i}$ かつ $\sum_{k:d_{j'k} \in D_k} |M(d_{j'k}^{\text{ext}})| = q_{j'} - \sum_{k:d_{j'k} \in D_k} p_{j'k}$,
- $d_{j'k'}^{\text{ext}}$ の上限を 1 減らしても (A1) が保存される.

証明 変更前の上下制限約における実行可能完全マッチングを M' とする. M' は完全で M は (C1) を満たさないので

$$\sum_{j:d_j \in D_i} |M(d_{ji}^{\text{ext}})| < \sum_{j:d_j \in D_i} |M'(d_{ji}^{\text{ext}})| = n_i - \sum_{j:d_j \in D_i} p_{ji}$$

となる. そのため

$$|M(d_{ji}^{\text{ext}})| < |M'(d_{ji}^{\text{ext}})| \leq q_{j'i} - p_{j'i} \quad (3.12)$$

となる拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ が存在する. 命題 3.7 の (C2) より, M は

$$\sum_{k:d_{j'} \in D_k} |M(d_{j'k}^{\text{ext}})| = q_{j'} - \sum_{k:d_{j'} \in D_k} p_{j'k} \quad (3.13)$$

を満たす. 一方, M' は (3.3) を満たすので

$$\sum_{k:d_{j'} \in D_k} |M'(d_{j'k}^{\text{ext}})| \leq q_{j'} - \sum_{k:d_{j'} \in D_k} p_{j'k}$$

を満たすが, この不等式と (3.12), (3.13) より, $|M'(d_{j'k}^{\text{ext}})| < |M(d_{j'k}^{\text{ext}})|$ となる学門 $G_{k'}$ が存在する. $d_{j'k}^{\text{ext}}$ に対する上限を 1 減らした場合においても, M' は実行可能完全マッチングである. したがって, $d_{j'i}^{\text{ext}}$ と $d_{j'k}^{\text{ext}}$ は主張を満たす. \square

以上の手続きを踏まえて, 安定完全マッチングを求める提案アルゴリズム (Modified-GGS) は以下のように記述される.

アルゴリズム Modified-GGS

Step 1: GGS を実行し, それにより出力された安定マッチング M が完全ならば M を出力して終了.

Step 2: 上限に達していない通常枠 d_{jk}^{reg} を探索する. そのような通常枠が存在するならば Step 3 へ, そうでないならば Step 4 へ進む.

Step 3: 学門 G_k から配属可能な拡張枠の中で, 命題 3.8 で述べた次の 2 条件を満たす拡張枠 $d_{j'k}^{\text{ext}}$ を探索する:

- a. $|M(d_{j'k}^{\text{ext}})| \geq 1$,
- b. $d_{j'k}^{\text{ext}}$ の上限を 1 減らしても (A1) が保存される.

ただし, 上限を減らせる拡張枠が複数ある場合は, 候補の中で成績が最も低い学生が所属する拡張枠を選択する. その拡張枠 $d_{j'k}^{\text{ext}}$ の上限を 1 減らし Step 1 に戻る.

Step 4: 配属されない学生が存在する学門 G_i について, 命題 3.9 で述べた次の 2 条件を満たす拡張枠 $d_{j'i}^{\text{ext}}$ と $d_{j'k}^{\text{ext}}$ を探索する:

- a. $|M(d_{j'i}^{\text{ext}})| < q_{j'i} - p_{j'i}$ かつ $\sum_{k:d_{j'} \in D_k} |M(d_{j'k}^{\text{ext}})| = q_{j'} - \sum_{k:d_{j'} \in D_k} p_{j'k}$,
- b. $d_{j'k}^{\text{ext}}$ の上限を 1 減らしても (A1) が保存される.

ただし, 上限を減らせる拡張枠が複数ある場合は, 候補の中で成績が最も低い学生が所属する拡張枠を選択する. その拡張枠 $d_{j'k}^{\text{ext}}$ の上限を 1 減らし Step 1 に戻る.

Modified-GGS は, Step 1 で GGS が完全でない安定マッチングを出力した場合, Step 2 では命題 3.7 の 2 条件のどちらに対応するか判別し, Step 3 で (C1) に対応する手続きを取り,

Step 4で(C2)に対応する手続きをとる。これらの操作を繰り返し行うことにより、GGsにより安定完全マッチングが出力される上下限制約に変更する。Modified-GGSの出力について次のことがいえる。

定理 3.10. 仮定(A1)の下で、Modified-GGSは学生数、学門数、学科数に関する多項式時間で停止し、出力 M から(3.7)で構成された割当 $A \subseteq E$ は限定安定完全割当となる^{||}。

証明 (A1)を仮定しているので、命題3.8と命題3.9より、すべての反復において(A1)を保存する。各反復では拡張枠の上限が必ず1つ減ることから、最大で $\sum_{k=1}^l \sum_{j:d_j \in D_k} q_{jk} - n \leq 2lmn$ 回の反復で終了する。各反復ではGGsは lmn に関する多項式時間で終了し、上限を減らした際の(A1)の判定等の他の部分も lmn の多項式時間で終了する。

Modified-GGSが終了したとき、(A1)が成り立つ上下限制約の下でGGsが安定完全マッチング M を出力する。命題3.4より、 M に対して(3.7)で構成された割当 $A \subseteq E$ は限定安定完全割当である。□

Modified-GGSの実行例を見てみる。

例 3.11. $S = \{s_1, s_2, \dots, s_6\}$, $D = \{d_1, d_2\}$, $\mathcal{G} = \{G_1 = \{s_1, s_2\}, G_2 = \{s_3, s_4\}, G_3 = \{s_5, s_6\}\}$ とする。学生は添え字が小さいほど成績が良いものとする。すべての学生 s の選好順序は $d_1 \succ_s d_2$ とする。各学科 d の優先順位は $s_1 \succ_d s_2 \succ_d \dots \succ_d s_6$ とし、学門学科間の上下限と学科定員(上限)は下表の通りとする。

	学門 G_1	学門 G_2	学門 G_3	定員
学科 d_1	0 ~ 2	0 ~ 2	0 ~ 1	3
学科 d_2	1 ~ 1	0 ~ 1	0 ~ 1	3

これらの学科を通常枠、拡張枠に分割した際の上限は下表のようになる。

	学門 G_1		学門 G_2		学門 G_3		定員
	通常枠	拡張枠	通常枠	拡張枠	通常枠	拡張枠	
学科 d_1	0	2	0	2	0	1	3
学科 d_2	1	0	0	1	0	1	3

この入力に対しModified-GGSを実行すると次のようになる。

第1反復: Step 1でGGsが $\{(s_1, d_{11}^{\text{ext}}), (s_2, d_{11}^{\text{ext}}), (s_3, d_{12}^{\text{ext}}), (s_4, d_{22}^{\text{ext}}), (s_5, d_{23}^{\text{ext}})\}$ を出力し、 s_6 が割り当てられないので完全ではない。Step 2, Step 3で通常枠 d_{21}^{reg} に空きがあるので、拡張枠 d_{11}^{ext} の上限を1減らす。

第2反復: Step 1でGGsが $\{(s_1, d_{11}^{\text{ext}}), (s_2, d_{21}^{\text{reg}}), (s_3, d_{12}^{\text{ext}}), (s_4, d_{12}^{\text{ext}}), (s_5, d_{23}^{\text{ext}})\}$ を出力し、 s_6 が割り当てられないので完全ではない。通常枠に空きがないため、Step 2, Step 4で拡張枠 d_{12}^{ext} の上限を1減らす。

第3反復: Step 1でGGsが $\{(s_1, d_{11}^{\text{ext}}), (s_2, d_{21}^{\text{reg}}), (s_3, d_{12}^{\text{ext}}), (s_4, d_{22}^{\text{ext}}), (s_5, d_{13}^{\text{ext}}), (s_6, d_{23}^{\text{ext}})\}$ を出力し、安定完全マッチングなのでアルゴリズムが終了する。対応する限定安定完全割当

$$\{(s_1, d_1), (s_2, d_2), (s_3, d_1), (s_4, d_2), (s_5, d_1), (s_6, d_2)\}$$

が求まる。□

^{||}Modified-GGSでは学門学科間の上限を減らす操作が入るが、最終的な学門学科間上限に対して限定安定完全割当ならば元々の学門学科間上限に対しても限定安定完全割当となる。

例 3.12. $S = \{a, b, c, d\}$, $D = \{A, B\}$, $\mathcal{G} = \{G_1 = \{a, b\}, G_2 = \{c, d\}\}$ とする. 学生の選好順序を

$$B \succ_a A, \quad A \succ_b B, \quad B \succ_c A, \quad B \succ_d A$$

とし, 学科の優先順位を

$$a \succ_A b \succ_A c \succ_A d, \quad b \succ_B c \succ_B d \succ_B a$$

とする. 学門から学科への配属人数については, G_1 から $A \rightarrow 1 \sim 1$ 名, $B \rightarrow 0 \sim 2$ 名とし, G_2 から $A \rightarrow 0 \sim 1$ 名, $B \rightarrow 0 \sim 2$ 名とし, 各学科の定員を 2 名とする. このとき Modified-GGS を実行すると 1 回の GGS 実行後に $M = \{(a, A), (b, B), (c, B), (d, A)\}$ が出力される. この結果から各学門から各学科への配属人数の定員を 1 と定めてみる. この定員の下に GS(学事システム)により安定完全マッチングを出力すると $M^* = \{(a, B), (b, A), (c, B), (d, A)\}$ となり, この場合 $M^* \neq M$ となる. M は安定マッチングであるが, M^* は学生最適安定マッチングとなっている. \square

例 3.12 のように, 学門学科間の定員を決める限定安定完全割当 M とこれを用いた上限変更後に GS により求めた安定完全マッチング M^* が一致するとは限らない. 最後にこれらが一致するための十分条件を与える. 重みベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の成分の大小関係が一致するとき, すなわち

$$a_{sd} > a_{s'd'} \Leftrightarrow b_{sd} > b_{s'd'} \quad ((s, d), (s', d') \in E^*, (s, d) \neq (s', d')) \quad (3.14)$$

が成り立つときを考える. このとき以下の定理が成り立つ.

定理 3.13. 学生の選好順序を表現する \mathbf{a} と学科の優先順位を表現する \mathbf{b} が (3.14) を満たすとする. このとき, 安定完全マッチング M に対して, (3.7) を用いて割当 $A \subseteq E$ を構成する. 学門 G_k と学科 $d_j \in D_k$ 間の定員を $|A(d_j) \cap G_k|$ とした状況において, A は唯一の安定完全割当である. \square

定理 3.13 より, \mathbf{a}, \mathbf{b} が (3.14) を満たす場合は, 図 2 において Modified-GGS の出力 M から (3.7) で構成した限定安定完全割当 A と学事システム (GS) を用いて計算した安定完全マッチング A' は一致する. 定理 3.13 の証明の前に, (3.14) の妥当性を示す例を与える.

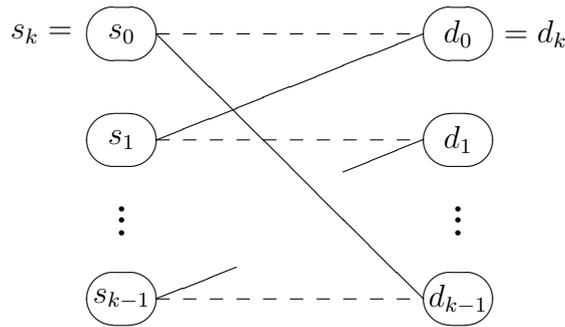
例 3.14. (成績優先) 学生 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ が成績順に並んでいるとする. このとき, 各学科 d が成績の良い学生を優先させるとする, すなわち $s_1 \succ_d s_2 \succ_d \dots \succ_d s_n$ とする. 例えば, 下表のような $S = \{a, b, c, d\}$, $D = \{A, B, C\}$ と各学生の選好順序において

	第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	成績順位
(学生) a	A	B	C	1
b	A	C	B	2
c	B	C	A	3
d	A	C	B	4

学科の優先順位を表現する重みベクトル \mathbf{b} を

$$b_{(a,A)} > b_{(a,B)} > b_{(a,C)} > b_{(b,A)} > b_{(b,C)} > b_{(b,B)} > \dots > b_{(d,A)} > b_{(d,C)} > b_{(d,B)} > 0$$

と定めると各学科の優先順位を表現できる. 一方, \mathbf{b} は各学生の選好順序も反映しているため, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ とできる. \square

図 4: $A \Delta A'$ の連結成分に含まれる閉路

例 3.15. (希望優先) 例 3.14 のように学生の成績順と選好順序の表が与えられているとする. このとき, 各学科 d は第 1 希望者の中で成績順に優先し, 次に第 2 希望者の中で成績順に優先するというように, d に対する希望順位の高い学生を優先し, 希望順位が同じ場合は成績の良いものを優先させるとする. 例えば, 例 3.14 の表に対して, 学科の優先順位を表現する重みベクトル \mathbf{b} を

$$b_{(a,A)} > b_{(b,A)} > b_{(c,B)} > b_{(d,A)} > b_{(a,B)} > \cdots > b_{(a,C)} > b_{(b,B)} > b_{(c,A)} > b_{(d,B)} > 0$$

と定めると各学科の優先順位を表現できる. また \mathbf{b} は各学生の選好順序も反映しているため, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ とできる. \square

例 3.16. (混合型) 例 3.14 のように学生の成績順と選好順序の表が与えられているとする. 成績優先と希望優先の混合型, 例えば, 「成績順の上位 50% は成績優先で優先順位をまず付け, 下位 50% は希望優先とする」なども例 3.14, 例 3.15 と同様に (3.14) を満たしつつ, 学生の選好順序と学科の優先順位を表現できる. \square

定理 3.13 の証明 命題 3.4 より A は限定安定完全割当であるので, 学門学科間の上限を $|A(d_j) \cap G_k|$ と変更した後では A は安定完全割当となる. 他に A とは異なる安定完全割当 A' が存在したとする. A と A' をグラフ $G = (S \cup D, E)$ の辺の部分集合として表現する. また, 各学生 s の選好順序において学科 d の通常枠 d^{reg} と拡張枠 d^{ext} が連続して現れるので, E 上の重みを $w_{sd} = a_{sd}^{\text{reg}}$ とする ($(s, d) \in E$). \mathbf{a}, \mathbf{b} が (3.14) を満たすので, $(s, d), (s, d'), (s', d) \in E$ ($s \neq s', d \neq d'$) に対して次の関係が成り立つ.

$$d \succ_s d' \Leftrightarrow w_{sd} > w_{sd'}, \quad s \succ_d s' \Leftrightarrow w_{sd} > w_{s'd}.$$

A でも A' でも全ての学生が配属され, G_k と $d_j \in D_k$ の間には同数の学生が配属されるので, グラフ G の各頂点に A と A' の同数の辺が接続している. すなわち $\tilde{G} = (S \cup D, A \Delta A')$ の各頂点の次数は偶数で A と A' の同数の辺が接続し, $A \neq A'$ より辺を含む \tilde{G} の連結成分が存在し, その連結成分は単純交互閉路に分解できる. このような単純交互閉路の 1 つを $s_0 \rightarrow d_0 \rightarrow s_1 \rightarrow d_1 \rightarrow \cdots \rightarrow s_{k-1} \rightarrow d_{k-1} \rightarrow s_k = s_0$ とする ($d_k = d_0$). これを図示すると図 4 のようになる. 実線を A' に属す辺, 破線を A に属す辺とする.

この閉路内では以下のどちらかが成り立つ.

- s_i ($1 \leq i \leq k$) に対し $d_i \succ_{s_i} d_{i-1}$ (かつ $d_0 \succ_{s_0} d_{k-1}$)
- s_i ($1 \leq i \leq k$) に対し $d_{i-1} \succ_{s_i} d_i$ (かつ $d_{k-1} \succ_{s_0} d_0$)

そうでなければ, A の安定性または A' の安定性に矛盾する. 上記の第 1 の場合を仮定する (第 2 の場合も同様である). すなわち, 各学生 s_i は d_{i-1} よりも d_i を好むとする. ただし s_0

は d_{k-1} よりも d_0 を好むとする. 辺の重みの付け方から任意の i に対して $w_{s_i d_i} > w_{s_i d_{i-1}}$ が成り立つ. また $w_{s_{j+1} d_j} < w_{s_j d_j}$ となる d_j が存在すると (s_j, d_j) が A' のブロッキングペアとなるため, A' の安定性に矛盾する. よって任意の j に対して $w_{s_{j+1} d_j} > w_{s_j d_j}$ が成り立つ. これらの不等式をまとめると

$$w_{s_0 d_0} < w_{s_1 d_0} < w_{s_1 d_1} < w_{s_2 d_1} < \cdots < w_{s_{k-1} d_{k-2}} < w_{s_{k-1} d_{k-1}} < w_{s_k d_{k-1}} < w_{s_k d_k} = w_{s_0 d_0}$$

となり矛盾する. よって $A = A'$ となる. □

4. 貪欲法を用いた解法

第 2 節のモデルにおいて, 学科の優先順位が特殊な場合について, 貪欲法を用いた限定安定完全割当を求めるアルゴリズムを提案する. (2.1)~(2.4) のすべての条件を考慮するため, 第 3 節のアルゴリズムとは相互依存性はない別のアルゴリズムである. 第 3 節で仮定した (A1) と次の (A3) を仮定する.

(A3) E に対して次の条件を満たす全順序 \succeq_E が存在する**:

$$(s, d) \succeq_E (s, d') \Leftrightarrow d \succeq_s d', \quad (s, d) \succeq_E (s', d) \Leftrightarrow s \succeq_d s', \quad ((s, d), (s, d'), (s', d) \in E).$$

(A1) は学生全員が配属されるための必須条件である. (A3) は第 3 節の学生の選好順序と学科の優先順位を表現するベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に関する条件 (3.14) と同様の条件であり, 学生は自由に選好順序を表明するが, 学科の優先順位がそれと整合的な場合と解釈する. 例 3.14, 3.15, 3.16 のような状況を表現できる妥当なものである.

提案アルゴリズムを記述するために記号を導入する. $E' \subseteq E$ としたとき, $\sup(E')$ は E' の中で \succeq_E の意味で最大な要素, すなわち任意の $e' \in E'$ に対し $e \succeq_E e'$ となる $e \in E'$ を表すとする. 関数 $\eta: 2^E \rightarrow \{0, -\infty\}$ を導入し, 次のように定義する:

$$\eta(A) = \begin{cases} 0 & (A \subseteq A' \text{ という実行可能完全割当 } A' \text{ が存在する}) \\ -\infty & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (A \subseteq E).$$

$\eta(A)$ の値は, まず A が (2.5) を満たしていない場合は $-\infty$ となり, (2.5) を満たす場合は第 2 節で述べた実行可能流の存在判定問題を解くことで求めることができる. 学門学科間にある辺の容量の下限を $\max\{p_{jk}, |A(d_j) \cap G_k|\}$ として, 実行可能流が存在するときに $\eta(A) = 0$, 存在しないときに $\eta(A) = -\infty$ とすればよい.

限定安定完全割当を求める提案アルゴリズム (Greedy-Alloc) は以下のように記述される.

アルゴリズム Greedy-Alloc

Step 0: $E' = E, A = \emptyset$ とする.

Step 1: $(s', d') = \sup(E')$ として E' を $E' \setminus \{(s', d')\}$ に更新する. $\eta(A \cup \{(s', d')\}) = 0$ である場合 Step 2 に, そうでない場合 Step 3 に進む.

Step 2: A を $A \cup \{(s', d')\}$ に更新する.

Step 3: $E' = \emptyset$ であるならば A を出力し終了. そうでないならば Step 1 に戻る.

提案アルゴリズムの出力について次のことがいえる.

** $(s, d) \succeq_E (s', d')$ かつ $(s, d) \neq (s', d')$ のとき, $(s, d) \succ_E (s', d')$ と表記する.

定理 4.1. 仮定 (A1) と (A3) の下で, Greedy-Alloc は学生数, 学科数に関する多項式時間で停止し, 出力 A は限定安定完全割当となる.

証明 Step 0 において $A = \emptyset$ であり, (A1) を仮定しているのだから A を含む実行可能完全割当が存在する. Step 2 の A の更新より各反復において, 反復終了後の割当 A に対して A を含む実行可能完全割当が存在することが保証される. すなわち Greedy-Alloc は必ず実行可能完全割当を出力する. 計算時間については, η の計算は学門数 $l (\leq n)$, 学科数 m に関する多項式時間で実行でき, 各反復で E' の要素が 1 減るので反復回数は高々 mn である.

Greedy-Alloc の出力 A が限定安定であることを示す. すなわち, $q_{jk} = |A(d_j) \cap G_k|$ ($G_k \in \mathcal{G}, d_j \in D_k$) と上限を変更したとき, A が安定であること, すなわち任意に (BP-s) を満たす $(s, d_j) \in E \setminus A$ に対して, (BP-d1) と (BP-d2) がともに不成立であることを示す. $s \in G_k$ とし, $d_h = A(s)$ とする.

$A' = (A \setminus \{(s, d_h)\}) \cup \{(s, d_j)\}$ とすると

$$|A'(d_j) \cap G_k| = |A(d_j) \cap G_k| + 1 = q_{jk} + 1$$

となるため, 上限変更後において A' は実行可能でなく, (s, d_j) は (BP-d1) を満たさない.

仮に (BP-d2) が成り立つと仮定する. すなわち $s \succ_{d_j} s'$ を満たす $s' \in A(d_j)$ が存在して, $A'' = (A \setminus \{(s, d_h), (s', d_j)\}) \cup \{(s, d_j)\}$ が実行可能マッチングとなる. 上記の (BP-d1) の議論と同様に $s' \notin G_k$ であると A'' は実行可能ではなくなるので, $s' \in G_k$ でなければならない. $d_j \succ_s d_h$ かつ $s \succ_{d_j} s'$ より, $(s, d_j) \succ_E (s, d_h)$ かつ $(s, d_j) \succ_E (s', d_j)$ となるため, (s, d_j) は (s, d_h) と (s', d_j) より前の反復で評価される. $A'' \setminus \{(s, d_h), (s', d_j), (s, d_j)\} = A \setminus \{(s, d_h), (s', d_j), (s, d_j)\}$ であるから, (s, d_j) を評価する反復において, $s, s' \in G_k$ であるから (s, d_j) は Step 2 において割当に追加されるはずであり, Greedy-Alloc の動きに矛盾する. すなわち, (BP-d2) は成り立たない. 以上より, A は限定安定である. \square

定理 3.13 と同様の議論により, 以下の定理が示せる. 定理 4.2 より, 図 2 において Greedy-Alloc の出力 A と学事システム (GS) を用いて計算した安定完全マッチング A' は一致する.

定理 4.2. 仮定 (A1) と (A3) の下で, Greedy-Alloc が出力した限定安定完全割当 A に対して, 学門 G_k と学科 $d_j \in D_k$ の間の定員を $|A(d_j) \cap G_k|$ とした状況において, A は唯一の安定完全割当である. \square

5. 実施例

慶應義塾大学理工学部の 2015 年度と 2016 年度の 1 年生の学科分けにおいて, Modified-GGS と Greedy-Alloc を用いて, 意思決定者の支援を行った. 配属結果については学部全体での総計のみ公開が許可されたため, 第 k 希望 ($k = 1, 2, 3, 4$) の学科に配属された学生数について学部全体での結果を報告する. また, 2013 年度の従来手法 (図 1) の結果と 2013 年度のデータに Modified-GGS を 1 回適用した予備実験の結果も示す.

各学科は例 3.15 の希望優先で学生に対する優先順位を設定するため, 定理 3.13 と定理 4.2 の仮定が満たされる状況であり, 図 2 において Modified-GGS あるいは Greedy-Alloc が求めた配属とこの配属から定めた学門学科間定員に対して学事システムが出力する配属は一致する. 実行するにあたって入力データやパラメータを下記のように設定した.

- 入力データは, 対象学生 (2015 年度 951 名, 2016 年度 921 名) の所属学門と配属可能な学科に対する選好順序, 学生の成績順位, 各学門の所属人数,

- 学門学科間の配属人数の上下限を学門内学生数に対して表 1 の数値の $\pm 5\%$ とし、上限に関しては切り上げ、下限に関しては切り捨てと設定、
- 学科配属人数の上下限を意思決定者の判断で以下のように設定、
 - 2015 年度は、Modified-GGS のみの適用だったので、上限のみを学則定員の 130% の切り上げと設定、
 - 2016 年度は、学生数が学則定員より 11 名少ないため、下限を学則定員 -1 、上限を学則定員の 107% の切り上げと設定。ただし Modified-GGS では下限は無効。

5.1. 2013 年度のデータに対する予備実験の結果

提案手法の良さを意思決定者に説明する際に用いた 2013 年度のデータを用いた Modified-GGS による予備実験の結果を示す。従来手法の最終結果 (表 2(a)) に比べ、Modified-GGS を 1 回実行した結果 (表 2(b)) は第 1 希望の増加に加え、第 2 希望以下の減少が見られる。学門学科間の上下限の初期設定は上記の通りとしたが、この年度については学生の第 1 希望が特定学科に集中することがなく、表 2(a) と (b) の結果の詳細については各学科の配属人数についても大きな差はなかった。表 2(b) の結果に対して意思決定者による厳密な検討がなされた訳ではないため、表 2 の結果は従来手法と提案手法の比較とは言い難いが、この結果が 2015 年度の Modified-GGS の導入の契機となった。表 2 の結果は、学門学科間の定員を変更しながら良い配属を求めるといふ従来手法の難しさを示していると思われる。

表 2: 2013 年度の配属結果の希望順位と人数

(a) 従来手法の配属結果 (学事システムを 8 回実行)			
第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	第 4 希望
1004 名 (90.5%)	62 名 (5.6%)	37 名 (3.3%)	6 名 (0.5%)
(b) Modified-GGS の 1 回の実行結果			
第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	第 4 希望
1018 名 (91.8%)	56 名 (5.0%)	30 名 (2.7%)	5 名 (0.5%)

5.2. 2015 年度の実施結果

Modified-GGS を上記の設定で 1 回実行した結果 (表 3(a)) を初期配属として、意思決定者は図 2 の流れに沿って上下限制約の修正および Modified-GGS が出力した配属の検討を繰り返した。初期配属では幾つかの学科への配属人数が少ないため、意思決定者は学科の配属人数を配慮しつつ、学門学科間の上下限を修正し、7 回目の Modified-GGS の実行結果 (表 3(b)) を最終案とした。7 回の中には上下限を変更すると配属がどう変化するかを確認するという感度分析を目的とした実行も含まれていて、2 時間程度で全作業が終了した^{††}。

5.3. 2016 年度の実施結果

2016 年度については、Modified-GGS と Greedy-Alloc の 2 つのアルゴリズムが適用可能なため、これらの実行結果を意思決定者に提示した。

両アルゴリズムの 1 回目の結果はそれぞれ表 4(a), (b) のようになった。Greedy-Alloc では学科配属人数の下限制約が入るため、表 4(a) の結果はこれ以上悪くはないという示唆を与え、Modified-GGS では学科配属人数の下限制約を無視するため、表 4(b) の結果は

^{††}2014 年度には、9 時間程度 (3 時間 \times 3 日) の時間を費やしていた。

表 3: 2015 年度の配属結果の希望順位と人数

(a) Modified-GGS の 1 回目の配属結果			
第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	第 4 希望
848 名 (89.2%)	57 名 (6.0%)	32 名 (3.4%)	14 名 (1.5%)
(b) Modified-GGS の 7 回目の配属結果			
第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	第 4 希望
849 名 (89.3%)	54 名 (5.7%)	35 名 (3.7%)	13 名 (1.4%)

表 4: 2016 年度の配属結果の希望順位と人数

(a) Greedy-Alloc の 1 回目の配属結果			
第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	第 4 希望
745 名 (80.9%)	72 名 (7.8%)	61 名 (6.6%)	43 名 (4.7%)
(b) Modified-GGS の 1 回目の配属結果			
第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	第 4 希望
785 名 (85.2%)	65 名 (7.1%)	51 名 (5.5%)	20 名 (2.2%)
(c) Modified-GGS の 5 回目の配属結果			
第 1 希望	第 2 希望	第 3 希望	第 4 希望
777 名 (84.4%)	68 名 (7.4%)	55 名 (6.0%)	21 名 (2.3%)

これ以上は良くはないという示唆を与えている。意思決定者は、Modified-GGS の結果 (表 4(b)) を初期配属として利用することを選択し、図 2 の流れに沿って上下限制約の修正および Modified-GGS が出力した配属の検討を繰り返した。学科の配属人数を配慮しつつ、5 回目の Modified-GGS の実行結果 (表 4(c)) を最終案とした。2015 年度とは異なり、意思決定者の希望により 5 回とも学事システム (GS) を実行した。上下限の微調整による感度分析的な Modified-GGS の実行は 5 回の中には含めていないが、3 回の感度分析的試行を行い、2 時間 30 分程度で全作業が終了した。

6. まとめ

学生がグループ分けされた状況の学科配属問題に対して数理モデルを提案し、離散凸解析を利用したアプローチと貪欲法を用いたアプローチを提案した。前者においては、学科配属人数の下限制約を無視したが、学科が学生に対する優先順位を自由に設定できる (下限制約を導入できるかどうかについては未解決である)。一方、後者は学科の優先順位が特殊な場合に適用可能である。両者ともに一長一短はあるが、慶應義塾大学理工学部の学科分けには両者とも適用可能である。離散凸解析を利用したアプローチは現実問題に対して良好な結果を導いた。

謝辞

実際の問題に適用する機会をくださった伊藤公平教授に感謝の意を表します。査読者の方々からいただいたコメントは論文改訂に非常に有益なものでした。本研究は科研費 (16K00023, 26280004) の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] A. Abdulkadiroğlu and T. Sönmez: School choice: A mechanism design approach. *American Economic Review*, **93** (2003), 729–747.
- [2] A. Abdulkadiroğlu, P.A. Pathak and A.E. Roth: The New York City high school match. *American Economic Review P&P*, **95** (2005), 364–367.
- [3] P. Biró, T. Fleiner, R.W. Irving and D.F. Manlove: The college admissions problem with lower and common quotas. *Theoretical Computer Science*, **411** (2010), 3136–3153.
- [4] A. Eguchi, S. Fujishige and A. Tamura: A generalized Gale-Shapley algorithm for a discrete-concave stable-marriage model. In T. Ibaraki, N. Katoh and H. Ono (eds.): *Algorithms and Computation: 14th International Symposium, ISAAC2003* (LNCS 2906, Springer-Verlag, Berlin, 2003), 495–504.
- [5] T. Fleiner: A matroid generalization of the stable matching polytope. In B. Gerards and K. Aardal (eds.): *Integer Programming and Combinatorial Optimization: 8th International IPCO Conference* (LNCS 2081, Springer-Verlag, Berlin, 2001), 105–114.
- [6] D. Fragiadakis, A. Iwasaki, P. Troyan, S. Ueda and M. Yokoo: Strategyproof matching with minimum quotas. *ACM Transactions on Economics and Computation*, **4** (2015), 6:1–6:40.
- [7] S. Fujishige and A. Tamura: A two-sided discrete-concave market with possibly bounded side payments: An approach by discrete convex analysis. *Mathematics of Operations Research*, **32** (2007), 136–154.
- [8] D. Gale. and L.S. Shapley: College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, **69** (1962), 9–15.
- [9] M. Goto, F. Kojima, R. Kurata, A. Tamura and M. Yokoo: Designing matching mechanisms under general distributional constraints. *American Economic Journal: Microeconomics*, **9** (2017), 226–262.
- [10] Y. Kamada and F. Kojima: Efficient matching under distributional constraints: Theory and applications. *American Economic Review*, **105** (2015), 67–99.
- [11] F. Kojima, A. Tamura and M. Yokoo: Designing matching mechanisms under constraints: An approach from discrete convex analysis. *Proceedings of the Seventh International Symposium on Algorithmic Game Theory*, 2014. <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/56189/>
- [12] 室田一雄: 離散凸解析 (共立出版, 2001).
- [13] K. Murota: *Discrete Convex Analysis* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003).
- [14] K. Murota and A. Shioura: M-convex function on generalized polymatroid. *Mathematics of Operations Research*, **24** (1999), 95–105.
- [15] 田村明久: 離散凸解析とゲーム理論 (朝倉書店, 2009).
- [16] S. Ueda, D. Fragiadakis, A. Iwasaki, P. Troyan and M. Yokoo: Strategy-proof mechanisms for two-sided matching with minimum and maximum quotas. *Proceedings of the 11th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, 2012, 1327–1328.

- [17] 医師臨床研修マッチング協議会, <http://www.jrmp.jp/>
- [18] 情報公開：[慶應義塾], https://www.keio.ac.jp/ja/about/assets/data/2016_enrollment_quota.pdf
- [19] 学門制：理工学部 慶應義塾大学, <http://www.st.keio.ac.jp/candidates/learning.html>

田村 明久
慶應義塾大学 理工学部
〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1
E-mail: aki-tamura@math.keio.ac.jp

ABSTRACT

**THE STUDENTS/DEPARTMENTS ALLOCATION PROBLEM WITH
GROUP CONSTRAINTS — AN APPLICATION OF DISCRETE CONVEX
ANALYSIS**

Takashi Akahori Yosuke Sekiguchi Akihisa Tamura
Hitachi, Ltd. *Systemex Corporation* *Keio University*

The first-year students of the Faculty of Science and Technology of Keio University belong to one of the five groups and are allocated to eleven departments just before proceeding to the second grade. Each student must be allocated to one of the three or four departments pre-assigned to her/his group. By constraints on quotas between the groups and the departments, the standard students/departments stable allocation problem is not applicable to this allocation problem. Since eight departments accept students from two groups, a decision-maker, who allocates the first-year students to the departments, repeatedly decided the quotas between the groups and the pre-assigned departments, and solved the standard students/departments stable allocation problem, by trial and error.

In this paper, we propose a variant of the students/departments stable allocation problem in which the students are partitioned into several non-empty sets, and develop two algorithms for the variant or its relaxation problem. We also report results of two algorithms applied to real students/departments allocation problems of the Faculty of Science and Technology of Keio University in academic years 2015 and 2016. Our algorithm applying discrete convex analysis gave nice results for the real allocation problems.