日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 60, 2017, pp. 36–49

総移動距離制約を考慮した Quantiles Share Ratio 最小化型の複数施設配置問題

古田 壮宏　　田中 健一
奈良教育大学　　慶應義塾大学

(受理 2016 年 8 月 4 日; 再受理 2017 年 1 月 12 日)

和文概要　本稿では，公平性を考慮した施設配置を求めるための Quantiles Share Ratio (QsSR) 最小化型の複数施設配置問題を提案する．所得格差を測る指標のひとつである Quintile Share Ratio (QSR) は，所得の高い上位 20%の所得の合計を所得の低い下位 20%の所得の合計で除したものであり，この上位と下位の占有率を一般化したものが QsSR である．Drezner ら (2014) では，所得を施設までの移動距離に置き換えて，需要が線分や矩形上に連続的かつ一様に与えられた場合と，需要がネットワーク上に離散的に分布する場合を対象に，1 つの施設の配置の公平性についての議論が行われている．本論文では，需要と配置候補場所が離散的に与えられる場合を対象に，QsSR を最小化するように，複数施設を同時に配置する数理計画問題としてモデル化し，二分探索を用いた解法を示す．さらに総移動距離の制約を考慮したモデルの拡張について示す．これらについて，荒川区の町丁目のデータを用いて，需要量がすべての需要点で均一の場合と，需要点ごとに異なる場合の 2 つのケースで，QsSR を最小化する配置の特徴や総移動距離の制約の有無による影響を分析した．結果として，総移動距離最小化問題の解と比較して，わずかな総移動距離の増分を許容することで，公平性を大きく改善する配置が得られることを確認した．

キーワード: 施設計画，quintile share ratio，施設配置問題，最適化

1. はじめに

ある種のサービスの提供を考えるとき，そのサービス拠点となる施設をどのような場所に設置するかは重要な問題となる．設置に際しては，需要者に対する効率性や公平性，設置コスト，他のサービス提供施設との関係など様々な要素を考慮する必要がある [3] が，本稿では特に公平性に着目する．例えば，公共性の高い施設サービスなどは，公平性が求められる代表例である．施設サービスの公平性には様々なものが考えられるが，施設配置研究で最もよく用いられるものの 1 つとして「最寄り施設までの移動距離のばらつきが小さいこと」があり，これを実現するために，最大移動距離の最小化，移動距離の分散の最小化をはじめとする様々な指標が提案されている [1, 2, 4, 6, 8–10]

Drezner ら [5] は施設配置の公平性を測るための指標として，QSR（Quintile Share Ratio）を用いたモデルを提案している．QSR は「所得の高い上位 20%の所得の合計」を「所得の低い下位 20%の所得の合計」で除したものである [7]．元々の QSR は所得格差を測る指標であるが，Drezner らは所得の代わりに，各需要点から最寄り施設までの移動距離を用いて施設配置の公平性を評価している．また，同時に貧困層や富裕層などの下位と上位の占有率を表す p $(0 < p \leq 0.5)$，q $(0 < q \leq 0.5)$ を導入し，QSR を一般化した定義を示している [5]．Drezner らは，$p = q = 0.2$ となる通常の QSR のみを対象とし，線分や矩形上に連続的かつ一様に需要が分布する都市に対して施設を 1 つのみ配置する場合の QSR の値を求めたり，ネットワーク上に離散的に分布する需要点を対象に QSR を最小化する 1 施設の配置を求めたりする方法などを提案している．本稿では Drezner らの定義に基づき，QSR の一

般化として，最寄り施設までの移動距離について「距離の大きい上位 $100q\%$の距離の総和」を「距離の小さい下位 $100p\%$の距離の総和」で除したものを Quantiles Share Ratio と定義し，以降 QsSR と表記する．

田中ら [11] は，需要が連続的かつ一様に与えられた線分都市内に施設が 1 つある場合と 2 つある場合について，任意の施設位置についての QSR（$p = q = 0.2$）を陽に導出している．また，田中ら [12] は，QsSR の特殊ケースとして，中央値（Median）で需要を二分（$p = q = 0.5$）する Median Share Ratio（以降，MSR）の利用を提案している．MSR では，サービス対象となる全需要を対象とした値であることや，線分や平面などの都市モデルにおいて解析的な取り扱いが平易になることなどが利点として挙げられている．

本稿では，離散的に需要点と施設（供給点）の配置候補点が与えられるとき，上記のような QSR や MSR という指標を用いて，これらの値が小さいほど公平性の高い施設配置であると考え，最適な施設の配置場所を求める方法を追究する．Drezner ら [5] が 1 施設の場合のみを対象としているのに対し，本稿ではより一般的に P 個の施設を配置する問題を考える．

次節では，まず，需要量がすべて 1 の場合について，QsSR を最小化する配置場所を求める問題を非線形の整数計画問題として定式化する．QsSR はその定義から「上位の移動距離の総和」を「下位の移動距離の総和」で除したもので表される．目的関数が非線形になることから，これを最小化する問題を定式化し，直接的に解を求めることは，一般に難しい．そこで，一般の数理計画ソフトウェアで解を求められるように，元問題を線形化して得られる実行可能性判定問題を定義する．その上で，二分探索の考えに基づいてこの問題を複数回解くことで元の問題の解を得る方法について述べる．

3 節では，QsSR 最小化型の複数施設の配置問題の適用例として，荒川区の町丁目の代表点を用いた分析を行う．需要量がすべての需要点で均一の場合と，需要点ごとに異なる場合の 2 つのケースについて，QSR と MSR を最小化する配置についてその特徴と傾向を分析する．なお，需要量が需要点ごとに異なる場合については，同一地点に複数の需要点を設定して計算する．

4 節では，公平性のみでなく，効率性も同時に考慮するために，総移動距離制約付きの問題を提案する．施設配置を考える上で，公平性は重要な視点であるが，公平性のみで評価した配置は極端に効率性が低い場合もあり，公平性と効率性とを同時に考えることが不可欠である [6]．そこで，効率性を表す最も基本的な施設配置問題である総移動距離最小化問題を利用し，最小となる総移動距離の定数倍という制約の中で，QsSR を最小にする配置を求める問題を考える．そして，総移動距離の制約の無い場合と実際に配置を求めて比較し，その効果を確認する．最後に，まとめと今後の課題について述べる．

2. QsSR 最小化型の複数施設配置問題の定式化

本稿では，各需要点が最も近い施設を利用すると仮定したときに，QsSR を最小化するように，与えられた P 個の施設を配置する問題を提案する．以降，この QsSR 最小化型の配置問題を P-QsSRLP（P-QsSR minimization Location Problem）と呼ぶ．本節では，P-QsSRLP の定式化とその解法について示す．なお，以降では，各需要点の最寄り施設までの移動距離について，移動距離の小さい下位 $100p\%$の需要点の集合をクラス L，移動距離の大きい上位 $100q\%$の需要点の集合をクラス U，それら以外の需要点の集合をクラス M とする．

2.1. *P*-QsSRLP の定式化

P-QsSRLP を定式化するために以下の記号を用いる．

入力

I： 需要点集合, $N = |I|$

J： 施設の配置候補点の集合

d_{ij}： 需要点 $i \in I$ から配置候補点 $j \in J$ までの移動距離

P： 配置する施設数

B： 十分に大きい定数

決定変数

x_{ij}^{U}： 需要点 i が配置候補点 j に設置された施設に割り当てられ，クラス U に属するとき 1，そうでないとき 0 をとる 0-1 変数

x_{ij}^{L}： 需要点 i が配置候補点 j に設置された施設に割り当てられ，クラス L に属するとき 1，そうでないとき 0 をとる 0-1 変数

x_{ij}^{M}： 需要点 i が配置候補点 j に設置された施設に割り当てられ，クラス M に属するとき 1，そうでないとき 0 をとる 0-1 変数

y_j： 配置候補点 j に施設を配置するとき 1，そうでないとき 0 をとる 0-1 変数

$t^{\mathrm{L}}, t^{\mathrm{U}}$： 需要点がどのクラスに属するかを最寄り施設までの距離に応じて振り分けるための変数．t^{L} がクラス L で最も大きい距離，t^{U} がクラス U で最も小さい距離を表す

これらの入力と変数を用いて，需要量がすべて等しい（需要量が 1）場合の P-QsSRLP は以下のように定式化できる．

[*P*-QsSRLP]

$$\min. \quad \frac{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{U}}}{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{L}}}, \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{ij}^{\mathrm{L}} + x_{ij}^{\mathrm{U}} + x_{ij}^{\mathrm{M}} \leq y_j, \qquad i \in I, j \in J, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j \in J} (x_{ij}^{\mathrm{L}} + x_{ij}^{\mathrm{U}} + x_{ij}^{\mathrm{M}}) = 1, \qquad i \in I, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{L}} \leq t^{\mathrm{L}}, \qquad i \in I, \tag{2.4}$$

$$\sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{M}} + B \left(1 - \sum_{j \in J} x_{ij}^{\mathrm{M}} \right) \geq t^{\mathrm{L}}, \qquad i \in I, \tag{2.5}$$

$$\sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{M}} \leq t^{\mathrm{U}}, \qquad i \in I, \tag{2.6}$$

$$\sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{U}} + B \left(1 - \sum_{j \in J} x_{ij}^{\mathrm{U}} \right) \geq t^{\mathrm{U}}, \qquad i \in I, \tag{2.7}$$

$$0 \leq t^{\mathrm{L}} \leq t^{\mathrm{U}}, \tag{2.8}$$

$$-\, y_{[m]_i} + \sum_{s=1}^{m} \left(x_{i[s]_i}^{\mathrm{L}} + x_{i[s]_i}^{\mathrm{U}} + x_{i[s]_i}^{\mathrm{M}} \right) \geq 0, \qquad i \in I, m = 1, \cdots, |J| - 1, \tag{2.9}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij}^{\mathrm{L}} = \lfloor N \times p \rfloor, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij}^{\mathrm{U}} = \lfloor N \times q \rfloor, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij}^{\mathrm{M}} = N - \lfloor N \times p \rfloor - \lfloor N \times q \rfloor, \tag{2.12}$$

$$\sum_{j \in J} y_j = P, \tag{2.13}$$

$$x_{ij}^{\mathrm{L}}, x_{ij}^{\mathrm{U}}, x_{ij}^{\mathrm{M}} \in \{0, 1\}, \qquad i \in I, j \in J, \tag{2.14}$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \qquad j \in J. \tag{2.15}$$

目的関数 (2.1) は，QsSR の最小化を表している．制約条件 (2.2) は各需要点の施設への割り当ては，配置された施設にのみ行われることを表す．制約条件 (2.3) は，各需要点がクラス U，クラス L，クラス M のいずれか 1 つに割り当てられることを規定している．制約条件 (2.4)，(2.5)，(2.6)，(2.7)，(2.8) は，クラス L に割り当てられた需要点の移動距離が t^{L} 以下であること，またクラス U に割り当てられた需要点の移動距離が t^{U} 以上であること，さらに，それ以外に割り当てられた需要点の移動距離は t^{L} 以上 t^{U} 以下であることを規定している．なお，十分に大きな定数 B は，t^{L} や t^{U} の定義およびそれらとの関係から，$\max_{i \in I, j \in J}\{d_{ij}\}$ よりも大きい必要はなく，この値を用いることができる．また，(2.9) 式は，各需要点が最近隣の施設を利用することを保証するもの [3] であり，ここで，$[m]_i$ は需要点 i に近い方から m 番目の配置候補点を表す．この制約条件を用いることで，ある需要点を最寄りの施設に割り当てずに，遠い施設に割り当てることを利用して目的関数値を小さくする解を得ることを禁止できる．制約条件 (2.10)，(2.11)，(2.12) は，各クラスに割り当てられる需要点の個数を規定している．制約条件 (2.13) は P 個の施設を配置することを表している．制約条件 (2.14)，(2.15) はそれぞれ 0 か 1 のみをとる変数であることを表している．

2.2. *P*-QsSRLP に対する解法

提案モデルの目的関数が非線形の 0-1 整数計画問題であるため，この問題を一般の数理計画ソフトウェアで直接求解することは難しい．そこで，以下のようなアプローチにより解を求める．

いま，

$$\frac{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{U}}}{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{L}}} \leq \theta$$

となる θ を考えれば，これより，次式を得る．

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{U}} - \theta \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^{\mathrm{L}} \leq 0. \tag{2.16}$$

制約条件 (2.2)–(2.15) に加えて，この (2.16) 式を制約条件として持つ実行可能性判定問題 F を考える．

ここで，P 個の施設のある配置が，与えられた θ（例えば $\theta = 1.5$）に対して，(2.16) 式を満たす場合には，P-QsSRLP の最適値は θ 以下（QsSR が 1.5 以下）であることが保証される．そこで，この実行可能性判定問題 F が実行可能となる最小の θ を求めることで QsSR を最小化する最適配置を得ることができる．この最小の θ は二分探索で求められる．

なお，二分探索の経過において，s 回目までの反復で実行可能性判定問題 F を解いて得られる配置は，$s+1$ 回目以降の実行可能性判定問題 F を解く際には除外できる．実行可能性

判定問題 F の解を求める際に，この情報を次式 (2.17) の形で明示的に数理計画ソフトウェアに与えることで，求解時間を短縮できる可能性がある．

$$\sum_{j\in J} A_{tj}y_j \leq P-1, \quad t=1,\cdots,T. \tag{2.17}$$

ここで，A_{tj} は，二分探索の計算過程で得られる t 番目の解において，配置候補点 j に施設を配置する場合は 1，しない場合は 0 を保持し，T は計算過程で得られている解の個数である．後述の計算機実験において，この制約を追加した場合としない場合の効果を比較する．

[***P*-QsSRLP のための二分探索法**]

Step 1： $LB := \lfloor N\times q\rfloor/\lfloor N\times p\rfloor$, UB は何らかの配置で得られる QsSR 値，その配置 y_j^*, $T:=1$, $A_{Tj}:=y_j^*$

Step 2： $\theta := \frac{(UB+LB)}{2}$

Step 3： 実行可能性判定問題 F が実行可能かどうかの判定

1. 可能な場合：実行可能解における配置 $\hat{y}_j$
   (a) （(2.17) 式を追加する場合）$T:=T+1$ とし，$A_{Tj}:=\hat{y}_j$
   (b) $UB :=$ 実行可能解の QsSR の値
2. 不可能な場合：$LB := \theta$

Step 4. ：$UB-LB<\epsilon$ なら UB の値をとる配置 $\hat{y}_j$ を最適配置として終了，そうでなければ Step 2. へ

なお，Step 3 の実行可能性判定および実行可能解の取得は数理計画ソフトウェアによって可能であり，後述する数値例では目的関数として総移動距離 $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij}\left(x_{ij}^{\mathrm{L}}+x_{ij}^{\mathrm{U}}+x_{ij}^{\mathrm{M}}\right)$ を用いた．

3. 計算機実験

前節で示した定式化により，どのような配置が得られるかを分析するために，東京都荒川区の町丁目の代表点を用いたデータに適用した．町丁目の代表点は,「e-Stat 政府統計窓口」(`https://www.e-stat.go.jp/`) から得られる平成 22 年国勢調査（小地域）の境界データに含まれる座標を用いた．なお，P-QsSRLP の最適解の傾向を見るために，最も代表的な施設配置問題の 1 つである P-median 問題の最適配置との比較を行う．P-median 問題は総移動距離最小化型の施設配置問題であり，次のように定式化できる [3].

定式化：P-median 問題

$$\text{min.} \quad MED = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_i d_{ij} x_{ij}, \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{ij} \leq y_j, \qquad i\in I, j\in J, \tag{3.2}$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1, \qquad i\in I, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j\in J} y_j = P, \tag{3.4}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}, \qquad i\in I, j\in J, \tag{3.5}$$

$$y_j\in\{0,1\}, \qquad j\in J. \tag{3.6}$$

ここで w_i は需要点 i の需要量を表す定数であり，x_{ij} は需要点 i を施設 j に割り当てるとき 1，そうでないとき 0 をとる変数である．目的関数は総移動距離の最小化であり，(3.2) 式は施設が配置された場所にのみ需要点が割り当てられること，(3.3) 式はただ 1 施設のみに割り当てられること，(3.4) 式は配置する施設数が P 個であること，をそれぞれ規定している．

本稿では，需要量が 1 の場合の P-QsSRLP を提案している．これを用いて以下の 2 つのケースについて議論する．

ケース 1：需要量がすべての需要点において同一の場合として，荒川区の町丁目の人口を考慮せず地理的な分布における傾向についてのみ分析する．需要点および配置候補点は 52 個となる．

ケース 2：需要量が需要点ごとに異なる場合として，平成 22 年国勢調査における人口データに基づき，荒川区の各町丁目の需要量を，表 1 のように設定する．ここでは，便宜的に各町丁目の人口を 2,000 で割って切り下げたものを需要量として用いる．これを 2 節の定式化に当てはめるために，需要量の個数分同じ場所に需要点があるものとして計算する．このとき，需要点は 81 個であり，配置候補点は 52 個となる．

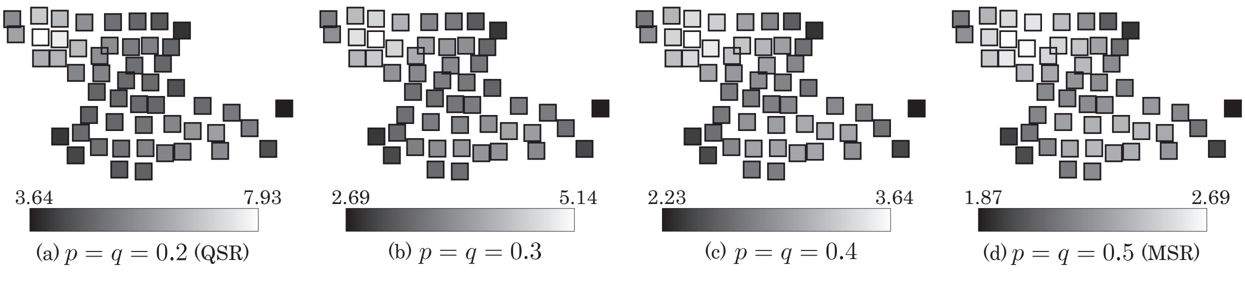
表 1: 需要量の決定基準とそれぞれの町丁目数

決定基準（人口）	需要量	町丁目数
4,000 未満	1	29
4,000 以上 6,000 未満	2	19
6,000 以上 8,000 未満	3	3
8,000 以上 10,000 未満	4	0
10,000 以上 12,000 未満	5	1

なお，前節の二分探索において，初期 UB には P-median 問題の最適解を用い，終了条件として $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$ を用いた．

まず，**ケース 1** の結果を示す．図 1 では，東京都荒川区の 52 町丁目を需要点および配置候補点として，1 つの施設を各町丁目に配置した場合の結果を示している．それぞれの図において，p と q の値を 0.2(QSR)，0.3，0.4，0.5(MSR) とした場合の目的関数値を色で示しており，値が大きい（公平性が低い）ほど，白くなっている．いずれも中心及び周囲において値が小さいのに対して，その間の地域において値が大きい．この傾向は，線分や矩形上での QSR や MSR を計算した既存研究 [5, 11, 12] と同様である．

QSR と MSR の値に着目すると，QSR の値の範囲は [3.64, 7.93] であるのに対して，MSR の値の範囲は [1.87, 2.69] と，その範囲は大きく異なっている．これは，QSR が「上位 2 割



(a) $p = q = 0.2$ (QSR)　(b) $p = q = 0.3$　(c) $p = q = 0.4$　(d) $p = q = 0.5$ (MSR)

図 1: **ケース 1** における施設数 1 の場合の QsSR

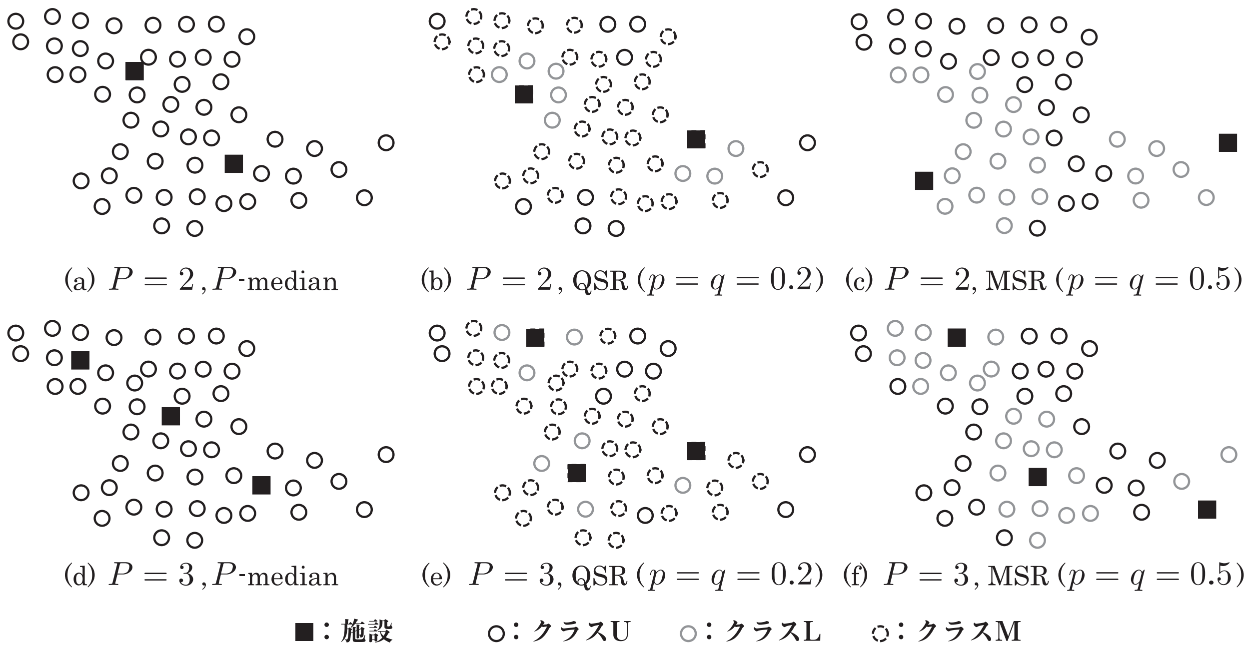


図 2: **ケース 1** における $P = 2, 3$ の P-median 問題および P-QsSRLP の最適解

表 2: P-median 問題，P-QsSRLP の最適配置におけるそれぞれの目的関数値（**ケース 1**）

P	評価関数	P-median	QSR 最小化	比	MSR 最小化	比
2	MED	<u>49.33</u>	52.92	1.07	82.94	1.68
	QSR	4.80	<u>3.96</u>	0.83	4.13	0.86
	MSR	2.33	1.99	0.85	<u>1.93</u>	0.83
3	MED	<u>40.53</u>	42.19	1.04	44.52	1.10
	QSR	5.70	<u>3.84</u>	0.67	4.28	0.75
	MSR	2.53	2.06	0.81	<u>2.00</u>	0.79

の移動距離の合計」を「下位 2 割の移動距離の合計」で除したものであるため，それらの合計値が大きく異なるのに対して，MSR は「上位 5 割の移動距離の合計」を「下位 5 割の移動距離の合計」で除したものであるため，相対的に合計値の差が小さくなるためである．また，QSR では図 1(a) の左上のように，値が大きい配置場所から比較的近い場所に値の小さい場所が存在し，MSR と比較して配置場所の変化の影響を受けやすいことが分かる．これは，上位 2 割と下位 2 割を対象に値を求める QSR では，施設の配置場所の変化により上位 2 割と下位 2 割の需要点の構成が大きく変わることがあるのに対して，MSR では全需要を対象に値を求めているため，施設配置場所の変化による MSR の値の変化が小さいことに起因すると考えられる．また，$p = q = 0.3$ や 0.4 の結果はそれらの中間的な結果となっている．

図 2 は，施設数 2 と 3 の場合について，P-median 問題と P-QsSRLP のそれぞれの最適解における配置を示したものである．また，表 2 はそれぞれの目的関数値を示したものである．表中の下線はそれぞれの目的関数における最適値を表しており,「比」は P-median 問題の最適配置における値に対する QSR 最小化もしくは MSR 最小化の最適配置における値の比を表している．なお，施設数が 1 の場合と同様に，p と q の値を 0.2(QSR)，0.3，0.4， 0.5(MSR) と変化させて計算したが，今回の例においては，0.3 と 0.4 の最適配置は 0.2(QSR) および 0.5(MSR) のいずれかと同じであったため，以降では QSR と MSR について議論をすすめる．これは**ケース 2** においても同様である．

施設数 2 のとき，P-median 問題の解と QSR を最小化した場合の解を比較すると，QSR を最小化した場合は，配置（図 2(a) と (b)）も大きな違いはなく，総移動距離が 1.07 倍に増えることを許容できれば，QSR を 0.83 倍にできることを示している．これに対して，同じ施設数 2 における P-median 問題の解に対する MSR を最小化した場合の解の比を見ると，総移動距離が 1.68 倍もあり配置も大きく異なるのに対して（図 2(a) と (c)），MSR は 0.83 倍であり QSR の比と同じ程度である．施設数 3 においては，総移動距離はそれぞれ，QSR を最小化した場合の解では 1.04 倍，MSR を最小化した場合の解では 1.10 倍の違いしかないのに対して，QSR は 0.67 倍に，MSR は 0.79 倍にすることができている．以上の結果から，QSR や MSR の最小化のみを目的とした問題の最適解は，効率性の点では望ましくないケースがあることが確認された．このことは，他の公平性の指標を用いた既存の施設配置問題においても指摘されている点である [6].

次に，需要量を考慮する**ケース 2** について述べる．図 3 は，図 1 と同様に各町丁目に施設を 1 つのみ配置した場合の結果を示している．図 1 と比較して，全体的に公平性が低い配置場所が多くなっている．また，図中下側に需要量が多いため，下の方に配置した場合の方が移動距離が小さい需要が多くなり，公平性が低い傾向が見られる．図中下側に需要量が多い影響は，P-median 問題の最適配置（図 4(a), (d)）からも見て取ることができ，図 2 と比較して施設がより下側に配置されているのが分かる．

QSR を最小化した場合の最適配置である図 4(b), (e) と MSR を最小化した場合の最適配置のうち図 4(f) では，施設を分散して配置し，移動距離の大きい需要点を減らしている．これにより，下位の総移動距離と上位の総移動距離の差が小さくなり，目的関数値を最小にする配置を実現している．これに対して，図 4(c) では，1 施設の場合に公平性の高い場所（図 3(b)）に 2 つの施設を近接して配置し，移動距離の小さい需要点を減らすことで同様のことを実現している．またそれに伴い，表 3 からは，図 4(c) の配置は総移動距離が非常に大きくなっていることが分かる．

これまでの結果では，QsSR の定義から当然のことながら，総移動距離（効率性）は考慮されていない．また極端な場合には，全需要点の移動距離を大きくすることで QSR や MSR を最小化する配置が得られる場合があることがわかった．しかしながら，現実には，公平性のみが実現されていれば全体としての移動距離は大きくても小さくてもかまわない，という場合は少ないと思われる．そこで次節では，公平性とともに効率性も考慮するために，P-median 問題の最適値となる総移動距離を用いる．具体的には，QSR（MSR）を最小化する最適配置を求める際に，この総移動距離の定数倍以下の総移動距離となる配置の中で最も QSR（MSR）値の小さい配置を求める問題を考える．

4. 総移動距離制約を考慮した *P*-QsSRLP

2 節で定義した P-QsSRLP の最適解は，効率性の観点から望ましくないケースが起こり得ることが確認された．そこで，本節では，2 節の定式化に，以下の総移動距離制約を考慮した P-QsSRLP を考える．

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij}\left(x_{ij}^{\mathrm{L}} + x_{ij}^{\mathrm{U}} + x_{ij}^{\mathrm{M}}\right) \le \alpha MED. \tag{4.1}$$

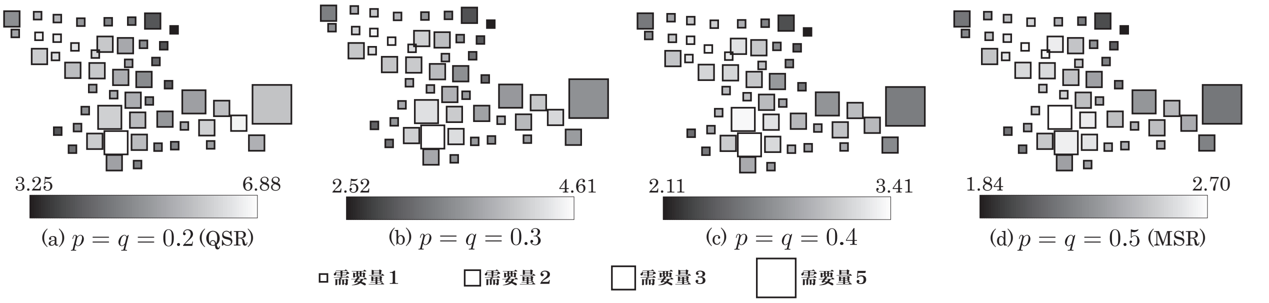


図 3: **ケース 2** における施設数 1 場合の QsSR

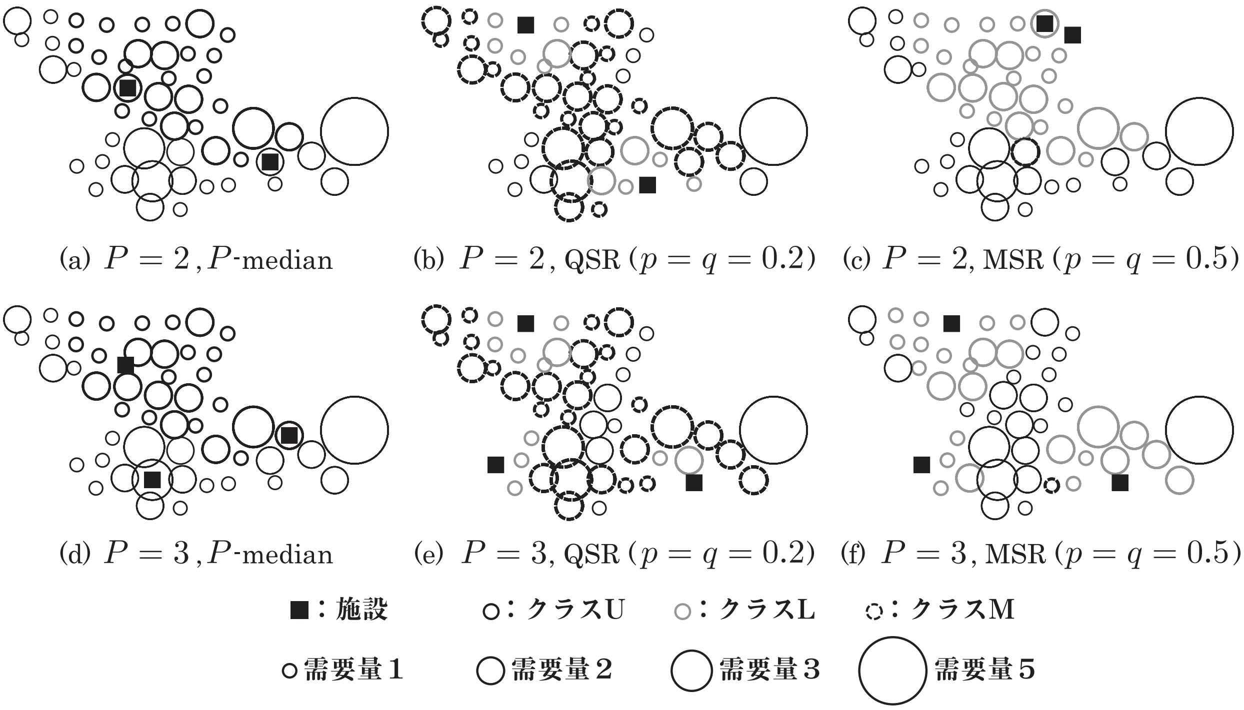


図 4: **ケース 2** における $P = 2, 3$ の P-median 問題および P-QsSRLP の最適解

表 3: P-median 問題，P-QsSRLP の最適配置におけるそれぞれの目的関数値（**ケース 2**）

P	評価関数	P-median	QSR 最小化	比	MSR 最小化	比
2	MED	$\underline{79.63}$	92.20	1.16	145.82	1.83
	QSR	4.77	$\underline{3.72}$	0.78	4.04	0.85
	MSR	2.28	2.00	0.88	$\underline{1.96}$	0.86
3	MED	$\underline{60.90}$	82.62	1.36	82.62	1.36
	QSR	5.74	$\underline{3.62}$	0.63	3.62	0.63
	MSR	2.51	1.96	0.78	$\underline{1.96}$	0.78

ここで α は，P-median 問題の最適値（MED）と比較して何倍までを総移動距離として許容するかを表す定数とする（$\alpha \geq 1$）．$\alpha = 1$ のとき P-median 問題の解が得られる．

ここでは，前節で P-median 問題の最適配置と比較して総移動距離に差が見られた（表 3），MSR の施設数 2 の問題を対象として，**ケース 1** と**ケース 2** について，$\alpha = 1.1, 1.2, \cdots$ として計算を行った（表 4）．表 4 において，**ケース 1** の場合には α が 1.1 から 1.6 で同じ配置であったこと，**ケース 2** の場合には α が 1.2 から 1.4 と 1.5 から 1.8 で同じ配置であったことを示している．これらの配置を図 5 に示す．各施設数における P-median 問題の最適配置（a, d），MSR を最小化した場合の最適配置（c, h），総移動距離制約を考慮した配置（b と e，f，g）を示している．総移動距離制約付き P-QsSRLP の最適配置は**ケース 1** の場合には，P-median 問題と MSR を最小化した場合のそれぞれの最適配置の中間に位置するような配置となっている．また，**ケース 2** の場合も，図 5(d) から (g) にかけて，α が大きくなるにつれて，徐々に外側に施設が配置されている．

表 4 から，**ケース 1** の MSR は，総移動距離の 1 割の増加を許容できれば，MSR の増加を最適値の 1.03 倍に抑えられている．同様に**ケース 2** においても，総移動距離の 1.1 倍で MSR の値の場合の 1.03 倍に，1.2 倍で 1.02 倍の増加で済む結果となった．施設配置において，総移動距離が小さいことと，移動距離が公平であることは，いずれも重要な指標である．総移動距離の制約を考慮することで，両者を両立した配置が得られる可能性を示すことができた．

最後に，各ケースにおける計算時間を示す．計算は，Intel Xeon CPU E5-1650 3.50GHz，32GB メインメモリの PC 上で，Gurobi Optimizer 6.5.1 を用いて行った．まず，移動距離の制約のない場合の計算時間を表 5 に示す．表中で逐次追加とは，(2.17) 式を利用した場合を表しており，逐次追加がある場合において若干の改善がある可能性を示している．表 6 では移動距離制約がある場合（施設数 2，MSR）を示している．表 5 と比較して大幅に計算時間が短い場合があることがわかった．また，総移動距離制約がある場合の方が，逐次追加ありの場合の計算時間に改善が見られた．

5. おわりに

本稿では，施設サービスを評価する重要な指標のひとつである公平性に着目し，QsSR を利用して，公平性の高い施設配置を実現するためのモデルと解法，およびそれらを用いた数値例について議論した．離散的に需要点と施設配置候補場所が与えられた場合に，需要量がす

表 4: 最小の総移動距離の α 倍までの総移動距離制約付き P-QsSRLP（$P = 2$, MSR）

需要量	α	総移動距離	MSR
ケース 1	P-median	49.33	2.33
	1.1 — 1.6	52.92	1.99
	MSR 最小化	82.94	1.93
ケース 2	P-median	79.63	2.28
	1.1	84.39	2.02
	1.2 — 1.4	92.20	2.00
	1.5 — 1.8	118.38	1.99
	MSR 最小化	145.82	1.96

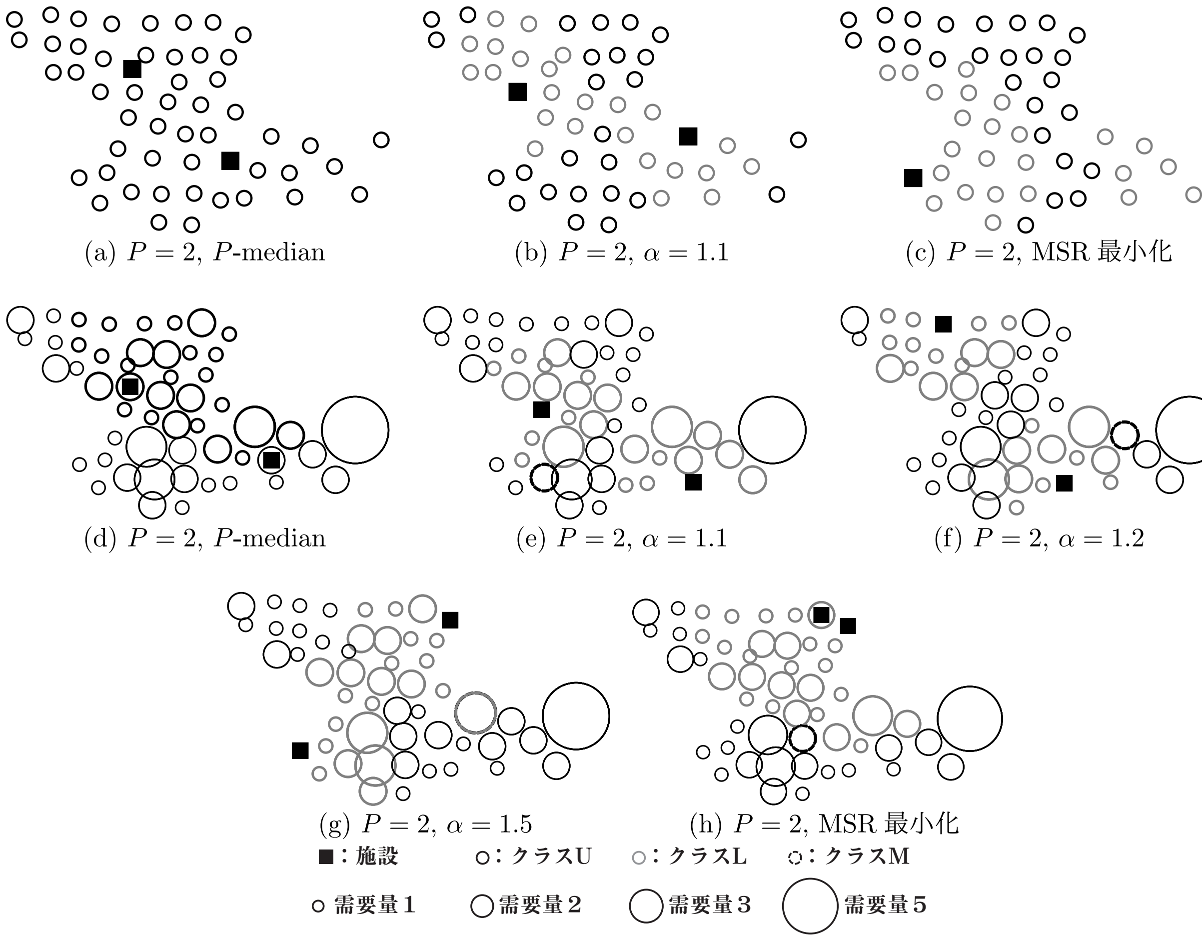


図 5: P-median 問題，制約付き P-QsSRLP，P-QsSRLP の比較 ($P=2$, MSR)

表 5: 荒川区のデータに対する P-QsSRLP の計算時間（秒）

需要	P		逐次追加あり	逐次追加なし
ケース１	2	QSR	3450.99	3432.95
		MSR	2008.46	3173.40
	3	QSR	12017.67	14362.89
		MSR	8800.64	7420.43
ケース２	2	QSR	14891.48	9780.68
		MSR	8441.27	36491.79
	3	QSR	55027.77	61665.48
		MSR	32011.30	75058.47

表 6: 荒川区のデータに対する総移動距離制約付き P-QsSRLP の計算時間（秒）: MSR, 施設数 2

需要	α	逐次追加あり	逐次追加なし
ケース 1	1.1	494.30	398.01
	1.2	991.43	898.77
	1.3	1763.37	1855.83
	1.4	354.58	2590.86
	1.5	2169.36	2753.08
	1.6	1720.69	2733.57
ケース 2	1.1	2868.29	5207.00
	1.2	5072.60	8254.50
	1.3	7399.55	13743.06
	1.4	5308.93	15767.58
	1.5	7253.30	14713.51
	1.6	6130.45	23627.54
	1.7	7994.37	18817.86
	1.8	6120.35	17865.14

べて等しい場合について，QsSR を最小にする複数施設の配置場所を求める問題を数理計画問題として定式化した．QsSR が非線形であることから，一般的な数理計画ソフトウェアを利用して解を求めることができるように，線形化して得られる実行可能性判定問題を二分探索により複数回解くことで元の問題の最適解を求める方法を示した．提案したモデルと解法を用いて，東京都荒川区の町丁目の代表点を用いて最適解の傾向を確認した．

さらに，QsSR の最小化のみを考えるときには，総移動距離が非常に大きくなることがあるため，P-median 問題の最適値の定数倍以下となる総移動距離を持つ配置の中で，QsSR が最小となる配置を求める問題を定義した．これを同じ荒川区のデータに適用し，配置がどのように変化するかを分析した．その結果，比較的小さな総移動距離の増加を許容することで，MSR の大きな改善が見られる場合があることが分かった．

今後の課題としては，計算時間の改善や需要量が異なる場合についての解法の工夫や定式化の改善を挙げることができる．実際の都市を対象とした分析においては，対象とする都市やサービスの規模によって，解くべき問題の大きさは異なる．本稿では，需要点の数では 52 と 81 であり，施設数も 2 と 3 の場合を扱った．より大きな都市を分析したい場面や需要量を厳密に扱いたい場面も考えられ，このような場合に対応するためには解法の工夫や定式化の改善が必要となる．

また，実際の都市のデータにおいて QSR や MSR を用いた分析はまだ十分に行われているとはいえない．実際のデータに基づいて他の公平性の指標などとその違いを比較することはそれぞれの特性をみる上で有用であろう．

本稿では，QsSR における下位と上位の占有率に等しい値を用いて計算機実験を行った．これに対して，下位と上位の占有率が異なる場合を考慮した公平性についての議論も考えられ，本稿での結果と比較することも有用であろう．例えば，下位グループの総移動距離と上位グループの総移動距離が等しくなるような下位と上位の 2 つのグループ分けおよびその

きのそれぞれの占有率を求めることが考えられる．この場合，下位グループの占有率が小さい（0.5 に近い）ほど公平性が高いといえる．このような観点に立った施設配置問題を構築することも興味深い今後の課題である．

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP15K01212，JP25242029 の助成を受けたものである．また，本論文について貴重なご助言を頂いた 2 名の査読者の方に心より感謝致します．

参考文献

[1] M. Barbati and C. Piccolo: Equality measures properties for location problems. *Optimization Letters*, **10** (2016), 903–920.

[2] O. Berman: Mean-variance location problems. *Transportation Science*, **24** (1990), 287–293.

[3] M.S. Daskin: *Network and Discrete Location*, 2nd Edition (John Wiley & Sons, 2013).

[4] T. Drezner, Z. Drezner, and J. Guyse: Equitable service by a facility: Minimizing the Gini coefficient. *Computers & Operations Research*, **36** (2009), 3240–3246.

[5] T. Drezner, Z. Drezner, and B. Hulliger: The quintile share ratio in location analysis. *European Journal of Operational Research*, **238** (2014), 166–174.

[6] H.A. Eiselt and G. Laporte: Objectives in location problems. In Z. Drezner (ed.): *Facility Location: A Survey of Applications and Methods* (Springer, New York, 1995), 151–180.

[7] Eurostat: Income quintile share ratio (s80/s20) (EU-SILC survey). Eurostat Structural Indicators, (2012).
`http://ec.europa.eu/eurostat/web/products-datasets/-/tessi180`.

[8] M.T. Marsh and D.A. Schilling: Equity measurement in facility location analysis: A review and framework. *European Journal of Operational Research*, **74** (1994), 1–17.

[9] W. Ogryczak: Inequality measures and equitable approaches to location problems. *European Journal of Operational Research*, **122** (2000), 374–391.

[10] W. Ogryczak: Inequality measures and equitable locations. *Annals of Operations Research*, **167** (2009), 61–86.

[11] 田中健一, 古田壮宏: 施設までの距離に着目した線分都市における Quintile Share Ratio の導出. 日本都市計画学会 都市計画論文集, **50** (2015), 628–635.

[12] 田中健一, 古田壮宏: 施設までの距離に着目した線分都市における QSR とその変種. 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015 年秋季研究発表会アブストラクト集, (2015), 98–99.

古田壮宏
奈良教育大学
次世代教員養成センター
〒630-8528 奈良県奈良市高畑町
E-mail: `takef@fw.ipsj.or.jp`

ABSTRACT

MINIMIZING QUANTILES SHARE RATIO IN MULTIPLE FACILITIY LOCATION PROBLEM WITH TOTAL DISTANCE CONSTRAINT

Takehiro Furuta — Nara University of Education
Ken-ichi Tanaka — Keio University

In this paper, we propose a multiple facility location problem to minimize inequality in distances to facilities. The inequality is evaluated by Quantiles Share Ratio (QsSR) that is a generalized version of Quintile Share Ratio (QSR). QSR is an inequality measure of income distribution defined as the ratio of total income received by the 20% of the population with the highest income (top quintile) to that received by the 20% of the population with the lowest income (lowest quintile). Drezner et al. (2014) have proposed single facility location problems using QSR where the inequality in distances to the facility is considered and the value of QSR is analytically derived at specific points such as the center of a circle and a rectangle, and vertices of a rectangle. Also, the paper mainly focuses on single facility location problems. In this paper, we develop a mathematical programming model seeking locations that minimize QsSR and propose a binary search method to solve the model. Furthermore, we extend the model by incorporating a total distance constraint. The models are applied to the case study of Arakawa ward in Tokyo using geographical and population data. Results show that our model provides low inequality locations with small increase in the total distance compared with the locations that minimize the total distance.