

## 歪度・尖度が高い株式ポートフォリオの $t$ コピュラを用いたリスク計測

伊東 賢二  
株式会社 日本信用情報機構

(受理 2015 年 3 月 2 日; 再受理 2015 年 8 月 3 日)

**和文概要** 通常、ポートフォリオのリスク計測は利便性の観点から多変量正規分布を用いて行われることが多い。しかし、歪度や尖度が高い銘柄から構成されるポートフォリオのリスク計測を行う場合には、個別資産の歪度や尖度を表現可能な柔軟な分布を採用したうえで、分布間の相関構造を表現したアプローチが必要となる。そこで本研究では、個別資産の分布に柔軟な分布を仮定したうえで、 $t$  コピュラを用いてポートフォリオのリスク計測を行う。

**キーワード:** リスク管理, generalized hyperbolic skew Student's  $t$ -distribution, correlation, market stress, tail risk.

### 1. はじめに

ポートフォリオのリスク計測では、Markowitz[14]の平均・分散を指標としたアプローチが著名であるが、1990年代以降、特に1996年にトレーディング勘定の市場リスクを Value-at-Risk (以下, VaR) によって計測することが国際規制上も認められたこともあり, VaR が標準的なリスク指標になっている。VaR を算出する手法は 1) ヒストリカル法と呼ばれる現実のリターンデータからノンパラメトリックに求める手法と, 2) 正規分布のようなパラメトリック分布を仮定して, 特定の分位点におけるリスク指標を算出する手法がある。1) の手法は, ポートフォリオを1つの資産としてみなせば, リスク指標を算出することができるが, ポートフォリオの銘柄を組み替える際に, 個別株式の特性やそれらの関係性がポートフォリオのリスク指標にどの程度影響するかを明示的に考慮することが難しい。一方で, 2) の手法は, 個別株式の特性やそれらの関係性を把握できるが, 対象となる資産の従うパラメトリックなリターンの分布を選択することが必要となる。そこで, 資産のリターン分布に関する研究は古くから盛んに行われており, 資産のリターンは歪度や尖度を持つことが確認されている (Fama[8], Merton[17], Campbell, Lo and MacKinlay[6], 宮崎・中尾 [18], Simonato[21] 等)。歪度や尖度を把握するために様々な分布が用いられるなか, 一般化双曲型 (generalized hyperbolic, GH) 分布 (Barndorff-Nielsen[4])<sup>1</sup> の特殊なケースである一般化双曲型非対称  $t$  (以下, GHSt) 分布は, パラメータが4つで, 非対称  $t$  分布<sup>2</sup> の中でも柔軟に高い歪度や尖度の情報を表現できるため注目されている。GHSt 分布は, 株式インデックス

<sup>1</sup>Aas and Haff[1] では, GH 分布のパラメータのうちいくつかは識別が困難であり, 最尤推定をする際に局所最適解がいくつも存在する可能性を指摘している。

<sup>2</sup>非対称  $t$  分布にはいくつか種類があり, その中の1つが GHSt 分布である。非対称分布の研究で参照されることが多いのが Azzalini and Capitanio[3] の非対称  $t$  分布である。吉羽 [29] では, 日経平均株価と5年国債金利にその非対称  $t$  分布を適用し, 様々なコピュラを想定してリスク量を算出している。また, 渡部・佐々木 [26] は日経平均株価の日次リターンに Fernandez and Steel[9] の非対称  $t$  分布を適用している。

等を対象にリスクを評価した場合に有効性が確認されている<sup>3</sup> (Aas and Haff[1] 等). このように尖度や歪度を持つ資産に仮定する分布を適切に選択したうえで、リスク指標を算出し、ポートフォリオのリスク計測がなされている。

一方で、投資家が好むポートフォリオは様々であり、3次以上のモーメントを考慮した最適化ポートフォリオに関する研究がなされている。例えば、Konno and Suzuki[12]では、多くの投資家は期待値と分散が同じであれば正の歪度を持つ株式を好み、ある投資家は尖度が高くてもより歪度が高い株式を好むことを指摘している。そして、ポートフォリオの平均と分散に関する制約のもとで、歪度が最大となるようなポートフォリオを提案している。また、Lai, Yu and Wang[13]では、投資家の歪度や尖度に関する選好に依存した形で標準偏差や尖度を最小化、平均や歪度を最大化する最適ポートフォリオを提案している。そのうえで、尖度が高いほど金融危機等のまれに起こるイベントの発生確率を表現できるため、歪度のみならず尖度もポートフォリオを構築する際に重要な要素であることを指摘している。

3次以上のモーメントを持つポートフォリオでも1つの資産とみなせば、適切な1変量分布を用いてリスク計測は可能である。しかし、ポートフォリオのリスク計測を行う場合には、リスク・リターンの観点から少ないコストで銘柄を組み替えるため、個別資産の特性とそれらの関係性を把握したうえで行うことが望ましい。そのため、ポートフォリオのリスク評価を、Markowitz[14]の平均分散モデルの枠組みで、複数の個別資産が多変量正規分布に従うと仮定して評価することが多い。しかし、多くの個別資産は歪度や尖度をもち、このような個別資産から構成されるポートフォリオのリスク計測を、多変量正規分布から生成したリターンを用いて行うと、歪度や尖度を表現できないためにリスクを適切に把握できない恐れがある。そこで近年注目されているのが、個別資産のリターン分布とそれら資産間の関係性（以下、資産間の依存構造）を分けて扱うことができるコピュラである。コピュラとは各変量の周辺分布と多変量同時分布を繋ぐ関数であり、本研究ではコピュラを用いることで個別株式の歪度や尖度と資産間の依存構造を表現し、ポートフォリオのリスク計測を行う。

コピュラに関する先行研究はいくつかあり、Embrechts, Lindskog and McNeil[7]では、米国株式市場の2種類の株式を対象に、コピュラを用いてポートフォリオのシミュレーションを行い、VaRの値を算出している。そして、正規分布や $t$ 分布を仮定した場合と、ヒストリカルデータから直接求めたVaRの値を分位点ごとに比較している。また、戸坂・吉羽[24]では、日本株式市場において電気あるいは商社に分類される株式から構成される2種類の株式ポートフォリオを対象に、周辺分布に裾の厚い分布の1つである両側指数分布を仮定しコピュラを用いてVaR等のリスク量を算出している。そして、コピュラの種類ごとにポートフォリオのリスク指標について考察をしている<sup>4</sup>。さらに、新谷・山田・吉羽[22]では、各国の株価インデックスを対象に周辺分布に経験分布を仮定し、各時点で観測期間を1年としたローリング推計によってコピュラのパラメータのダイナミクスを捉えている。そして、リーマンショックのような市場にストレスが発生し大きな損失が出る時期には、資産間の相関が

<sup>3</sup>例えば、Nakajima and Omori[19]ではTOPIXを対象にGHSt分布を用いて分布の推定とVaRの計測をしている。

<sup>4</sup>戸坂・吉羽[24]では、相関行列の形式で依存性を表現するコピュラ以外にも、ガンベルコピュラやクレイトンコピュラといった1つのパラメータを持つコピュラを用いてポートフォリオのリスク計測を行っているが、3銘柄以上のポートフォリオの評価には、相関行列の形式で負の依存性を表現可能である正規コピュラや $t$ コピュラが望ましいと指摘している。また、近年のアカデミックの分野では多変量のコピュラとしてヴァインコピュラが注目されているが、実務上 $t$ コピュラが資産間の裾の依存性の計測に用いられることが多いことから、ここでは $t$ コピュラをもとに議論する。

高まることを指摘している<sup>5</sup>。これらの研究ではコピュラやその周辺分布の選択、コピュラのパラメータのダイナミクスについて言及しているが、ポートフォリオの銘柄数に依存した形でリスク量を計測することについては着目していない。また、実務でよく使用される  $t$  コピュラを用いて、個別資産の歪度や尖度と資産間の依存構造を把握したうえで、銘柄数に応じたポートフォリオのリスク計測を行った研究は著者らが知る限り見当たらない。そこで本研究では、実務上の利用に即して  $t$  コピュラを用いて銘柄数に応じたポートフォリオのリスク計測を行う<sup>6</sup>。

本研究の主な貢献はリターン分布に  $GHS_t$  分布を仮定しコピュラを用いて株式ポートフォリオのリスク計測を行った場合に、ヒストリカル法で求めたリスク指標にどの程度近いかを検討することである。コピュラの周辺分布には  $GHS_t$  分布を仮定した場合と、正規分布や  $t$  分布を仮定した場合で、どの程度違いがあるのかを比較する<sup>7</sup>。また、対象となる株式の特性やリスク指標の分位点、ポートフォリオの銘柄数に依存した考察を行う。分析の際には、ポートフォリオを構成する個別株式のリターン分布において尖度や歪度を表現する形状パラメータが有意であるのかを確認する。本論文の構成は、以下の通りである。次章では本研究で用いるコピュラについて説明したのち、コピュラのパラメータの推定手法と乱数の発生方法について述べる。3章では、リスク量の計測に用いる指標について紹介する。4章では実証分析とその考察を与える。最終章ではまとめと結語を付す。

## 2. コピュラとリスク計測

### 2.1. コピュラ

本節では、ポートフォリオを構成する個別資産のリターン分布とそれら資産間の関係性を分けて扱うことができるコピュラについて紹介する。コピュラとは各変量の周辺分布と多変量同時分布を繋ぐ関数である。Sklar[23]の定理より同時分布と各変量の周辺分布  $G$  の間には式 (2.1) のような関係が成り立つ。

$$P(R_1 \leq r_1, \dots, R_n \leq r_n) = C(G_1(r_1), \dots, G_n(r_n)) \quad (2.1)$$

ここで、 $C(\cdot)$  はコピュラ関数、 $r_i$  は株式  $i$  のリターンの実現値 (株式  $i = 1, \dots, n$ )、 $n$  はポートフォリオの構成銘柄数の上限、 $R_i$  は株式  $i$  のリターンを表す確率変数、 $G_i(\cdot)$  は株式  $i$  の確率分布関数であり、 $G_i(\cdot) \in [0, 1]$  をとる<sup>8</sup>。

本研究では、複数の個別株式のリターン分布と株式間の依存構造を同時に考慮してポートフォリオを構成するために、多変量  $t$  分布の相関構造に基づく  $t$  コピュラ (式 (2.2)) を用いる。式 (2.2) では個別株式リターンに仮定した周辺分布の値  $G(r)$  を自由度  $\nu$  の  $t$  分布の逆関数で変換することで、多変量  $t$  分布に従う尺度に変換している。

<sup>5</sup>対象が株式ポートフォリオではないが、Glasserman, Heidelberger and Shahabuddin[10]では、コピュラを用いて裾の厚いリスク因子から構成されるポートフォリオの VaR を計測している。

<sup>6</sup>ポートフォリオの銘柄数とリスク計測の観点でなされた数少ない実証研究として佐々木・宮崎・野村 [20] があり、ポートフォリオの銘柄数と VaR の推定誤差の関係を検討している。

<sup>7</sup>本研究では株式の日次リターンが独立同一分布に従う (i.i.d.) ことを前提にしている。また磯貝 [11] によれば、確率分布の選択において、リターンの変動が定常分布に従い時間の経過に依存しないとするもの (無条件アプローチ) と、定常分布でなく時間の経過に依存するもの (条件付きアプローチ) があるが、本研究では金融機関におけるリスク量の計測が無条件アプローチを前提にしていることが比較的多いと考えられることから、無条件アプローチを採用する。

<sup>8</sup>コピュラの性質に関する詳しい解説は塚原 [25] を参考にされたい。

$$C(G_1(r_1), \dots, G_n(r_n)) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \int_0^{G_1(r_1)} \dots \int_0^{G_n(r_n)} \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu}\omega'\Sigma^{-1}\omega\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left[ \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{1/2}} \left(1 + \frac{\omega_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \right]} du_1 \dots du_n \quad (2.2)$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数、 $t_\nu(\cdot)$  は自由度  $\nu$  の 1 変量  $t$  分布、 $\Sigma$  はコピュラのパラメータであり  $n \times n$  の行列、 $\omega$  は  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} = \{t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)\}$  を要素とする  $n \times 1$  の列ベクトルで表す。

$t$  コピュラは自由度  $\nu$  のパラメータを持つので、多変量正規分布の相関構造に基づく正規コピュラと比較して、変数間の依存構造をより柔軟に表現できる。 $t$  コピュラで表現される同時分布の形状をイメージするために、ここでは自由度  $\nu$  が 50、3 の 2 変量  $t$  コピュラ（周辺分布がともに標準正規分布で、相関が 0.7）の同時分布の密度関数の等高線図をそれぞれ図 1、2 に記載した。自由度が小さい（図 2）場合は、自由度が大きいもの（図 1）と比べて、座標 (-2, -2) や (2, 2) のような同時分布の裾において、確率密度が高いことがわかる。つまり、自由度が低い  $t$  コピュラは、一方の変数で大きな変動が生じた場合に他方の変数に大きな変動が生じやすいような現象を表現するのに適しているといえる。なお、 $t$  コピュラは自由度のパラメータが大きいほど正規コピュラに近づく。

また、仮定したコピュラと周辺分布を組み合わせるにより、同時分布から得られるポートフォリオリターンの分布に尖度や歪度に関する情報を付加できる。本研究では、式 (2.3) ~ (2.5) の 3 種類の周辺分布を仮定する。式 (2.3) の正規分布（以下、N 分布）は、形状パラメータ  $\Theta$  に平均  $\mu$  と分散  $\sigma^2$  の情報を持つ。また、Abramowitz and Stegun[2] で示されている  $t$  分布（式 (2.4)）は、平均とばらつき  $\tilde{\sigma}^2$  に加え、自由度  $\tilde{\nu}$  のパラメータを用いて尖度の情報を付加できる。個別株式は N 分布と比べて高い尖度を持つことが多いので、 $t$  分布を用いれば裾の厚い分布を表現できる。さらに、Aas and Haff[1] で用いられている一般化双曲型非対称  $t$  分布（以下、GHSt 分布）（式 (2.5)）は、平均、分散、尖度に加え、歪みに関する形状パラメータ  $\beta$  を用いて歪度の情報を表現することができる。

- 正規分布 (N 分布) :

$$G(r; \Theta^N) = \int_{-\infty}^r \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx, \quad \Theta^N = \{\mu, \sigma\} \quad (2.3)$$

ここで、平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  である。

- $t$  分布 :

$$G(r; \Theta^t) = \int_{-\infty}^r \frac{\Gamma(\frac{\tilde{\nu}+1}{2})}{\Gamma(\frac{\tilde{\nu}}{2})\sqrt{\pi\tilde{\nu}\tilde{\sigma}^2}} \left(1 + \frac{1}{\tilde{\nu}} \frac{(x-\mu)^2}{\tilde{\sigma}^2}\right)^{-\frac{\tilde{\nu}+1}{2}} dx, \quad \Theta^t = \{\mu, \tilde{\sigma}, \tilde{\nu}\} \quad (2.4)$$

ここで、平均  $\mu$ 、分散  $\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}-2}\tilde{\sigma}^2$ （ただし、 $\tilde{\nu} > 2$ ）、尖度  $\frac{6}{\tilde{\nu}-4}$ （ただし、 $\tilde{\nu} > 4$ ）である。

- 一般化双曲型非対称  $t$  分布 (GHSt 分布) :

$$G(r; \Theta^{GHSt}) = \int_{-\infty}^r \frac{2^{(1-\tilde{\nu})/2}\delta^{\tilde{\nu}}|\beta|^{(\tilde{\nu}+1)/2}K_{(\tilde{\nu}+1)/2}(\beta\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})\exp(\beta(x-\mu))}{\Gamma(\frac{\tilde{\nu}}{2})\sqrt{\pi}(\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})^{(\tilde{\nu}+1)/2}} dx, \quad \Theta^{GHSt} = \{\mu, \delta, \tilde{\nu}, \beta\} \quad (2.5)$$

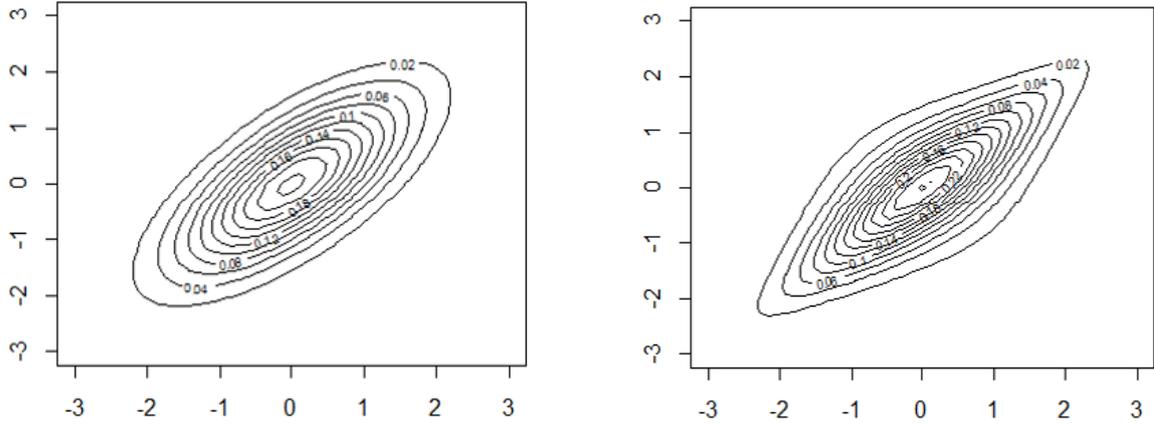


図 1: Contour plot of  $t$  copula's joint probability ( $\nu = 50$ ) 図 2: Contour plot of  $t$  copula's joint probability ( $\nu = 3$ )

備考: Yan[28] の copula パッケージを用いて作成

ここで,  $K_j(\cdot)$  は第 3 種の  $j$  次変形ベッセル関数,  $\beta \neq 0$  である. また, 平均  $\mu + \frac{\beta\delta^2}{\tilde{\nu}-2}$  (ただし,  $\tilde{\nu} > 2$ ), 分散  $\frac{2\beta^2\delta^4}{(\tilde{\nu}-2)^2(\tilde{\nu}-4)} + \frac{\delta^2}{\tilde{\nu}-2}$  (ただし,  $\tilde{\nu} > 4$ ), 歪度  $\frac{2(\tilde{\nu}-2)^{\frac{1}{2}}\beta\delta}{\{2\beta^2\delta^2 + (\tilde{\nu}-2)(\tilde{\nu}-4)\}^{\frac{3}{2}}}\{3(\tilde{\nu}-2) + \frac{8\beta^2\delta^2}{\tilde{\nu}-6}\}$  (ただし,  $\tilde{\nu} > 6$ ), 尖度  $\frac{6}{\{2\beta^2\delta^2 + (\tilde{\nu}-2)(\tilde{\nu}-4)\}^2}\{(\tilde{\nu}-2)^2(\tilde{\nu}-4) + \frac{16\beta^2\delta^2(\tilde{\nu}-2)(\tilde{\nu}-4)}{\tilde{\nu}-6} + \frac{8\beta^4\delta^4(5\tilde{\nu}-22)}{(\tilde{\nu}-6)(\tilde{\nu}-8)}\}$  (ただし,  $\tilde{\nu} > 8$ ) である.

これらの各分布の特徴を視覚的に確認するために, 東証 1 部に上場している 1 つの銘柄を例に挙げて, 最尤法で各分布のパラメータを推定し, 形状を描いたものを図 3 に示す. また, 表 1 では各分布の下側 0.5%, 1.0%, 2.5%, 5.0% 分位点におけるリターンの値を示す. なお, 各分布のパラメータは  $\Theta^N = \{0.10 \times 10^{-2}, 4.29 \times 10^{-2}\}$ ,  $\Theta^t = \{0.10 \times 10^{-2}, 2.51 \times 10^{-2}, 3.04\}$ ,  $\Theta^{GHSt} = \{-0.99 \times 10^{-2}, 4.82 \times 10^{-2}, 3.80, 8.33\}$  である<sup>9</sup>. 図 3 をみると, まず  $t$  分布や GHSt 分布は N 分布と比較して分布の裾において高い確率密度を持つ. 次に, GHSt 分布は N 分布や  $t$  分布と比べて正の歪みを持ち, 左右非対称な裾の厚みを表現できることが確認できる. さらに, 表 1 をみると, 5.0% 分位点における  $t$  分布のリターンの値は N 分布のものよりも大きい, 1.0% 分位点では  $t$  分布の分位点の値は N 分布のものよりも小さい. そして, GHSt 分布が正に歪んでいるために, 1.0% 分位点では GHSt 分布の分位点の値が,  $t$  分布や N 分布のものよりも大きな値をとる傾向もみられる.

なお本研究では, コピュラによるポートフォリオのリスク計測を行う準備段階として, まずは尖度や歪度を持つと考えられる個別株式のリターンの変動に対して, 自由度や歪みを表現可能な  $t$  分布や GHSt 分布で適切に把握できるか確認するために, 自由度  $\tilde{\nu}$  や歪み  $\beta$  を表わすパラメータの有意性を尤度比検定によって検討する. 例えば  $t$  分布が正規分布よりも有効であるかを検討する場合には, 帰無仮説  $H_0$  を  $1/\tilde{\nu} = 0$  とおき, 統計量  $-2[L(\hat{\Theta}_0) - L(\hat{\Theta})]$  が自由度 1 のカイ 2 乗分布  $\chi^2(1)$  に従うものとして検定を行う. ここで,  $L(\cdot)$  は確率分布の対数尤度,  $\hat{\Theta}_0$  は帰無仮説におけるパラメータセットである. 統計量の計算の際には,  $t$  分布は  $1/\tilde{\nu} = 0$  の場合に N 分布に一致することから,  $L(\hat{\Theta}_0)$  に N 分布の対数尤度を,  $L(\hat{\Theta})$  に  $t$

<sup>9</sup>銘柄の選択は, 株価リターンの尖度や歪度が分布の形状にどの程度影響するかを確認するために, 4.1 節で後述するセット 1 の中で GHSt 分布の形状パラメータ  $\beta$  の値が最も高い銘柄を抜粋した. また, 推定されたパラメータや表 1 の結果は 4.1 節に記載されているデータ分析期間と同じ観測期間に基づくものである.

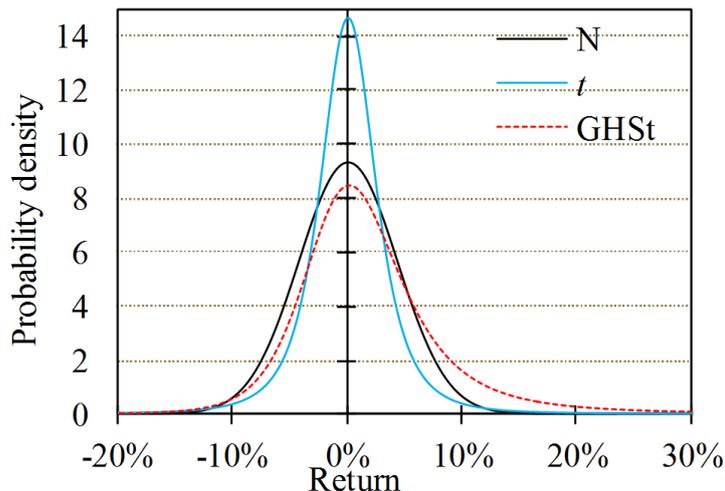


図 3: Shape of densities

表 1: Quantiles of the return

Distribution \ Quantile	0.50%	1.00%	2.50%	5.00%	10.00%
N	-13.13%	-11.85%	-9.97%	-8.35%	-6.49%
$t$	-17.22%	-13.37%	-9.35%	-6.89%	-4.77%
GHSt	-11.54%	-9.77%	-7.62%	-6.09%	-4.60%

分布の対数尤度を用いる。帰無仮説が棄却されれば、個別株式のリターン分布において尖度を表現する自由度のパラメータ  $\tilde{\nu}$  が有意であると判断できる。また GHSt 分布が  $t$  分布よりも有効であるかを検討する場合には、帰無仮説  $H_0$  を  $\beta = 0$  とおき、同様に  $t$  分布と GHSt 分布の対数尤度を用いて尤度比検定を行う。

## 2.2. コピュラのパラメータの推定と乱数の発生方法

本節では、シミュレーションを行うために必要なコピュラのパラメータ推定方法や、乱数の発生方法について紹介する。コピュラのパラメータは現実のデータを用いて最尤法で算出できる。例えば、周辺分布に GHSt 分布を用いる場合には、個別株式の形状パラメータ  $\Theta_1^{GHSt}, \dots, \Theta_n^{GHSt}$  と、式 (2.2) のコピュラのパラメータ  $\nu$  と  $\Sigma$  を推定する必要がある。 $t$  コピュラの時点  $t$  における確率密度  $c$  は、式 (2.2) に 2.1 節の分布の形状パラメータの表記を用いて、式 (2.6) で与えられる。

$$c(G_1(r_{1,t}; \Theta_1^{GHSt}), \dots, G_n(r_{n,t}; \Theta_n^{GHSt}); \Sigma, \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \frac{(1 + \frac{1}{\nu} \omega_t' \Sigma^{-1} \omega_t)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left[ \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{1/2}} (1 + \frac{\omega_{i,t}^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}} \right]} \quad (2.6)$$

ここで、 $t$  は時点 ( $t = 1, \dots, T$ )、 $\omega_t$  は、 $\{\omega_{1,t}, \dots, \omega_{n,t}\} = \{t_\nu^{-1}(G_1(r_{1,t}; \Theta_1^{GHSt})), \dots, t_\nu^{-1}(G_n(r_{n,t}; \Theta_n^{GHSt}))\}$  を要素に持つ、 $n \times 1$  の列ベクトルである。

観測データに対する対数尤度  $l$  は式 (2.7) で与えられる.

$$\begin{aligned}
l(\Theta_1^{GHSt}, \dots, \Theta_n^{GHSt}; \Sigma, \nu) &= \sum_{t=1}^T \ln c(G_1(r_{1,t}; \Theta_1^{GHSt}), \dots, G_n(r_{n,t}; \Theta_n^{GHSt}); \Sigma, \nu) \\
&= T \ln \left\{ \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{n/2}} \right\} - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{\nu+n}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left( 1 + \frac{1}{\nu} \omega_t' \Sigma^{-1} \omega_t \right) \\
&\quad - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln \left[ \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{1/2}} \left( 1 + \frac{\omega_{i,t}^2}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

個別株式リターンの同時分布 (式 (2.7)) に関して最尤法を行うことは, 式 (2.7) の周辺分布の形状パラメータ  $\Theta_1^{GHSt}, \dots, \Theta_n^{GHSt}$  と  $t$  コピュラのパラメータ (自由度  $\nu$ , 相関行列  $\Sigma$ ) を同時に求めることに相当するが, 計算負荷が大きい. そこで, 本研究では Mashal and Naldi [15] 等に倣い, 代替法として, まず個別株式のリターン分布のパラメータを推定し, 次にコピュラのパラメータを推定する手法 (図4の上段の操作) を採用する<sup>10</sup>. なお, 式 (2.7) を  $\Sigma^{-1}$  に関して偏微分することで, 自由度  $\nu$  が所与の場合の最尤推定量  $\hat{\Sigma}_\nu$  に関する関係式 (式 (2.8)) を得られるが, 式 (2.8) は右辺に  $\hat{\Sigma}_\nu$  を含み解析的には解けないため, 戸坂・吉羽 [24] に倣い, 初期値を与え,  $\hat{\Sigma}_\nu$  を数値的な反復計算で求める操作を行う.

$$\hat{\Sigma}_\nu = \frac{\nu+n}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\omega_t \omega_t'}{\nu + \omega_t' \hat{\Sigma}_\nu^{-1} \omega_t} \tag{2.8}$$

以下, 個別株式のリターン分布とコピュラのパラメータを推定するアルゴリズムである.

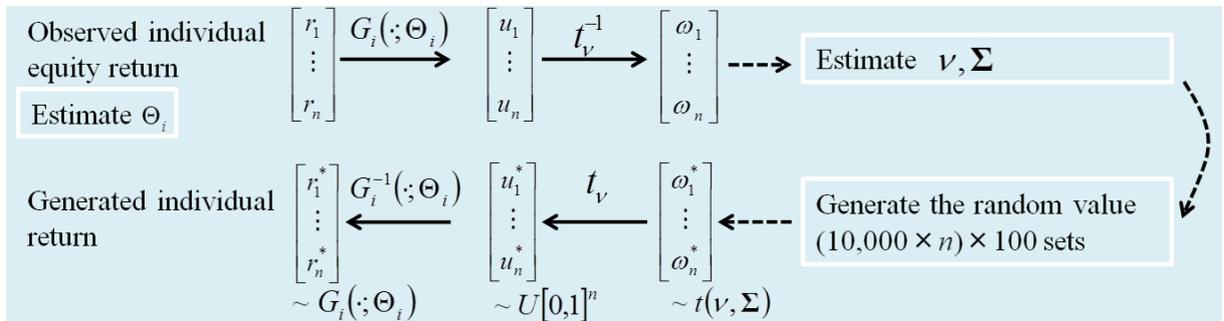


図 4: Flow of estimating parameters and generating random value

- 操作 1) 株式  $i$  のリターンの時系列を  $r_i$  とし, リターン時系列  $r_1, \dots, r_n$  ( $T$  営業日  $\times n$  銘柄分) に対して, 銘柄ごとに周辺分布のパラメータ  $\Theta_1^{GHSt}, \dots, \Theta_n^{GHSt}$  推定を行う.
- 操作 2) リターンの時系列を銘柄ごとに周辺分布  $G_i(\cdot; \Theta_i^{GHSt}) (i = 1, 2, \dots, n)$  を用いて変換し, 標準一様分布に従うデータ系列  $u_1, \dots, u_n$  を得る.
- 操作 3) データ系列  $u_1, \dots, u_n$  を自由度  $\nu$  の  $t$  分布の逆関数  $t_\nu^{-1}(\cdot)$  を用いて  $t$  分布に従うデータ系列  $\omega_1, \dots, \omega_n$  に変換する.
- 操作 4.1) データ系列  $u_1, \dots, u_n$  を標準正規分布の逆関数  $\Phi^{-1}(\cdot)$  を用いて  $N$  分布に従うデータ系列  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$  に変換し, 相関行列の初期値  $\Sigma_{(0)}$  (添え字の括弧付きの数

<sup>10</sup>同時にパラメータを推定する手法と代替法の比較については Bouye et al. [5] を参照されたい.

字は推定値の更新回数を表す)を算出する<sup>11</sup>.

操作 4.2) 初期値  $\hat{\Sigma}_{\nu,(0)}$  を式 (2.9) の漸化式の右辺に代入し,  $\hat{\Sigma}_{\nu,(1)}$  を得る.

$$\hat{\Sigma}_{\nu,(m+1)} = \frac{\nu + n}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\omega_t \omega_t'}{\nu + \omega_t' \hat{\Sigma}_{\nu,(m)}^{-1} \omega_t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

操作 4.3) 式 (2.9) への代入を繰り返し  $\hat{\Sigma}_{\nu,(m)}$  が収束するまで反復を行い収束値を  $\hat{\Sigma}_{\nu}$  とする.

操作 5) 操作 3~4 を, 自由度  $\nu = 3, 4, 5, \dots$ , で行い, 対数尤度を最大化とする自由度  $\nu$  と対応する  $\hat{\Sigma}_{\nu}$  を推定量とする.

次に, コピュラに基づく個別株式のリターンの乱数を発生する操作 (図 4 の下段の操作) について述べる. まず平均 0, 自由度  $\nu$  の相関行列  $\Sigma_{\nu}$  の多変量  $t$  分布に従う乱数 (1 万個  $\times n$  銘柄) を 100 セット発生させ, データ系列  $\omega_1^*, \dots, \omega_n^*$  (アスタリスクは乱数を表す) を得る. 次に, 標準  $t$  分布  $t_{\nu}(\cdot)$  を用いて, これらの乱数を一様分布に従うデータ系列  $u_1^*, \dots, u_n^*$  に変換する. さらに, 周辺分布  $G_i(\cdot; \Theta_i^{GHSt})(i = 1, 2, \dots, n)$  の逆関数を用いて, GHSt 分布に従うデータ系列  $r_1^*, \dots, r_n^*$  を得る.

周辺分布に N 分布や  $t$  分布を採用する場合においても, 同様にポートフォリオリターンを構築する.

### 3. リスク指標

本研究では, リスク指標として VaR を採用する. VaR は与えられた信頼水準での最大損失を計測する指標であり, 代表的な算出方法としては, 分散共分散, ヒストリカル法, モンテカルロ法が知られている. ここでは, ヒストリカル法による VaR をベンチマークとして与えたうえで, 2 章で設定した周辺分布と  $t$  コピュラから得られる分布を用いてモンテカルロ法で求めた VaR を比較する.

ベンチマークとして用いるヒストリカル法での VaR の算出方法は以下の通りである. まず日次の  $T$  日分のポートフォリオリターンのデータ  $(r_1, r_2, \dots, r_T)$  を小さい順に並びかえる. 並び替えたデータの  $k$  番目のデータを  $r_{(k)}$  とし, 順序を並び替えたデータ  $(r_{(1)}, r_{(2)}, \dots, r_{(T)})$  を得る. そして, 分位点  $\alpha\%$  における VaR を式 (3.1) で定義する<sup>12</sup>. ただし,  $k = T \cdot \alpha\%$  とする. なお, リスク指標の性質については, 山井・吉羽 [27] を参照されたい.

$$VaR_{(100-\alpha)\%}(R) = r_{(k)} \quad (3.1)$$

本研究では, GHSt 分布を周辺分布に採用した場合と N 分布や  $t$  分布を採用した場合で, どちらの分布から生成したポートフォリオのリスク指標が, ベンチマークに近いかを検討する. ただし, VaR は構成銘柄の歪度や尖度以外にも, 平均や標準偏差にある程度依存すると考えられる. 平均や標準偏差の異なるポートフォリオは単純にリターンベースでは比較ができない. そこで本研究では, 歪度や尖度といった情報がどの程度, 銘柄数の異なる

<sup>11</sup>ここでの分散共分散行列の対角要素は定義上 1 であるが, 推定誤差が伴うため対角成分が必ずしも 1 となるとは限らない. ここでは, 分散共分散行列を求め, そこから対角要素が 1 となるようにした.

<sup>12</sup>VaR は損失として定義されることが通常であるが, 式 (3.1) では損失を負で定義している. また, 実務でリスク量の計測の妥当性を評価する際に用いるベンチマークには, ヒストリカル法による VaR が採用されることが多いが, ヒストリカル法的前提が成立しない場合には  $VaR_{ratio}(100-\alpha)$  が 1 から離れていたとしても, モンテカルロ法による VaR の方がより正確にリスク量を捉えている可能性があることに注意されたい.

ポートフォリオのリスク指標に反映されるのかを比較できるように、ベンチマークに対するモンテカルロ法で算出したリスク指標の割合を検討し、リスク計測を行う。つまり、この指標は、ベンチマーク対比で生成したポートフォリオのリスクをどの程度適切に把握できるのかを表し、異なるポートフォリオ間でのテールリスクの比較が可能となる。本研究の枠組みでは、(各分布からモンテカルロ法で算出したリスク指標) ÷ (ヒストリカル法で求めたリスク指標) を、 $VaR_{ratio}(100 - \alpha)$  と定義し、この指標がどの程度 1 に近いかを判断する。 $VaR_{ratio}(100 - \alpha)$  が 1 を超過する場合には、モンテカルロ法で算出したリスク指標がヒストリカル法で求めたリスク指標よりも大きく損失を見積もっているのでリスクを過大評価、1 未満の場合には過小評価していると判断する。ただし、モンテカルロ法で算出するリスク指標は 100 セット分あり (2.2 節を参照)、5 章の実証分析では  $VaR_{ratio}(100 - \alpha)$  の 100 セットの平均を結果として示す。

## 4. 実証分析

### 4.1. データと分析モデル設定, 分析対象

実証分析に用いるデータは、東証 1 部における個別株式の終値である。データ分析期間は 2008 年 4 月 30 日から 2012 年 5 月 31 日の 1000 営業日である。ただし、この期間にデータが存在しない銘柄あるいは、GHS $t$  分布のパラメータ推定を行った際に、収束解が得られなかった銘柄は分析対象から除外した<sup>13</sup>。実際、投資家が株式投資を行う場合に、安定的に分布の形状が把握できない銘柄に確率分布を仮定してポートフォリオを構築するとは考えづらいため。よって、対象銘柄は 1210 銘柄となった<sup>14</sup>。また、リスク指標の分位点  $\alpha\%$  は 0.5%, 1.0%, 2.5%, 5.0% とし、ポートフォリオの銘柄数の上限  $n$  を 20 とする。

ポートフォリオを構築する際に分析対象とする個別株式は尖度や歪度を持つことを考慮して、以下の 2 つのセットを採用する。

- セット 1: 尖度に制限がないもとの、歪度が高い 20 銘柄
- セット 2: 尖度が低い順に数えて 50% までの銘柄を対象とするといった尖度に制限を加えたもとの、歪度が高い 20 銘柄

ここで、セット 1 は、同じ期待リターン、分散を持つ株式であれば、ダウンサイドリスクが比較的小さく、高い収益を狙う投資家に好まれると考えたものである。また、セット 2 は、リーマンショック等まれに起こるイベントにポートフォリオの損益が大きく左右されることを嫌うため、ある程度尖度を抑えたもとの歪度が高い株式を狙う投資家に好まれると想定したものである。4.2 節にて後述するが、尖度の水準を制限しても、正規分布と同程度の尖度になるわけではない。また、個別株式には歪度が高くなるほど、尖度が高くなる傾向があり、セット 1 の株式は歪度のみならず尖度も高い傾向がある。

ポートフォリオは、歪度が高いポートフォリオを構成するために、対象となる株式を歪度が高い順に組み入れる。銘柄数が 1 銘柄の場合には歪度が最も高い 1 銘柄を、2 銘柄の場合には歪度が高い 2 銘柄の単純平均でポートフォリオを構成し、3 銘柄以上の場合も同様に、歪度が高い銘柄の単純平均でポートフォリオを構成し、 $n$  銘柄まで組み合わせる。

<sup>13</sup>前川・河合 [16] では、東証 1 部の個別銘柄を対象に株式のボラティリティに関する実証研究を行っている。そこで GARCH(1,1) モデルのパラメータ推定を行った際に収束解が得られない銘柄があり、分析対象から除外している。

<sup>14</sup>分析期間において東証 1 部には 1379 銘柄あり、そのうち収束解が得られなかったのは 169 銘柄である。収束解が得られなかった理由には、データの中に GHS $t$  分布にも従わないような外れ値があり、対数尤度を最大化するようなパラメータセットを 1 つに収束できなかったことが考えられる。

このような個別株式に異なる周辺分布を仮定しコンピュータを用いてポートフォリオのリターン分布を算出し、銘柄数に依存してどの程度リスク指標に違いがみられるのかを検討する。また、分析項目は以下の4点である。

- 第1に、個別株式にリターン分布を仮定する場合に、尖度や歪度を表現するパラメータが有意であるのかを検討する。分析に際して、個別株式に仮定する分布には  $N$ ,  $t$ ,  $GHS_t$  分布の3種類の分布を仮定し、 $t$  分布や  $GHS_t$  分布の尖度や歪度を表す形状パラメータ  $\tilde{\nu}$ ,  $\beta$  に関して尤度比検定を行う。また、それらの結果について個別銘柄の歪度・尖度の観点から考察する。
- 第2に、尖度の制約が異なる2セットの個別株式を対象に、ヒストリカル法で求めたリスク指標をベンチマークとし、リスク指標がベンチマーク対比でどの程度1に近いのかを検討する。分析に際して、個別株式に仮定する分布には、 $N$  分布、 $t$  分布、 $GHS_t$  分布の3種類の分布を仮定する。また、リスク指標の分位点や銘柄数が異なる場合に、どの程度リスク指標 ( $VaR_{ratio}$ ) に違いがあるかを検討する。
- 第3に、尖度の制約が異なる2セットの株式銘柄のポートフォリオを対象に、 $t$  コピュラのパラメータ（自由度と個別銘柄間の相関係数の値）を個別株式に仮定する分布ごとに比較検討を行う。
- 第4に、尖度の制約が異なる2セットの株式銘柄のポートフォリオを対象に、モンテカルロ法で算出したリスク指標がベンチマーク対比でどの程度1に近いのか、個別株式に仮定する分布ごとに検討する。

#### 4.2. 個別株式のリターン分布のパラメータに関する結果と考察

本節では個別株式を対象に、3種類の確率分布 ( $N$ ,  $t$ ,  $GHS_t$  分布) を用いて、個別株式にリターン分布を仮定する場合に、尖度や歪度を表現するパラメータが有意であるのかを分析する。表2には、 $t$  分布の尖度を表現する自由度  $\tilde{\nu}$  や  $GHS_t$  分布における歪度を表現する形状パラメータ  $\beta$  に関する尤度比検定の結果を、全銘柄中何銘柄でパラメータ  $\tilde{\nu}, \beta$  が有意かどうかを割合で示した。例えば、表2の帰無仮説  $\beta = 0$  に対して有意水準10%の欄にある43%という数字は、1210銘柄のうち43%の銘柄において  $\beta$  が10%有意で0ではなく、個別株式が歪度の情報を持つことを示している。

表2: Likelihood ratio test summary on the shape parameter of skew and kurtosis

Null hypothesis \ Significance level	10%	5%	1%
$1/\tilde{\nu} = 0$	100%	100%	100%
$\beta = 0$	43%	32%	19%

まず、表2をみると、帰無仮説が  $1/\tilde{\nu} = 0$  の場合、全ての銘柄において1%有意である。また、帰無仮説が  $\beta = 0$  の場合、1210銘柄のうち半数近い銘柄において10%有意であり、2割の銘柄で1%有意である。このことから、個別株式は  $N$  分布では捉えきれない尖度の情報を持ち、また2, 3割の銘柄が歪度の情報を持つことが確認された。

次に、個別銘柄の歪度と尖度の水準と  $GHS_t$  分布における歪度を表現する形状パラメータ  $\beta$  の有意性の関係性について確認するために、個別株式の尖度と歪度の関係を散布図として図5に示した。その際には、 $GHS_t$  分布の歪みに関する形状パラメータ  $\beta$  の有意水準が、1%, 5%, 10%, それ以上の有意水準のものをそれぞれ、○, □, △, +のプロットで示した。

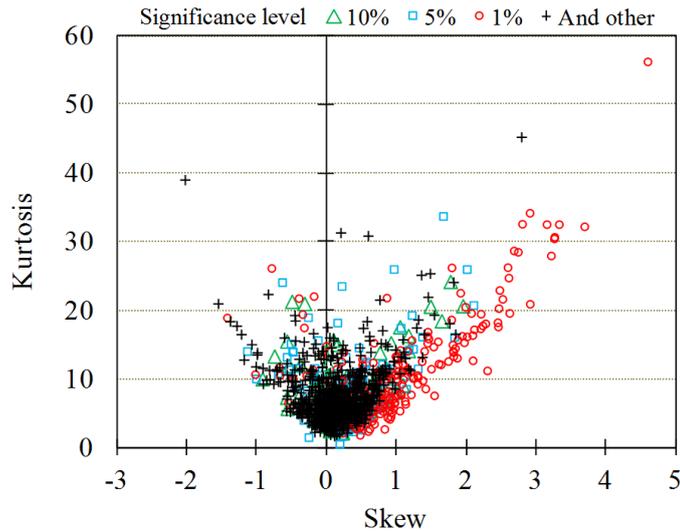


図 5: Equities' skew and kurtosis plots

図5をみると、尖度の水準に関わらず歪度が高い領域において○のプロットが目立つ。このことから、(リターン分布の裾ではなく)リターン分布全体でリスクを把握する際には、尖度の水準を問わず歪度が高い銘柄において、GHSt分布を適用する必要があることがわかった。

#### 4.3. 個別株式におけるリスク計測

尖度の制約が異なる歪度が高い2セットの個別株式を対象にモンテカルロ法で算出したリスク指標が、ヒストリカル法で求めたリスク指標にどの程度近いのかを検討する。尖度の制約がないもとで歪度が高い20銘柄(セット1)を対象に、 $N$ ,  $t$ , GHSt分布を用いたVaRによるリスク計測の結果をそれぞれ図6, 7, 8に示した。横軸は個別銘柄を歪度が高い順に1, 2, 3, ...,  $n$ とした際の番号を、縦軸は個別株式の $VaR_{ratio}$ の値を表し、分位点 $\alpha\%$ は0.5%, 1.0%, 2.5%, 5.0%である。また、尖度に関する制約がある銘柄(セット2)を対象に、 $N$ ,  $t$ , GHSt分布を用いてリスク計測を行った結果を図9, 10, 11に示した。なお、 $VaR_{ratio}$ の値が全て正の値であるが、それはモンテカルロ法で算出したVaRの値とヒストリカル法で求めたVaRの値がともに負の値をとることに起因する。

まずは尖度の制約がない個別株式(セット1)の銘柄や分位点に対する $VaR_{ratio}$ のばらつきに関して検討する。図6をみると、 $N$ 分布では銘柄に関わらず高い分位点において $VaR_{ratio}$ が1を超過しリスクを過大評価し、0.5%分位点において $VaR_{ratio}$ が1を割り込み、リスクを過小評価している。一方で、図6を図7, 8と比較すると、この傾向は $t$ 分布やGHSt分布において緩和されるとわかる。ここで、 $N$ 分布が他の分布と比較して尖度を表現できないことを考慮すると、 $VaR_{ratio}$ のばらつきが小さくなるように計測するには、分布の形状パラメータに尖度や歪度を考慮する必要があるとわかった。

次に、 $VaR_{ratio}$ のばらつきが小さい $t$ , GHSt分布に関して、 $VaR_{ratio}$ の水準を検討する。図7の $t$ 分布では5.0%分位点のときに概ね $VaR_{ratio}$ が1に近いが、0.5%~2.5%分位点のときに $VaR_{ratio}$ が1を超過しリスクを過大評価しているとわかる。これは、 $t$ 分布が歪度を表現できないために、歪度が高い個別株式の裾のリスクを過大評価したことに起因すると考えられる。一方で、図8のGHSt分布では概して $VaR_{ratio}$ が1に近いとわかる。これは、GHSt分布が尖度のみならず歪度も把握できるためと考えられる。

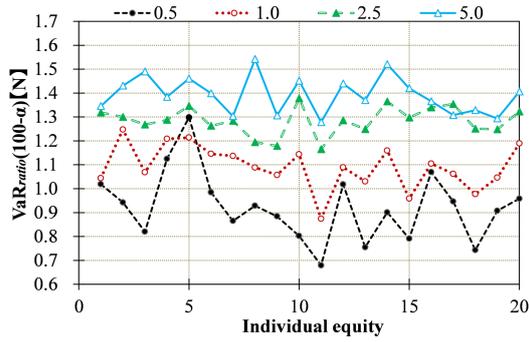


図 6:  $VaR_{ratio}$  [N, Individual equity, Set 1]

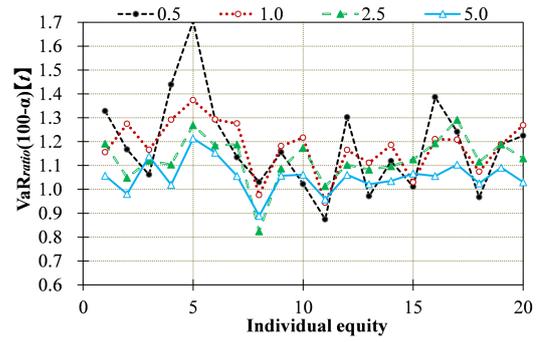


図 7:  $VaR_{ratio}$  [t, Individual equity, Set 1]

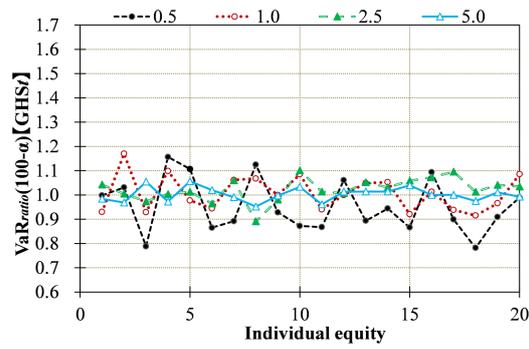


図 8:  $VaR_{ratio}$  [GHSt, Individual equity, Set 1]

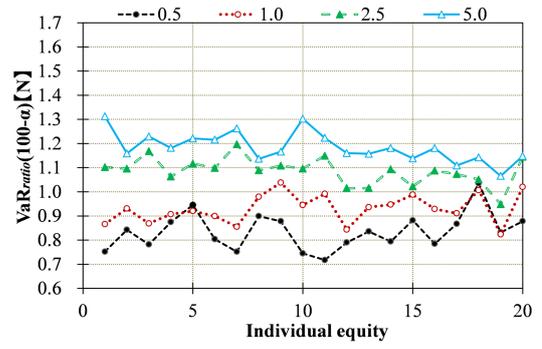


図 9:  $VaR_{ratio}$  [N, Individual equity, Set 2]

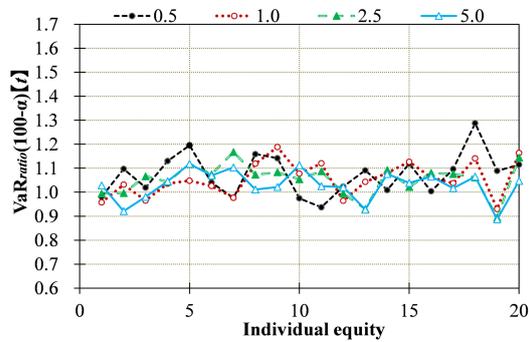


図 10:  $VaR_{ratio}$  [t, Individual equity, Set 2]

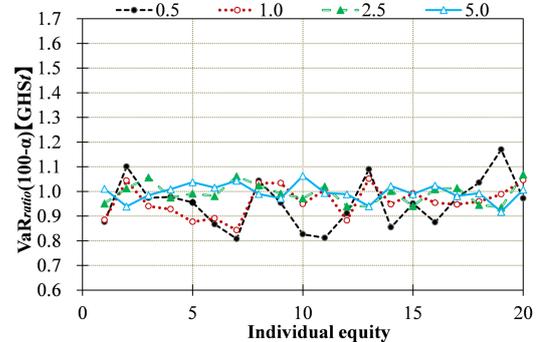


図 11:  $VaR_{ratio}$  [GHSt, Individual equity, Set 2]

また、尖度の制約がある個別株式（セット2）の  $VaR_{ratio}$  の値（図9～11）を検討する。ここで、4.2節において個別株式の特性として尖度が低くなればそれに応じて歪度が0に近く傾向があることを考慮すると、尖度にある程度の制約を課せば、リターン分布の裾において、 $t$  分布と  $GHS_t$  分布の差は小さくなることが想定される。 $VaR_{ratio}$  のばらつきに関してみると、 $N$  分布（図9）では制約がない場合（図6）と比べて  $VaR_{ratio}$  の分位点や銘柄ごとのばらつきは若干小さくなっている。図10の  $t$  分布では、制約がない場合（図7）のようなばらつきはみられず、図11の  $GHS_t$  分布に近いものとなった。

次に、水準に関してみると、0.5%～1.0%分位点の場合に  $t$  分布では  $VaR_{ratio}$  がリスクを過大評価、 $GHS_t$  分布では過小評価することもあるが、 $N$  分布と比較して両分布は1に近い値をとり概ねリスクを適切に評価できているとわかる。このことから、セット2のように個別株式において、尖度の制約を全銘柄の50%程度に抑えれば、 $t$  分布や  $GHS_t$  分布を用いたリスク計測において、 $VaR_{ratio}$  のばらつきが小さくかつ適切な水準でリスクを評価できるとわかった。

#### 4.4. $t$ コピュラのパラメータに関する結果と考察

本節では、尖度の制約が異なる2セットの株式銘柄のポートフォリオを対象に、 $t$  コピュラのパラメータ（コピュラの相関の自由度と個別銘柄ごとの相関係数）を、周辺分布の観点から比較検討する。尖度の制約がない場合（セット1）、尖度の制約がある場合（セット2）におけるコピュラの自由度のパラメータを表3に示した。

まず、尖度の制約がない場合（セット1）においてコピュラの自由度に関するパラメータについて検討する。表3の  $t$  コピュラの自由度をみると、 $N$  分布よりも  $t$  分布や  $GHS_t$  分布において自由度が低いとわかる。また、 $t$  分布と  $GHS_t$  分布の自由度は互いに近い水準をとるとわかる。ここで、4.2節や4.3節において、 $GHS_t$  分布が個別株式の変動を適切に捉えていることを考慮すると、周辺分布に裾の厚い  $t$  分布や  $GHS_t$  分布を用いると、 $t$  コピュラの裾での依存性の強さを表す自由度を適切に把握できると考えられる。一方で、 $N$  分布では裾における依存性を過小評価しがちであると考えられる。尖度の制約がある場合（セット2）においても、同様な傾向がみられた。

表 3:  $t$  copula's degree of freedom

Marginal distribution	Set 1	Set 2
$N$	24	35
$t$	14	17
$GHS_t$	12	13

また、個別銘柄間の相関係数の値について分布別の差異を比較する。図12, 13にはセット1, セット2を対象にした場合の  $t$  コピュラの相関係数の値をそれぞれ散布図の形式でまとめた。横軸は周辺分布に  $t$  分布を採用した場合の個別銘柄間の相関係数の値を、縦軸は周辺分布に  $N$  分布以外の分布を採用した場合の相関係数の値であり、+, ○の縦軸の値はそれぞれ  $N$  分布,  $GHS_t$  分布を周辺分布に採用した場合の相関係数の値を表している。なお、 $n = 20$  銘柄を対象にしているため相関係数は各セットで  ${}_nC_2 = 190$  個ある。また、 $t$  分布を採用した場合に比べ他の個別銘柄間の相関係数が大きくなっているかどうかを確かめるために、各図中には回帰直線と回帰式、その決定係数の値を載せた。

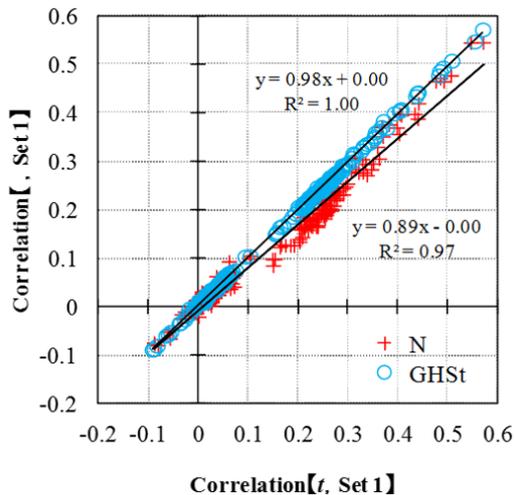


図 12: Correlation plots 【Set 1】

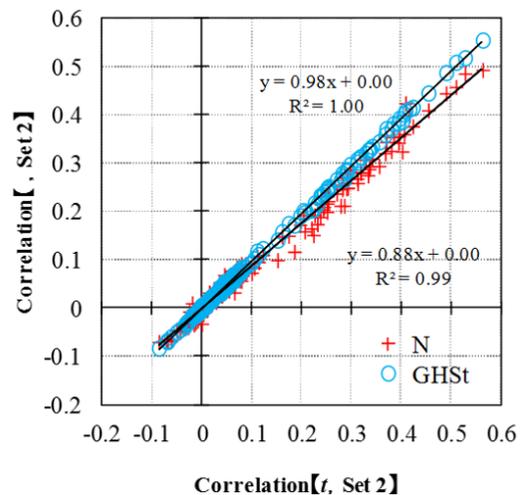


図 13: Correlation plots 【Set 2】

まず尖度の制約がない場合（セット 1）において周辺分布別の差異を検討する．図 12 をみると， $t$  分布と GHSt 分布の相関係数の値は，回帰係数が 0.98 であるため，ほぼ一致していることがわかる．一方で， $t$  分布の相関係数の値は N 分布のものとは比べると，回帰係数が 0.89 であるので，1 割程度低いことが分かる．このことから，N 分布を採用すると， $t$  分布や GHSt 分布と比べて，株式間の依存性を弱く算出する傾向があると分かる．この傾向は，尖度の制約がある場合（セット 2）（図 13）においても同様に見られた．

#### 4.5. 尖度の制約がなく歪度が高い銘柄から構成されるポートフォリオのリスク計測

本節では尖度に関する制約がなく歪度が高い個別株式（セット 1）で構成されるポートフォリオを対象に，モンテカルロ法でリスク指標を算出した場合に，ベンチマーク対比でどの程度 1 に近いのかを検討する．図 14，15，16 にはセット 1 の株式リターンに N， $t$ ，GHSt 分布を仮定した場合のポートフォリオの  $VaR_{ratio}$  の値を示す．横軸はポートフォリオの構成銘柄数，縦軸はポートフォリオの  $VaR_{ratio}$  の値を表す<sup>15</sup>．

まずリターンに仮定する分布ごとにポートフォリオの  $VaR_{ratio}$  の値を比較する．分位点や構成銘柄数に対する  $VaR_{ratio}$  のばらつきについてみると，図 18 において N 分布を用いた場合に，分位点ごとのばらつきが大きい．一方で， $t$  分布（図 15）や GHSt 分布（図 16）では小さくなっていることがわかる．また，N 分布を採用した場合に，個別株式において  $VaR_{ratio}$  の分位点や銘柄数ごとのばらつきが大きかった（4.3 節参照）が，ポートフォリオにおいてもそのばらつきが依然残ることがわかった．

次に， $VaR_{ratio}$  のばらつきを小さく評価できた  $t$ ，GHSt 分布に関して， $VaR_{ratio}$  の水準に注目する．まず GHSt 分布に関して検討する．1，2 銘柄の場合には， $VaR_{ratio}$  は 1 に近い．3 銘柄を超える場合では 1.0%～5.0% 分位点において 0.9 の付近で推移し有意に差があるとはいえないが，0.5% 分位点において 0.8 の付近で推移し，ベンチマーク対比でリスクを過小評価しているとわかる．ここで，GHSt 分布では個別株式のリターンをある程度適切にリスク計測できていたこと（4.3 節参照）と，市場にストレスが発生し大きな損失が出る時期

<sup>15</sup>モンテカルロ法で得られる 100 セットの  $VaR_{ratio}$  より標準偏差を算出した結果，銘柄数や分布，分位点に依存してばらつきがあるが， $VaR_{ratio}$  の標準偏差は 0.01～0.11 程度であった．このことから  $VaR_{ratio}$  が 0.1 程度であればベンチマークと必ずしも有意に差があるとは言えないとわかった．

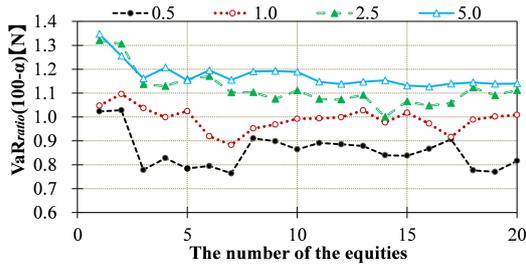


図 14:  $VaR_{ratio}$  [N, Portfolio, Set 1]

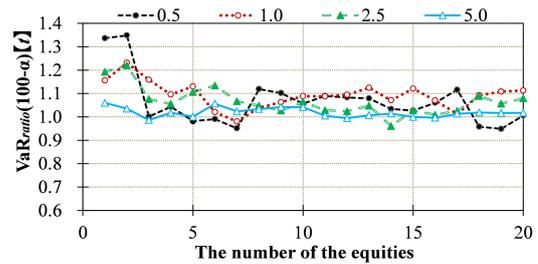


図 15:  $VaR_{ratio}$  [t, Portfolio, Set 1]

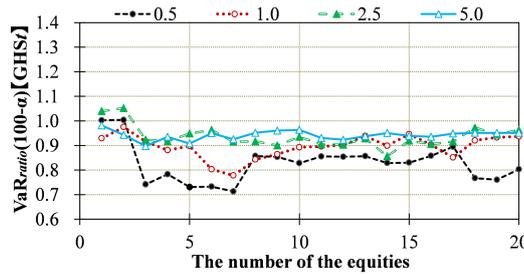


図 16:  $VaR_{ratio}$  [GHSt, Portfolio, Set 1]

には資産間の相関が高まることを考慮すると、全期間のデータに基づいて生成した VaR では、0.5% 分位点で観測されるような大きなイベント直後の株式間の強い依存性を過小評価してしまう ( $VaR_{ratio}$  が 1 を割り込む) と考えられる。

また、図 19 より  $t$  分布を採用したときには、構成銘柄数が 1, 2 銘柄の場合には  $VaR_{ratio}$  を過大評価しているが、構成銘柄数が 3 銘柄を超える場合には 1 の付近を推移している。これは、個別株式の VaR の過大評価 (4.3 節参照) と、大きなイベント直後の株式間の強い依存性を過小評価したことが相殺されて  $VaR_{ratio}$  が 1 に近い値をとったと考えられる。

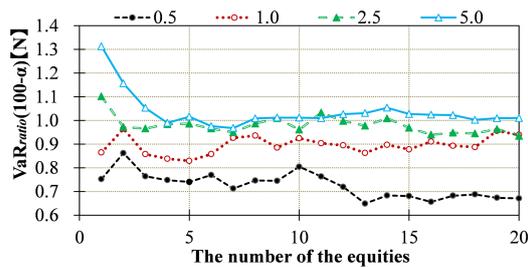
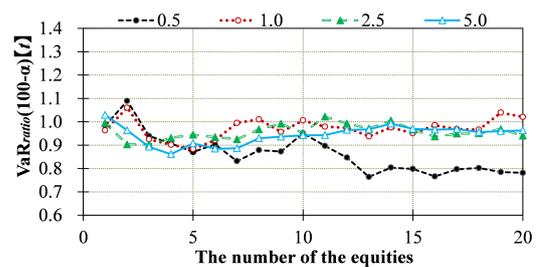
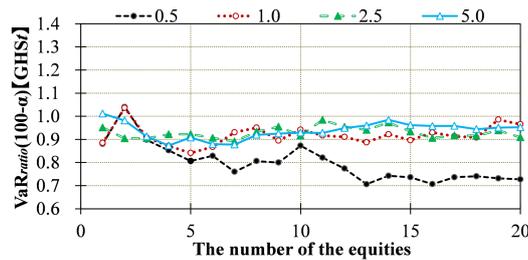
これらの結果から、コピュラの枠組みで裾においてリスク計測を行う場合には、1.0%~5.0% 分位点においては個別株式に GHSt 分布を仮定し適切に個別株式の変動を捉え、かつ、株式間の依存性の強まりを考慮してリスク計測することが重要であるとわかる。また、0.5% 分位点では極端なテールリスクを過小評価するため、保守性の観点から個別株式に  $t$  分布を採用するなど別途リスク計測が必要と考えられる。

#### 4.6. 尖度の制約があり歪度が高い銘柄から構成されるポートフォリオのリスク計測

本節では尖度に関する制約があるもとで歪度が高い 20 銘柄 (セット 2) から構成されるポートフォリオを対象にモンテカルロ法で算出したリスク指標がベンチマーク対比でどの程度 1 に近いのかを検討する。

ここで、4.3 節において尖度に制約を設けると個別株式において N 分布では分位点や構成銘柄数に対する  $VaR_{ratio}$  のばらつきや、 $t$  分布と GHSt 分布の  $VaR_{ratio}$  の差が小さくなることを受けて、ポートフォリオの裾のリスク計測を行った場合にどの程度、差異が残るのか見極めたい。つまり、個別株式の尖度をある程度制限すれば比較的歪度が小さくなるために GHSt 分布ではなく  $t$  分布や N 分布でポートフォリオの裾のリスクを把握しても問題ないかを判断できる。図 17, 18, 19 にはセット 2 の株式リターンに N,  $t$ , GHSt 分布を仮定した場合の  $VaR_{ratio}$  の値を示す。

まず、 $VaR_{ratio}$  の分位点、銘柄数ごとのばらつきについて検討する。N 分布では、尖度の

図 17:  $VaR_{ratio}$  [N, Portfolio, Set 2]図 18:  $VaR_{ratio}$  [t, Portfolio, Set 2]図 19:  $VaR_{ratio}$  [GHSt, Portfolio, Set 2]

制約がない場合（図 14）と比較して、尖度の制約がある場合（図 17）には、 $VaR_{ratio}$  のばらつきが低減しているが、ばらつきが残るとわかる。一方、図 18, 19 においては  $t$  分布や GHSt 分布の場合には、0.5% 分位点を除くと 1.0%~5.0% 分位点において概ね  $VaR_{ratio}$  のばらつきが小さくなっており、ほぼ同じ推移をしている。分布間で比較すると、N 分布に対して  $t$  分布や GHSt 分布は異なる推移をしていることが確認でき、尖度の影響が依然残ると考えられる。またポートフォリオのリスク計測を行う場合に N 分布では、個別株式の変動を捉えられていないのか、依存構造を捉えられていないのか特定できないため扱いにくいと考えられる。

$VaR_{ratio}$  のばらつきが小さい  $t$ , GHSt 分布に関して、 $VaR_{ratio}$  を水準の観点から検討する。 $VaR_{ratio}$  は概してどちらの分布も同じ推移をし、1.0%~5.0% 分位点においては概ね 1 に近い推移をしているが、0.5% 分位点において 1 から乖離する傾向がある。これは、個別株式の VaR を概ね適切に把握できていた（4.3 節参照）が、市場にストレスが発生し大きな損失が出る時期に高まる資産間の相関を過小評価したため  $VaR_{ratio}$  が 1 から乖離したと考えられる。また、ポートフォリオの銘柄数が大きくなるにつれてこの傾向は顕著にみられる。

これらの結果から、まず、N 分布では尖度を表現できないために、VaR のばらつきが大きくなる傾向があると確認できた。次に、構成銘柄の尖度を抑えれば 1.0%~5.0% 分位点において GHSt 分布ではなくとも  $t$  分布によるリスク計測を行うことで、少ない銘柄からポートフォリオの裾のリスクを概ね計測できると考えられる。また、0.5% 分位点のような極端なテールリスクについては、保守性の観点から個別株式に  $t$  分布を採用することや株式間の依存性の強まりを考慮するなど別途リスク計測が必要と考えられる。

## 5. まとめと結語

日本株式市場において個別株式における歪度や尖度の性質を確認したうえで、2 セットの株式（尖度の制約がなく歪度が高い 20 銘柄、尖度の制約として全体の 50% までに抑えたもと

で歪度が高い 20 銘柄) を対象に,  $t$  コピュラを用いてポートフォリオのリスク計測を行った。

第 1 に, 個別株式のリターン分布には,  $N$  分布よりも尖度を表現できる  $t$  分布が有効か, また  $t$  分布よりも歪度を表現できる GHS $t$  分布が有効かを検討した。結果から, ほぼすべての銘柄において  $N$  分布よりも  $t$  分布が有効であり, 2, 3 割の銘柄において  $t$  分布よりも GHS $t$  分布が有効であるとわかった。

第 2 に, 尖度の制約が異なる 2 セットの個別株式を対象に, モンテカルロ法で算出したリスク指標がヒストリカル法で求めたリスク指標 (ベンチマーク) にどの程度近いのかを検討した。結果から, 尖度の制約がない場合において,  $t$  分布や GHS $t$  分布を用いることで概ねリスク指標のばらつきを小さく, リスクを適切に把握できることがわかった。一方で,  $N$  分布を用いると, 多くの銘柄においてリスク指標のばらつきがみられるとわかった。また, 尖度の制約がある場合には,  $t$  分布と GHS $t$  分布のリスク計測の差が小さくなる傾向が確認できた。

第 3 に, 尖度の制約の異なる 2 セットの株式銘柄を対象に, 周辺分布に採用する分布ごとに株式間の依存構造を比較した。結果から, 周辺分布に  $N$  分布を採用した場合には,  $t$  分布や GHS $t$  分布を用いた場合と比較して株式間の依存性が弱く推定される傾向がみられた。

第 4 に, 尖度の制約が異なる 2 セットの株式銘柄のポートフォリオを対象に, コピュラを用いてモンテカルロ法で算出したリスク指標がベンチマークにどの程度近いのかを検討した。結果から, 周辺分布に  $N$  分布ではなく  $t$ , GHS $t$  分布を採用することで, 尖度の制約に依存せず, 分位点ごとのリスク指標のばらつきを小さくできるとわかった。また, 1.0%~5.0% 分位点においては, 個別株式に GHS $t$  分布を採用することで, リスクの水準を適切に把握できるとわかった。ただし, 0.5% 分位点のような極端なテールリスクについては, 保守性の観点から個別株式に  $t$  分布を採用することや株式間の依存性の強まりを考慮するなど別途リスク計測が必要であるとわかった。さらに, 尖度の制約を加えた場合において, 構成銘柄数が増えれば GHS $t$  分布と  $t$  分布のリスク計測の差異が小さくなることがわかった。

最後に, 本研究では深く議論できなかったが, ストレス時におけるサンプルデータの構築手法やポートフォリオ間の  $VaR_{ratio}$  のばらつきを比較評価できるような統計手法の提案が今後の課題として挙げられる。

本稿はすべて筆者の個人的な見解であり, 所属する組織の見解ではありません。責任はすべて筆者個人に帰属します。

## 参考文献

- [1] K. Aas and D. H. Haff: The generalized hyperbolic skew Student's  $t$ -distribution. *Journal of Financial Econometrics*, **4-2** (2006), 275-309.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, 1972.
- [3] A. Azzalini and A. Capitanio: Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew  $t$ -distribution. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, **65-2** (2003), 367-389.
- [4] O. Barndorff-Nielsen: Exponentially decreasing distributions for the logarithm of the particle size. *Mathematical and Physical Sciences*, **353** (1977), 401-419.

- [5] E. Bouye, V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet and T. Roncalli: *Copulas for Finance: a reading guide and some applications*. Financial Econometrics Research Centre, City University Business School, London, 2000.
- [6] J. Y. Campbell, A. W. Lo and A. C. MacKinlay: *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University, 1997.
- [7] P. Embrechts, F. Lindskog and A. McNeil: Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of Heavy Tailed Distributions in finance*, **8** (2003), 329–384.
- [8] E. F. Fama: Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. *The Journal of Business*, **36–4** (1963), 420–429.
- [9] C. Fernandez and M. F. J. Steel: On Bayesian modeling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*, **93–441** (1998), 359–371.
- [10] P. Glasserman, P. Heidelberger and P. Shahabuddin: Portfolio value-at-risk with heavy-tailed risk factors. *Mathematical Finance*, **12–3** (2002), 239–270.
- [11] 磯貝孝: 切断安定分布を用いた VaR・ES の計測精度に関する数値的分析. リスクマネジメント (ジャフィー・ジャーナル: 金融工学と市場計量分析) (朝倉書店, 2014).
- [12] H. Konno and K. Suzuki: A mean-variance-skewness portfolio optimization model. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **38–2** (1995), 173–187.
- [13] K. K. Lai, L. Yu and S. Wang: Mean-variance-skewness-kurtosis-based portfolio optimization. *Computer and Computational Sciences*, **2** (2006), 292–297.
- [14] H. Markowitz: Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7–1** (1952), 77–91.
- [15] R. Mashal and M. Naldi: Pricing multiname credit derivatives, heavy tailed hybrid approach. Columbia University, 2002.
- [16] 前川功一, 河合研一: 株価収益率におけるボラティリティの長期依存性に関する一考察. 広島経済大学経済研究論集, **30–3・4** (2009), 53–69.
- [17] R. C. Merton: Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, **3–1** (1976), 125–144.
- [18] 宮崎浩一, 中尾司: “正規分布と NIG 分布”, “日次と週次”, 日本株式市場におけるリスク管理とオプション評価. ジャフィージャーナル (2003), 149–183.
- [19] J. Nakajima and Y. Omori: Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student’s  $t$ -distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, **56–11** (2012), 3690–3704.
- [20] 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: 観測数及び銘柄数に依存した VaR の推定誤差に関する実証分析. オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学 **50–4** (2005), 277–284.
- [21] J. G. Simonato: The performance of Johnson distributions for computing value at risk and expected shortfall. *Journal of Derivatives*, **19–1** (2011), 7–24.
- [22] 新谷幸平・山田哲也・吉羽要直: 金融危機時における資産価格変動の相互依存関係: コピュラに基づく評価. 金融研究, **29–3** (2010), 89–122.
- [23] A. Sklar: Random variables, joint distribution functions, and copulas. *Kybernetika*, **9–6** (1973), 449–460.

- [24] 戸坂凡展, 吉羽要直: コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説. 金融研究, **24**–別冊 **2** (2005), 115–162.
- [25] 塚原英敦: 「接合分布関数 (コピュラ) の理論と応用」, 北川源四郎・竹村彰通 (編) 『21世紀の統計科学 III 数理・計算の統計科学』. 東京大学出版会, 第5章 (2008), 111–146.
- [26] 渡部敏明, 佐々木浩二: ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク. 金融研究, **25**–別冊 **2** (2006), 39–74.
- [27] 山井康浩, 吉羽要直: リスク指標の性質に関する理論的整理–VaR と期待ショートフォールの比較分析–. 金融研究, **20**–別冊 **2** (2001), 95–131.
- [28] J. Yan: Enjoy the joy of copulas, with a package copula. *Journal of Statistical Software*, **21**–4 (2007), 1–21.
- [29] 吉羽要直: ストレス状況を勘案した相関構造とリスク合算. 日本銀行ワーキングペーパーシリーズ, **13-J-4** (2013), 1–37.

伊東 賢二  
株式会社日本信用情報機構  
〒101-0042 東京都千代田区神田東松下町  
4 1 番地 1  
E-mail: itou-k@jicc.co.jp

## ABSTRACT

**RISK MANAGEMENT OF EQUITY PORTFOLIO  
WITH LARGE SKEWNESS AND KURTOSIS USING  $t$  COPULA**

Kenji Ito

Japan Credit Information Reference Center Corp.

This research addresses the risk management of Japanese equity portfolios composed of the equities with large skew in their returns. Multivariate normal distribution is usually adopted in portfolio risk management due to its convenience. However, for the risk management of the above portfolio, we should adopt more flexible distribution with skewness and kurtosis for each equity return distribution and utilize  $t$  copula function to incorporate correlations among the return distributions.

To shed some light on the risk management, this research examines it from the following three viewpoints. First, as each equity return distribution, not only normal distribution or  $t$ -distribution but also generalized hyperbolic skew Student's  $t$ -distribution, which is able to capture skewness and kurtosis of the return distribution are adopted. Second, the accuracy of the tail risk measure is examined from the view of both percentile point and the numbers of the equities in the portfolio.

The result suggests that the combination of generalized hyperbolic skew Student's  $t$ -distribution for each equity return distribution and the copula with the correlations in the market stress generates relatively good tail risk measure for 1.0% to 5.0% percentile points and the numbers of equities in the portfolio.