

交差点における交通信号の最適サイクル長と切り替え時間へのアプローチ

李明哲 張玉超
福岡大学

(受理 2015 年 1 月 20 日; 再受理 2015 年 9 月 30 日)

和文概要 都市においては、人口と交通が集中しているため、交通渋滞が多く発生し、また、それによって経済損失や環境問題など様々な問題が引き起こされる。一般道路での渋滞の最大の原因の一つは信号交差点にある。本論文では、一般道路の一つの交差点に注目し、この交差点での、車の渋滞を最大に緩和するための、最適なサイクル長と切り替え時間について考える。具体的には、1) この交差点では車両が一定の割合で連続的に到着する。2) 一サイクル内に到着したすべての車両はそのサイクル内に対象交差点を通過できると想定し、車の平均待ち時間モデルに関する定式化を行った。また、定式化したモデルの分析を通じて、車の平均待ち時間を最小にする際の、信号の最適サイクル長と切り替え時間を解析的に求めた上、信号の全赤時間、黄信号時間と黄信号時間における車の通過率との関係を明らかにした。最後は、福岡市内にある交差点に焦点をあて、車の到着状況を詳しく調べた上、この交差点での、実際のデータを用いた最適サイクル長及び最適切り替え時間を求める事例調査を行った。本研究の意義は、交通信号制御モデルにおける詳しい解析手法の提示と既存モデルの拡張を行ったところにある。

キーワード: 交通, 渋滞, 信号制御, 平均待ち時間, 最適サイクル長, 最適切り替え時間

1. はじめに

都市では人口や交通が集中し、交通渋滞がよく発生するので、人々の生活にいろいろな不便を果す。また、交通渋滞は経済損失や環境問題など様々な問題も引き起こしている。国土交通省の報告 [9] によると、日本全国で発生する渋滞の損失は 1 人あたり約年間 30 時間の時間損失であって、お金の換算すると約 12 兆円に達すると言われている。一方、渋滞による損失は、経済的損失だけにとどまらない。実際、交通渋滞に巻き込まれる車の速度の低下に伴い、二酸化炭素や窒素酸化物などの排出量も増加し、沿道の大気環境も悪化する。

交通渋滞の原因は、一般道路と高速道路で異なる。一般道路での渋滞の最大の原因の一つは信号交差点にある。交差点での赤信号と黄信号は車の通過に要する時間を長引かせ、また、青信号になると、いったん停車した車は一定のスピードまで加速するのにある程度の時間がかかるので、交差点での停車時間、あるいは待ち時間を最小にするための信号制御は大変重要な課題となる。

交差点での、車の平均待ち時間の評価式に関わる代表的な研究として、例えば、Darroch, Newell, and Morris [1], Mcneil [3], Miller [4], Newell [5,6], 高橋, 森村 [10] などが挙げられる。具体的に、車両の到着について、Newell [6] はポアソン過程, Mcneil [3] は複合ポアソン過程を仮定して、それぞれの交差点における平均待ち時間に関する評価式を与えている。一方で、Darroch, Newell, and Morris [1] は赤信号の点灯後から、最初の車が到着するまでの時間間隔が平均待ち時間に与える影響を調べた。さらに、Miller [4] は待ち行列モデルを用いた平均待ち時間の評価式に基づき、最適サイクル長と信号切り替え時間の導出を試みた。Miller [4] の解析結果は近似的なもので、また車の到着分布に大いに頼るなど明快で

なく、この種の研究は数学的解析の視点から考えると有意義であるが、実用性に欠けるなどの問題点を抱えている (Newell [5]). そこで、実用性を重視し、モデル解析の明快さを求める視点から、平均到着率や平均サービス率などわかりやすい評価指標をもって累積流入量と累積流出量の概念を提案し、さらにそれを平均待ち時間の評価式に適用したのが Newell [5] である。また、それを発展させる形で、高橋, 森村 [10] では、東西, 南北方向をそれぞれ一方向とみなし、流入-流出グラフを用いて平均待ち時間を最小にするサイクル長と信号切り替え時間を数理的に導いている。高橋, 森村 [10] の研究は計算の関係上、全赤信号 (交差する両方向がともに赤であるような時間) が存在しない前提でその解を導いているとしており、本研究はそのさらなる拡張を行ったものである。関連研究として、張, 李 [11], Li, Ryu, and Song [2] などサイクル長を固定した場合の、最適切り替え時間を求めるものも存在する。詳しくは、張, 李 [11] は、四方向における車の到着時間間隔が一定で、かつ離散的に到着した場合、Li, Ryu, and Song [2] は、四方向からの車がポアソン過程に従うとし、さらに車の発進による遅延時間をも想定した研究である。

以上のサーベイを踏まえ、本研究では、一般道路での一つの交差点を研究対象とし、交通渋滞を最大に緩和するための、信号システムのサイクル長と切り替え時間に着目した最適化を試みる。つまり、ある一つの交差点に到着した四方向の車の平均待ち時間を最小にすることをその目的とし、その際の最適サイクル長とそれに伴う最適信号切り替え時間を数理的に導く。高橋, 森村 [10] に比べ、本論文では次のような拡張が行なわれた: 1) 2方向から4方向を考慮する。2) 全赤信号を取り入れ、さらに黄信号を車の通過できる部分 (青信号とみなせる) と通過できない部分 (全赤信号とみなせる) に分けて分析を行い、その解を解析的に求める。3) サイクル長が一定となった場合の、最適な信号切り替え時間についても同時に考察する。最後は、実例研究を通して、本モデルの実用性を検証する。

以下、第2節ではまず、パラメータを設定したうえで、対象となるモデルの定式化を行う。次に、第3節では提案されたモデルについての数理解析を行う。続いて、第4節では、一つの実際の交差点を例に実地調査を実施する。最後に、第5節では本研究の内容をまとめるとともに今後の課題について議論する。

2. モデルの定式化

一般道路の交差点では、一サイクルは一つの赤信号, 青信号, 黄信号から成り立っている。ただし、ある一つの方向の赤信号時間帯をそれと交差している方向から観察してみると、必ず青信号, 黄信号, そして赤信号の一部と重なっていることがわかる。本研究では、このように交差する両方向において赤信号が同時に存在する時間を全赤信号時間と定義し、また、以下では上の赤信号時間帯のうち、全赤信号時間を取り除いたもの、つまり交差している方向において青信号, 黄色信号と重なっている部分を通常の赤信号時間として定義する。このような交差点において、車が一定の割合で連続的に到着し、一サイクルの間に到着した全ての車が、そのサイクル内に (青信号の間は一定の割合で) 交差点を通過できると仮定したうえで、一サイクル内に到着した車の、平均待ち時間に関する最適化モデルを定式化する。

2.1. 関連パラメータの設定

本モデルの定式化に必要な、関連パラメータを以下のように設定する:

- ① T : サイクル長
- ② a'_0 : 全赤信号時間
- ③ a'_1 : 東西方向の赤信号時間

- ④ a'_2 : 南北方向の赤信号時間
- ⑤ b'_1 : 東西方向の青信号時間
- ⑥ b'_2 : 南北方向の青信号時間
- ⑦ c : 黄信号時間. ここで c は黄信号に車が通過できる時間 (青信号とみなせる) kc と車が通過できない時間 (全赤信号とみなせる) $(1-k)c$ に分けられる. なお, k は黄信号における車の通過率.
- ⑧ $\lambda_1 \sim \lambda_4$: 東, 西, 南, 北方向からの車の平均到着率
- ⑨ $\mu_1 \sim \mu_4$: 東, 西, 南, 北方向からの車の平均サービス率 (単位時間に交差点を通過できる車の数)

また, 本論文ではモデルを簡素化するため, $a_1 = a'_1 - (1-k)c$, $b_1 = b'_1 + kc$, $a_2 = a'_2 - (1-k)c$, $b_2 = b'_2 + kc$, $a_0 = a'_0 + (1-k)c$ とする. なお, 一サイクルにおける各パラメータの関係は図1に示すとおりである.

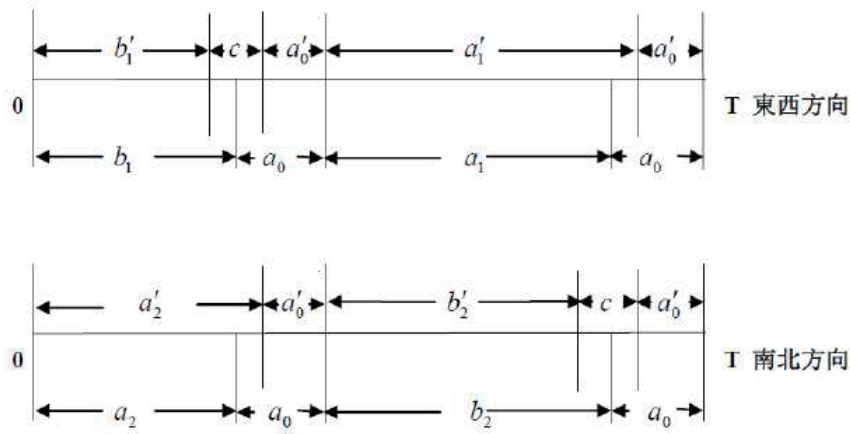


図1: 一サイクルにおける各パラメータの関係図

2.2. 対象交差点の制約条件

本モデルでは, 次のような制約条件が要請される:

$$\begin{cases} a_1 = b_2, a_2 = b_1 \\ T = a_1 + b_1 + 2a_0 = a_2 + b_2 + 2a_0 \\ \lambda_i T \leq \mu_i b_1 (i = 1, 2), \lambda_i T \leq \mu_i b_2 (i = 3, 4) \\ a_1, a_2, b_1, b_2, T \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで, 1列目の式は東西方向の車が通行不可能の際, 南北方向が通過可能, またその逆も成立することを意味する. 2列目の式は交差点での一サイクルが赤信号, 青信号, 黄信号並びに全赤信号の和によって表されることを示している. 最後の3列目は, 一サイクルの間に到着した全ての車がそのサイクル内に交差点を通過できるという条件を表している.

2.3. 対象交差点の目的関数

2.3.1. 一サイクルにおける東、西方向からの車の総待ち時間

東方向からの、一サイクルにおける時刻 t までの車の累積流入量と累積流出量をそれぞれ $A_1(t)$, $D_1(t)$ とすると、

$$A_1(t) = \lambda_1 t \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$D_1(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < a_1 + 2a_0) \\ \mu_1 t - \mu(a_1 + 2a_0) & (a_1 + 2a_0 \leq t < t_0) \\ \lambda_1 t & (t_0 \leq t \leq T) \end{cases} \quad (2.2)$$

を図2で表すことが可能である。ここで、横軸 t は時刻を表し、縦軸 n は車の累積量を表す。図2において、待ち行列がちょうどなくなる際の時刻を t_0 とすると、

$$t_0 = \frac{\mu_1(a_1 + 2a_0)}{\mu_1 - \lambda_1} \quad (2.3)$$

となる。

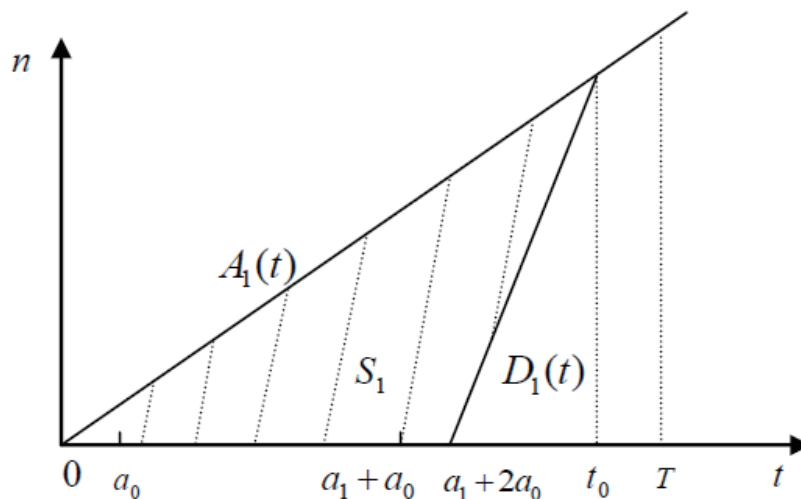


図 2: 東方向における車の流入－流出グラフ

よって、一サイクルにおける東方向からの車の総待ち時間を W_1 とすると、 W_1 は三角形 S_1 の面積となることから、

$$W_1 = S_1 = \int_0^T A_1(t)dt - \int_0^T D_1(t)dt = \frac{\lambda_1 \mu_1 (a_1 + 2a_0)^2}{2(\mu_1 - \lambda_1)} \quad (2.4)$$

が求められる。

同様にして、一サイクルにおける西方向からの車の総待ち時間は

$$W_2 = \frac{\lambda_2 \mu_2 (a_1 + 2a_0)^2}{2(\mu_2 - \lambda_2)} \quad (2.5)$$

となる。

2.3.2. 一サイクルにおける南，北方向からの車の総待ち時間

南方向からの，一サイクルにおける時刻 t までの車の累積流入量と累積流出量をそれぞれ $A_2(t)$, $D_2(t)$ とすると，2.3.1 と同じようにして

$$A_2(t) = \lambda_3 t + \lambda_3(T - a_1 - a_0) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$D_2(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < a_0) \\ \mu_3(t - a_0) & (a_0 \leq t < t') \\ \lambda_3 t + \lambda_3(T - a_1 - a_0) & (t' \leq t < a_1 + a_0) \\ \lambda_3 T & (a_1 + a_0 \leq t \leq T) \end{cases} \quad (2.6)$$

を図3で表すことが可能である．ここでも，横軸 t は時刻を表し，縦軸 n は車の累積量を表す．また，図3においても待ち行列がちょうどなくなる際の時刻を t' とすると，

$$t' = \frac{\lambda_3(T - a_1 - a_0) + \mu_3 a_0}{\mu_3 - \lambda_3} \quad (2.7)$$

となる．

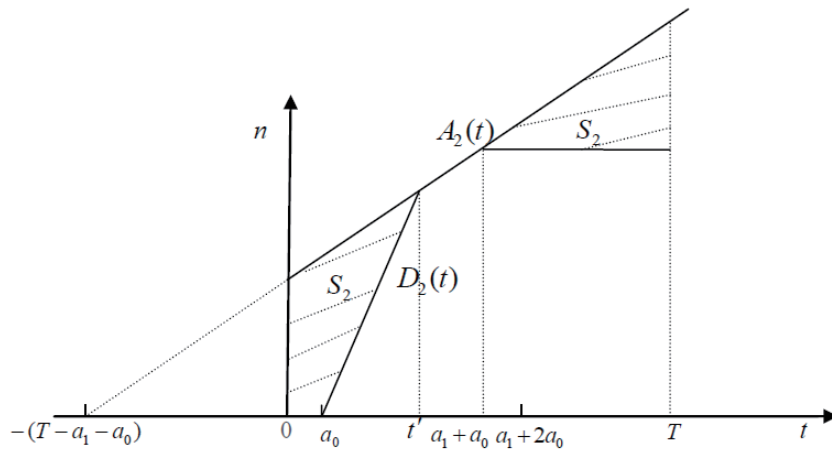


図 3: 南方向における車の流入－流出グラフ

すると，一サイクルにおける南方向からの車の総待ち時間は

$$W_3 = S_2 = \int_0^T A_2(t) dt - \int_0^T D_2(t) dt = \frac{\lambda_3 \mu_3 (T - a_1)^2}{2(\mu_3 - \lambda_3)} \quad (2.8)$$

となり，また，一サイクルにおける北方向の車の総待ち時間は

$$W_4 = \frac{\lambda_4 \mu_4 (T - a_1)^2}{2(\mu_4 - \lambda_4)} \quad (2.9)$$

となる．

2.3.3. 車の総待ち時間と平均待ち時間

一サイクルにおける車の総待ち時間と平均待ち時間をそれぞれ W , W_q とすると,

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \\ &= \frac{\lambda_1 \mu_1 (a_1 + 2a_0)^2}{2(\mu_1 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_2 \mu_2 (a_1 + 2a_0)^2}{2(\mu_2 - \lambda_2)} + \frac{\lambda_3 \mu_3 (a_2 + 2a_0)^2}{2(\mu_3 - \lambda_3)} + \frac{\lambda_4 \mu_4 (a_2 + 2a_0)^2}{2(\mu_4 - \lambda_4)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$W_q = \frac{W}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)T} \quad (2.11)$$

となる. 式 (2.11) の平均待ち時間は, 一サイクルにおける車の総待ち時間に関する式 (2.10) から, そのサイクルのうちに到着した, 四方向の車の総台数を割ったものとして表す. なお, この一サイクルにおける一方向の車の到着台数は, 累積流入量に関する式 (2.2) と式 (2.6) より簡単に求められる.

2.4. 対象交差点における信号切り替えモデルの定式化

2.2 節と 2.3 節より, 対象としている交差点での, 一サイクルにおける車の平均待ち時間を最小にする信号切り替え時間モデルに関する定式化は次のようになる:

$$\begin{aligned} \text{Min } & W_q \\ \text{s.t. } & T = a_1 + a_2 + 2a_0 \\ & \lambda_i T \leq \mu_i a_2 \quad (i = 1, 2), \quad \lambda_i T \leq \mu_i a_1 \quad (i = 3, 4) \\ & a_1, a_2, T \geq 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

ここで, a_1, a_2, T は決定変数であり, a_0, λ_i, μ_i は定数である. a_0 は, 安全のため一定の値として決められた全赤信号時間に, 黄色信号中の車の通過できない部分, いわゆる制御不可能なものを加えた値であり, ここでは定数として取り扱う.

3. 非線形計画モデル解析

3.1. モデルの簡素化

3.1 節では, 式 (2.12) についての簡素化作業を行う. まず, 制約条件の中の変数 a_2 を, a_1 と T を用いて表し, 次に, 車の利用率 $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を利用して, a_1 と T の範囲を定める. すると, 式 (2.12) の制約条件は式 (3.1) と等価になる:

$$\begin{cases} \max(\rho_3, \rho_4)T \leq a_1 \leq T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0 \\ T \geq \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{cases} \quad (3.1)$$

一方, 目的関数の中の $a_2 + 2a_0$ を $T - a_1$ に替えると, 式 (2.12) は式 (3.2) のような 2 変数の非線形計画問題に変形できる:

$$\begin{aligned} \text{Min } & W_q \\ \text{s.t. } & \max(\rho_3, \rho_4)T \leq a_1 \leq T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0 \\ & T \geq \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここでは, a_1 と T だけが決定変数であり, ρ_i, a_0 は定数である.

3.2. 大域的最適解の存在性

式 (3.2) の制約条件は線形制約であるため、 Wq が凸関数であることさえ証明できれば、対象モデルが凸計画問題として、大域的最適解をもつことになる (福島 [7])。以下では、四つの Step をもってその凸性を証明する。

[Step 1] Wq のヘッセ行列 (Hessian matrix) は以下のものである:

$$\begin{aligned} \nabla^2 Wq &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Wq}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 Wq}{\partial a_1 \partial T} \\ \frac{\partial^2 Wq}{\partial T \partial a_1} & \frac{\partial^2 Wq}{\partial T^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2(A+B)}{T} & -\frac{2[A(a_1+2a_0)+Ba_1]}{T^2} \\ -\frac{2[A(a_1+2a_0)+Ba_1]}{T^2} & \frac{[A(a_1+2a_0)^2+Ba_1^2]}{T^3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)} \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2 \mu_2}{\mu_2 - \lambda_2} \right), \\ B &= \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)} \left(\frac{\lambda_3 \mu_3}{\mu_3 - \lambda_3} + \frac{\lambda_4 \mu_4}{\mu_4 - \lambda_4} \right) \end{aligned}$$

である。

[Step 2] Wq のヘッセ行列の固有方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$ より固有値 λ を求める:

$$\lambda = \frac{(C+D) \pm \sqrt{(C+D)^2 - 4(CD - E^2)}}{2} \quad (3.4)$$

ここで,

$$C = \frac{2(A+B)}{2}, D = \frac{2[A(a_1+2a_0)^2 + Ba_1^2]}{T^3}, E = -\frac{2[A(a_1+2a_0) + Ba_1]}{T^2}$$

である。

[Step 3] これらの固有値がすべて非負であることを確かめる:

① $\Delta = (C+D)^2 - 4(CD - E^2) = (C-D)^2 + 4E^2 > 0$ から、二つの固有値をもつことがわかる。

② $(CD - E^2) = \frac{16a_0^2}{T^4} AB > 0$ ($A > 0, B > 0$) より、 $\sqrt{\Delta} < (C+D)$ ($C > 0, D > 0$) が確認できる。

③ ①, ②より二つの固有値がともに非負であることが導かれる。

[Step 4] Wq のヘッセ行列は2次の実数値対称行列であり、その固有値がすべて非負であることから、その半正定値性 (positive semi-definite) が判明でき、 Wq が凸関数であることが証明される。

3.3. 局所解と最適解

3.3節では、まず局所解を求めることから、最適解を導くに至るまでのモデル解析過程を、三つの Step をもって行う。

[Step 1] T を固定し, Wq が極小値をとる際の, a_1 の局所解 ($a_{1 \text{ 局所}}$) を求める.
 まず, $\frac{\partial Wq}{\partial a_1} = 0$ から, Wq が制約無し極小値をとる際の

$$a_1^* = \frac{NT - M \cdot 2a_0}{M + N} \quad (3.5)$$

を求める. ここで,

$$M = [\lambda_1 \mu_1 (\mu_2 - \lambda_2) + \lambda_2 \mu_2 (\mu_1 - \lambda_1)] (\mu_3 - \lambda_3) (\mu_4 - \lambda_4),$$

$$N = [\lambda_3 \mu_3 (\mu_4 - \lambda_4) + \lambda_4 \mu_4 (\mu_3 - \lambda_3)] (\mu_1 - \lambda_1) (\mu_2 - \lambda_2)$$

である.

次に, 式 (3.2) の制約条件を加え, 固定された T の値 ($T_{\text{固定}}$) によって, Wq が極小値をとる際の, a_1 のおのこの局所解 ($a_{1 \text{ 局所}}$) $\max(\rho_3, \rho_4)T$, $T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0$, a_1^* を確かめる. 図4では, $T_{\text{固定}}$ の範囲と, それによって得られる $a_{1 \text{ 局所}}$ の値を明示している. 詳しくは,

① $N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$

$T_0 \leq T_{\text{固定}} \leq T_1$ のとき, $a_{1 \text{ 局所1}} = \max(\rho_3, \rho_4)T_{\text{固定}}$

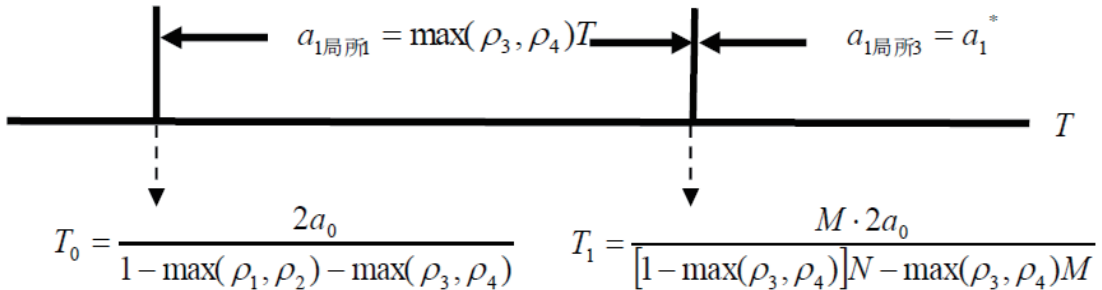
$T_{\text{固定}} \geq T_1$ のとき, $a_{1 \text{ 局所3}} = a_1^* = \frac{NT_{\text{固定}} - M \cdot 2a_0}{M + N}$

② $N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$

$T_0 \leq T_{\text{固定}} \leq T_2$ のとき, $a_{1 \text{ 局所2}} = T_{\text{固定}} - \max(\rho_1, \rho_2)T_{\text{固定}} - 2a_0$

$T_{\text{固定}} \geq T_2$ のとき, $a_{1 \text{ 局所3}} = a_1^* = \frac{NT_{\text{固定}} - M \cdot 2a_0}{M + N}$

$N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$



$N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$

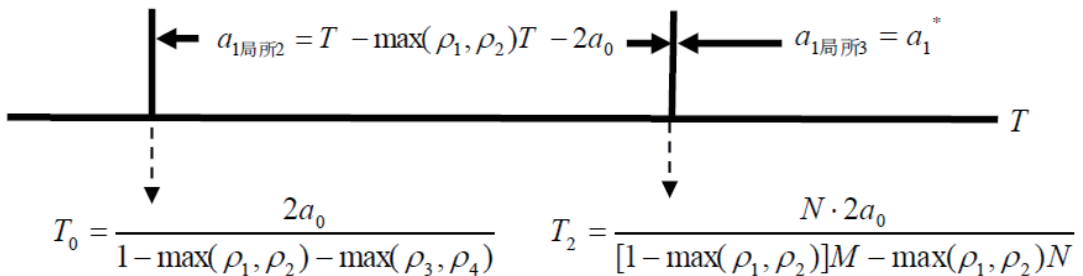


図 4: T が固定された際の $a_{1 \text{ 局所}}$ の値

となるが, これは a_1^* と a_1 に関する制約, つまり a_1 の範囲との位置関係 (図5) によって導かれる.

以下では、図5で示される三つのグラフより、上記結果に至る、具体的な導出過程を説明する：

$$\textcircled{1} a_1^* \leq \max(\rho_3, \rho_4)T$$

$a_{1 \text{ 局所1}} = \max(\rho_3, \rho_4)T$ のとき、 W_q が極小値をとるので、

$$\begin{cases} \max(\rho_3, \rho_4)T \geq \frac{NT - M \cdot 2a_0}{M + N} \\ T \geq \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{cases} \quad (3.6)$$

より

$$\begin{cases} \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \leq T \leq \frac{M \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_3, \rho_4)]N - \max(\rho_3, \rho_4)M} \\ (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \\ T \text{ の値は存在しない} \quad (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] > M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \end{cases} \quad (3.7)$$

が導かれる。

$$\textcircled{2} a_1^* \geq T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0$$

$a_{1 \text{ 局所2}} = T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0$ のとき、 W_q が極小値をとるので、

$$\begin{cases} T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0 \leq \frac{NT - M \cdot 2a_0}{M + N} \\ T \geq \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{cases} \quad (3.8)$$

より

$$\begin{cases} T \text{ の値は存在しない} \quad (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] < M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \\ \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \leq T \leq \frac{N \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]M - \max(\rho_1, \rho_2)N} \\ (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \end{cases} \quad (3.9)$$

が得られる。

$$\textcircled{3} \max(\rho_3, \rho_4)T \leq a_1^* \leq T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0$$

$a_{1 \text{ 局所3}} = a_1^*$ のとき、 W_q が極小値をとるので、

$$\begin{cases} \max(\rho_3, \rho_4)T \leq \frac{NT - M \cdot 2a_0}{M + N} \leq T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0 \\ T \geq \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{cases} \quad (3.10)$$

より

$$\begin{cases} T \geq \frac{M \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_3, \rho_4)]N - \max(\rho_3, \rho_4)M} \\ (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \\ T \geq \frac{N \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]M - \max(\rho_1, \rho_2)N} \\ (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \end{cases} \quad (3.11)$$

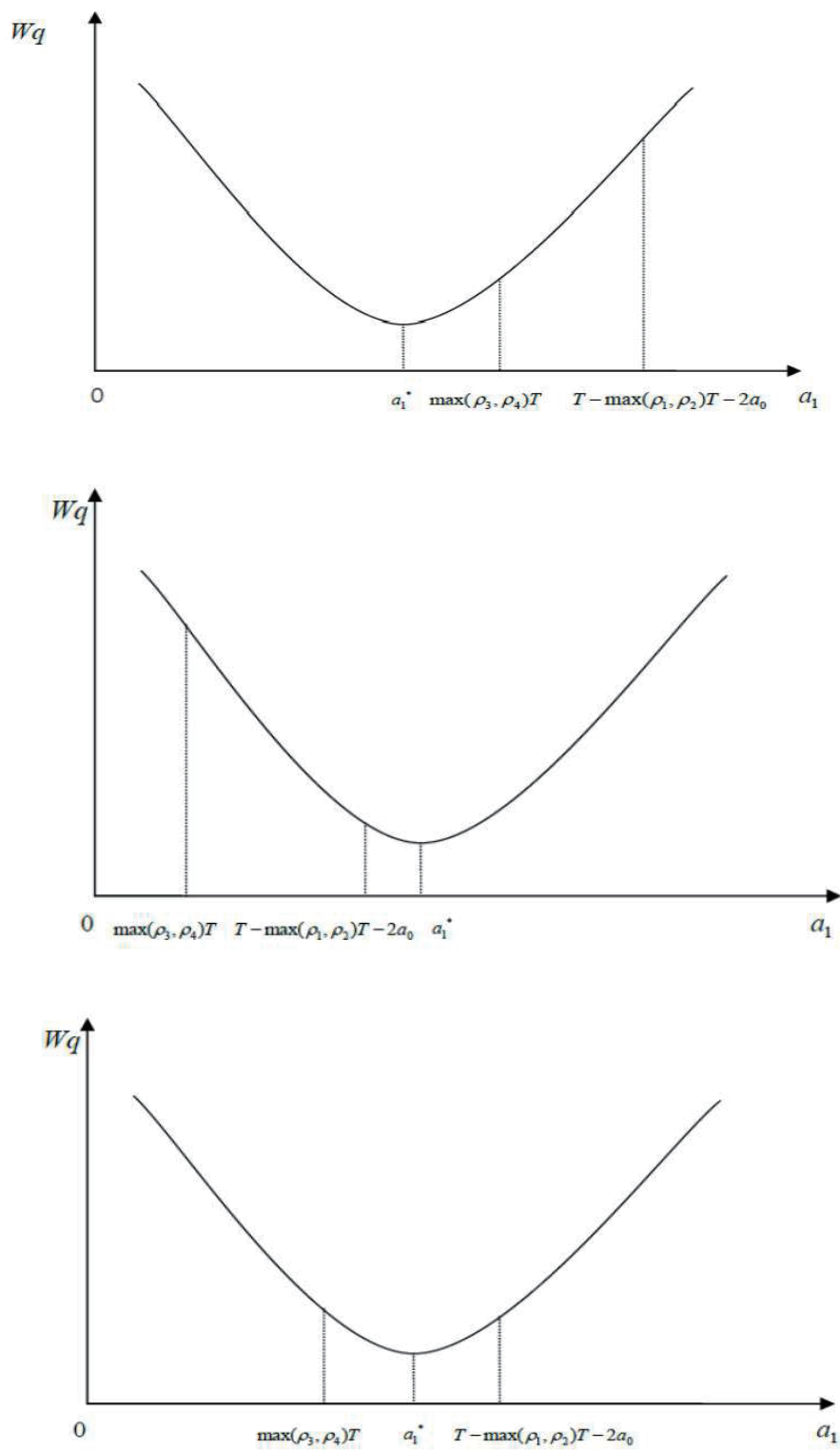


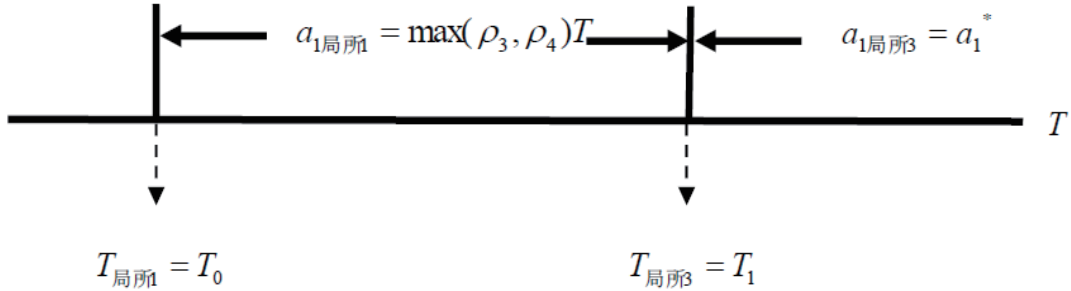
図 5: a_1^* と a_1 の範囲の位置関係

が導かれる。

[Step 2] a_1 を $a_{1\text{局所}}$ とし, W_q を T に関する 1 変数関数に変換して, 今度は T を動かしながら W_q が極小値をとる際の, T の値 ($T_{\text{局所}}$) を求める. その結果, 図 6 のような T の局所解が得られる.

以下では, 図 6 で示されるような結果に至る, 具体的な導出過程を説明する:

$$N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$$



$$N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$$

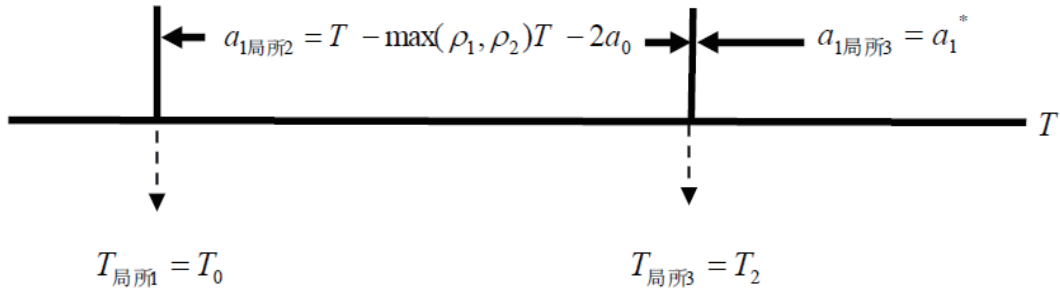


図 6: W_q が極小値をとる際の $T_{\text{局所}}$ の値

$$\textcircled{1} a_1^* \leq \max(\rho_3, \rho_4)T$$

$a_{1\text{局所}1} = \max(\rho_3, \rho_4)T$ のとき, W_q が極小値をとる. この際,

$$\frac{\partial W_q}{\partial T} = HI \cdot \frac{[\max(\rho_3, \rho_4)]^2 - (2a_0)^2}{T^2} + HJ \cdot [1 - \max(\rho_3, \rho_4)]^2 > 0 \quad (3.12)$$

となる. ここで,

$$H = \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)}, I = \frac{\lambda_1\mu_1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2\mu_2}{\mu_2 - \lambda_2}, J = \frac{\lambda_3\mu_3}{\mu_3 - \lambda_3} + \frac{\lambda_4\mu_4}{\mu_4 - \lambda_4}$$

であり, W_q は T に関する増加関数であることから

$$\begin{cases} T_{\text{局所}1} = \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} & (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \\ T \text{ の値は存在しない} & (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] > M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \end{cases} \quad (3.13)$$

が導かれる。

$$\textcircled{2} a_1^* \geq T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0$$

$a_{1 \text{ 局所}2} = T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0$ のとき, W_q が極小値をとる。この際,

$$\frac{\partial W_q}{\partial T} = HJ \cdot \frac{[\max(\rho_1, \rho_2)]^2 - (2a_0)^2}{T^2} + HI \cdot [1 - \max(\rho_1, \rho_2)]^2 > 0 \quad (3.14)$$

となり, W_q は T に関する増加関数であることから, 上と同じようにして

$$\begin{cases} T \text{ の値は存在しない} & (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] < M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \\ T_{\text{局所}2} = \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} & (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \end{cases} \quad (3.15)$$

が得られる。

$$\textcircled{3} \max(\rho_3, \rho_4)T \leq a_1^* \leq T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0$$

$a_{1 \text{ 局所}3} = a_1^*$ のとき, W_q が極小値をとる。この際,

$$\frac{\partial W_q}{\partial T} = \frac{HI \cdot N^2 + HJ \cdot M^2}{(M + N)^2} \left[1 - \left(\frac{2a_0}{T} \right)^2 \right] > 0 \quad (3.16)$$

となり, W_q も T に関する増加関数であることから,

$$\begin{cases} T_{\text{局所}3} = \frac{M \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_3, \rho_4)]N - \max(\rho_3, \rho_4)M} & (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \\ T_{\text{局所}3} = \frac{N \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]M - \max(\rho_1, \rho_2)N} & (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \end{cases} \quad (3.17)$$

が導かれる。なお, $T_{\text{局所}3}$ を a_1^* に代入すると,

$$a_{1 \text{ 局所}3} = \begin{cases} \max(\rho_3, \rho_4)T_{\text{最適}} & (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \\ T_{\text{局所}3} - \max(\rho_1, \rho_2)T_{\text{局所}3} - 2a_0 & (N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]) \end{cases} \quad (3.18)$$

が得られる。

[Step 3] W_q が最小値をとる際の, $a_{1 \text{ 最適}}$ と $T_{\text{最適}}$ を求める。

$$\textcircled{1} N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$$

図6と式(3.18)より, $T = T_{\text{局所}1}, T_{\text{局所}3}$ のとき, $a_{1 \text{ 局所}1}, a_{1 \text{ 局所}3}$ を $a_{1 \text{ 局所}} = \max(\rho_3, \rho_4)T$ として統一できることがわかる。この際, 式(3.13), 式(3.17)を比較し, W_q が T に関する増加関数であることから式(3.19)を導出できる:

$$\begin{cases} a_{1 \text{ 最適}} = \max(\rho_3, \rho_4)T_{\text{最適}} \\ T_{\text{最適}} = \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\textcircled{2} N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$$

上と同様、 $T = T_{\text{局所}2}, T_{\text{局所}3}$ のとき、 $a_{1\text{局所}1}, a_{1\text{局所}3}$ を $a_{1\text{局所}} = T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0$ として統一できる。この際、式 (3.15)、式 (3.17) を比較し、 W_q も T に関する増加関数であることから式 (3.20) を導出できる：

$$\begin{cases} a_{1\text{最適}} = T_{\text{最適}} - \max(\rho_1, \rho_2)T_{\text{最適}} - 2a_0 = \max(\rho_3, \rho_4)T_{\text{最適}} \\ T_{\text{最適}} = \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{cases} \quad (3.20)$$

①と②を統合すると、対象となる非線形計画問題(式 (2.12) と式 (3.2)) の最適解 $a_{1\text{最適}}, a_{2\text{最適}}, T_{\text{最適}}$ が式 (3.21) のようにまとめられる：

$$\begin{cases} a_{1\text{最適}} = b_{2\text{最適}} = \max(\rho_3, \rho_4)T_{\text{最適}} \\ a_{2\text{最適}} = b_{1\text{最適}} = \max(\rho_1, \rho_2)T_{\text{最適}} \\ T_{\text{最適}} = \frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{cases} \quad (3.21)$$

すなわち、最適サイクル長と最適切り替え時間は以下のようになる：

$$\begin{cases} b'_{2\text{最適}} = \max(\rho_3, \rho_4)T_{\text{最適}} - kc \\ b'_{1\text{最適}} = \max(\rho_1, \rho_2)T_{\text{最適}} - kc \\ T_{\text{最適}} = \frac{2[a'_0 + (1-k)c]}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \end{cases} \quad (3.22)$$

特別に、サイクル長 T が固定された場合の $b'_{1\text{最適}}, b'_{2\text{最適}}$ も図 4 から簡単に与えられる：

① $N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \leq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$

$$\begin{cases} b'_{2\text{最適}} = \max(\rho_3, \rho_4)T - kc \\ \left(\frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \leq T \leq \frac{M \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_3, \rho_4)]N - \max(\rho_3, \rho_4)M} \right) \\ b'_{1\text{最適}} = T - \max(\rho_3, \rho_4)T - 2a_0 - kc \\ \left(\frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \leq T \leq \frac{M \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_3, \rho_4)]N - \max(\rho_3, \rho_4)M} \right) \\ b'_{2\text{最適}} = \frac{NT - M \cdot 2a_0}{M + N} - kc \quad \left(T \geq \frac{M \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_3, \rho_4)]N - \max(\rho_3, \rho_4)M} \right) \\ b'_{1\text{最適}} = \frac{MT - N \cdot 2a_0}{M + N} - kc \quad \left(T \geq \frac{M \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_3, \rho_4)]N - \max(\rho_3, \rho_4)M} \right) \end{cases} \quad (3.23)$$

② $N[1 - \max(\rho_3, \rho_4)] \geq M[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]$

$$\begin{cases} b'_{2\text{最適}} = T - \max(\rho_1, \rho_2)T - 2a_0 - kc \\ \left(\frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \leq T \leq \frac{N \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]M - \max(\rho_1, \rho_2)N} \right) \\ b'_{1\text{最適}} = \max(\rho_1, \rho_2)T - kc \\ \left(\frac{2a_0}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \leq T \leq \frac{N \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]M - \max(\rho_1, \rho_2)N} \right) \\ b'_{2\text{最適}} = \frac{NT - M \cdot 2a_0}{M + N} - kc \quad \left(T \geq \frac{N \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]M - \max(\rho_1, \rho_2)N} \right) \\ b'_{1\text{最適}} = \frac{MT - N \cdot 2a_0}{M + N} - kc \quad \left(T \geq \frac{N \cdot 2a_0}{[1 - \max(\rho_1, \rho_2)]M - \max(\rho_1, \rho_2)N} \right) \end{cases} \quad (3.24)$$

3.4. a'_0 と k, c の関係

実際にサイクル長を決めるとき、大蔵 [8] では

$$T^* = \frac{2c}{1 - [\max(\rho_1, \rho_2) + \max(\rho_3, \rho_4)]/0.9} \quad (3.25)$$

の値を用いる。

式 (3.22) と式 (3.25) より、

$$\frac{2c}{1 - [\max(\rho_1, \rho_2) + \max(\rho_3, \rho_4)]/0.9} = \frac{2[a'_0 + (1 - k)c]}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} \quad (3.26)$$

を用いると、

$$a'_0 = (\Delta + k - 1)c \quad (3.27)$$

が得られる。これは、 Wq が最小となる際、 a'_0 と k, c の間の関係を表すものである。ここで、

$$\Delta = \frac{1 - [\max(\rho_1, \rho_2) + \max(\rho_3, \rho_4)]}{1 - [\max(\rho_1, \rho_2) + \max(\rho_3, \rho_4)]/0.9} \quad (3.28)$$

である。

4. 実例調査

4.1. 調査内容と調査結果

本研究では、福岡県福岡市早良区有田七丁目に位置する室住団地口交差点を調査対象とし、この交差点における朝 8~9 時のラッシュアワーの関連データを収集した。具体的な調査内容と調査結果は以下の通りである：

- ① 信号サイクル長 ($T = 60$ 秒), 東西方向の青信号時間 ($b'_1 = 27$ 秒), 南北方向の青信号時間 ($b'_2 = 21$ 秒), 全赤信号時間 ($a'_0 = 3$ 秒), 黄信号時間 ($c = 3$ 秒)。
- ② 一サイクルにおける東, 西, 南, 北方向からの車の到来台数。
- ③ 一サイクルの赤信号の間, 東, 西, 南, 北方向からの車の到来台数。
- ④ 一サイクルの赤信号の間, 東, 西, 南, 北方向からの車が青信号の間に交差点を通過する時間。

ここで、②は $\lambda_1 \sim \lambda_4$ を求めるのに必要なデータであり、③と④は $\mu_1 \sim \mu_4$ を求めるのに必要なデータである。本事例調査における、車の到着率やサービス率にはばらつきが存在するが、以下ではその平均値、つまり平均到着率と平均サービス率をもってモデルの近似解を与えることにする。

② ~ ④の調査内容より、

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.083, & \lambda_2 = 0.053, & \lambda_3 = 0.055, & \lambda_4 = 0.008 \\ \mu_1 = 0.227, & \mu_2 = 0.136, & \mu_3 = 0.190, & \mu_4 = 0.157 \\ \rho_1 = 0.366, & \rho_2 = 0.390, & \rho_3 = 0.289, & \rho_4 = 0.051 \end{cases} \quad (4.1)$$

が得られた。

4.2. データ分析

4.1 節の調査結果に、最適サイクル長と最適切り替え時間の計算式 (3.22) を適用すると、

$$\begin{cases} b'_{2 \text{ 最適}} = \max(\rho_3, \rho_4)T_{\text{最適}} - kc = 6.60 \text{ 秒} \\ b'_{1 \text{ 最適}} = \max(\rho_1, \rho_2)T_{\text{最適}} - kc = 9.44 \text{ 秒} \\ T_{\text{最適}} = \frac{2[a'_0 + (1-k)c]}{1 - \max(\rho_1, \rho_2) - \max(\rho_3, \rho_4)} = 28.04 \text{ 秒} \end{cases} \quad (4.2)$$

が導かれる。ただし、ここで $k = 0.5$ とする。

この交差点での、実際のデータに基づく平均待ち時間 $W_{q \text{ 実際}}$ と (4.2) の結果に基づく平均待ち時間 $W_{q \text{ 最適}}$ を計算すると、それぞれ

$$\begin{cases} W_{q \text{ 実際}} = 13.62 \text{ 秒} \\ W_{q \text{ 最適}} = 8.47 \text{ 秒} \end{cases} \quad (4.3)$$

となる。ここで、実際のデータに基づく平均待ち時間 $W_{q \text{ 実際}}$ は、4.1 節の ①による調査データと式 (4.1) の値を式 (2.11) に代入して算出している。

以上の計算結果では、理論に基づく最適サイクル長と最適切り替え時間が、実際のものかなりの差があり、また、 $W_{q \text{ 最適}}$ も $W_{q \text{ 実際}}$ より約 38% と大幅に短縮されることがわかった。

日頃、私たちが比較的に空いている小道を走るとき、車があまりないにもかかわらず、信号交差点で待たされ、いらいらすることをよく経験する。このような交差点においては、サイクル長が比較的に短めの信号を設定したほうが妥当であると思われる。本実例調査で対象とした交差点はおそらくこのように改善が必要なものであり、本モデル解析に基づく結果がその現実を理論的に裏付けている。

5. おわりに

本論文では、一般道路における一つの交差点に注目し、どのように交通信号のサイクル長と切り替え時間を決定したら、この交差点での車の渋滞が最大に緩和できるかを、すなわち、交差点における車の平均待ち時間を最小にすることができるかを理論的に考察した。

具体的にはまず、一般道路での一つの交差点を研究対象とし、この交差点での車両が一定の割合で連続的に到着した場合、一サイクル内ですべての車両が通過できることを前提に、車の平均待ち時間最小化に関するモデルの定式化を行った。次に、定式化されたモデルへの分析を通じて、車の平均待ち時間を最小にする際の、信号の最適サイクル長と切り替え時間を解析的に求めた。また、そのときの信号の全赤時間、黄時間並びに黄時間における車の通過率が保つべき関係を明示した。最後に、福岡市のある交差点を例に単純な実証分析を行い、実際の交差点での、データを用いた最適サイクル長と最適信号切り替え時間を求めてみた。また、この実証分析を通じてわれわれのモデルの有用性も示した。

本研究の意義の一つは、信号システム最適化についての、一種の分析手法を提案したところにある。そのためにまず、対象となる非線形計画モデルの最適解の存在性を証明し、それから具体的な分析を通じてその解を理論的に与えている。また、本研究を高橋, 森村 [10] と比較した場合、1) 2 方向から 4 方向への拡張を通じて、東西方向と南北方向においてはそれぞれ到着率の大きいほうではなく、利用率 (ρ_i) の大きいほうを選び、おのこの方向における車の到着状況として選択すべきであることを明示した。2) 全赤信号を考慮し、また、

黄信号を車の通過できる(青信号と見做される)部分と車の通過できない(赤信号と見做される)部分に分ける拡張を行った。さらに、このような拡張に基づき、全赤信号 a'_0 、黄信号 c と黄信号における車の通過率 k との関係を示した。なお、これは信号の最適サイクル長と切り替え時間を前提に考察したものである。3) サイクル長が一定となっている場合、それに伴う最適な信号切り替え時間を理論的に求めた。実際の交差点システムにおいて、信号のサイクル長は単独で設定されることなく、主幹線道路上のいくつかの交差点によって、系統的に定めるのが一般的である。主幹線道路での主な交差点に対しては、高橋, 森村 [10] の研究を参考に、最適サイクル長と信号切り替え時間を設定することができるが、この道路上の他の交差点の信号サイクル長は、主な交差点のサイクル長に連動的にして決まることが多い。その意味で、上で提示した 3) の結論は有用なものであると考えられる。

本論文では、いくつかの仮定のもとで議論を進めている。一つは対象とする交差点での車両が一定の割合で連続的に到着することを前提としている。都市の OR 分野では、比較的単純なモデル設定によって問題の本質を探ろうとする、明快な数理モデル解析を目指すことが多く、本研究も Newell [5] や高橋, 森村 [10] と同じく、このような視点にたつて、車の具体的な到着分布は考慮せず、その平均値だけに基づいて行ったモデル解析であり、その意味で得られた解析結果も実際問題への一種の近似であるが、決して対象とする問題の本質を失なうものではないことをここに特筆しておきたい。もう一つは一サイクル内に到着したすべての車両がそのサイクル内に対象交差点を通過できるという前提である。ある交差点に到着する四方向の車の到着率が比較的小さい場合、この前提が簡単に満たされることを式 (2.1) の制約条件によって簡単に確認できる。4 節の事例調査で選定された交差点もこのようなもので、実測データのほとんどがこの前提をクリアしている。これはこの仮定の妥当性を裏付けているが、交差点によってはラッシュ時に、一サイクル内に全ての車両が通過できない場合も少なくないのが事実であり、それについての検討は今後の研究課題としておきたい。一方、本論文ではまた、車のサービス率も一定であると想定して議論を行っているが、専用の右折レーンが敷かれていない交差点では実際、青信号が点灯した後、右折したい車両が対向車を待つことになったりするので、サービス率が不安定になる。その意味で適切なサービス率の同定や右折状況なども考慮した交通信号制御モデルの設計、解析は大切で、今後の研究課題として残されている。

謝辞

本稿の作成にあたり、匿名の読者には大変重なるコメントを多数いただき、論文の改善に大いに役立ちました。心より深く感謝申し上げます。本研究は科学研究費助成事業基盤研究 (A) 24241054 の一つとして行われたもので、ご指導をいただいた南山大学の鈴木敦夫先生をはじめ分担者の先生方にも謝意を表します。

参考文献

- [1] J.N. Darroch, G.F. Newell, and R.W.J. Morris: Queues for a Vehicle-Actuated Traffic Light. *Operations Research*, **12-6** (1964), 882–895.
- [2] M. Li, Y. Ryu, and Y. Song: Some Results on Opimal Signal Switching Time at an Intersection Based on Arrival of Vehicles. *Proceedings of Asian Conference of Management Science and Applications*, (2013), 122–126.
- [3] D.R. McNeil: A Solution to the Fixed-Cycle Traffic Light Problem for Compound

- Poisson Arrivals. *Journal of Applied Probability*, **5-3** (1968), 624–635.
- [4] A.J. Miller: Settings for Fixed-Cycle Traffic Signals. *Operations Research*, **14-4** (1963), 373–386.
- [5] G.F. Newell: Queues for a Fixed-Cycle Traffic Light, *The Annals of Mathematical Statistics*, **31-3** (1960), 589–597.
- [6] G.F. Newell: Approximation Methods for Queues with Application to the Fixed-Cycle Traffic Light. *SIAM Review OR*, **7-2** (1965), 223–240.
- [7] 福島雅夫: 非線形最適化の基礎 (朝倉書店, 2001).
- [8] 大蔵 泉: 交通工学 (コロナ社, 1993).
- [9] 国土交通省道路局: 道路IR, 平成18年度達成度報告書・平成19年度業績計画書 (2007).
- [10] 高橋幸雄, 森村英典: 混雑と待ち (朝倉書店, 2001), 191–194.
- [11] 張 志偉, 李 明哲: 交差点の数理-ORによる都市交通解析, *経営工学研究*, **14** (2012), 43–47.

李 明哲

福岡大学

経済学部

〒814-0180 福岡県福岡市城南区七隈 8-19-1

E-mail: lmz@fukuoka-u.ac.jp

ABSTRACT

THE STUDY ON THE OPTIMAL SIGNAL CYCLE AND THE SWITCHING TIME AT AN INTERSECTION

Mingzhe Li Yuchao Zhang
Fukuoka University

In a city, traffic congestion usually occurs because of population and heavy traffic, and it causes a variety of problems including the economic loss, environmental problems *etc.* One of the biggest reasons of traffic congestion on a general road is because of traffic signals at intersections.

In this paper, we focus on the signal control at an intersection, and theoretically find out the optimal signal cycle and the optimal switching time at an objective intersection so as to reduce traffic congestion. Here, we assume that the vehicles arrive in the objective intersection continuously with a constant ratio, and each car arrives in the objective intersection within a signal cycle can pass through it during green light time of the cycle. In the case, we also explore some properties, such as the relationship between the simultaneous red light and the yellow light. Finally, we verify our model through a case study by considering a real intersection in fukuoka.