日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 58, 2015, pp. 101–121

AVaR に基づいた週間生産計画法の提案－ゲーム理論的アプローチ－

上野 信行　　田口 雄基　　奥原 浩之
広島経済大学　　大阪大学大学院

(受理 2015 年 1 月 5 日; 再受理 2015 年 7 月 22 日)

和文概要　環境変化，不確実性等の日常的リスクに対応したレジリエンス (しなやかな回復力) [3, 5, 14] を加味した生産システムの確立が急務である．従来は，不確実環境下の生産計画として，在庫品切れ確率を所与として安全在庫を求める方法，在庫保管コストと在庫品切れペナルティコストを所与としてコストを最小化する基点在庫を求める方法 [10, 22]，在庫コストと期間全体の品切れ確率（未達率）を所与として多期間の生産計画問題を確率計画法として定式化し，未達率制約下でコストを最小化する方法 [17–20] などが提案されてきた．これらは，リスクの程度を確率的に表現される目標値に合致させるか目標値以内に収める方法である．しかし，需要量の分散の大きさから生じる在庫量の分布のすそ野の広がりによるリスクは考慮されなかったし，場合によっては，多次元同時確率分布計算を扱わなければならなかった．

そこで，本論文は， AVaR (Average value-at-risk) を評価指標とする多期間の生産計画問題について，ゲーム理論を適用して解を求める方法を提案する．解法は，第 1 段階として，AVaR を評価指標として，計画期間トータルに想定される需要量をゲーム理論におけるシャープレイ値 [21] を用いて，各期に配分し，期別の想定される需要量を決定する．次に，第 2 段階として，ゲーム理論の結果を時系列に展開して期別の生産量を決めるものである．このように決める在庫量，生産量の特性を明らかにする．5 期間の生産計画問題に適用し，本提案法の特徴を述べる．

本提案の手法は，週間生産計画問題について，従来の「確率で表現される目標値を制約にする方法」ではなく，信頼水準を所与としてリスク評価尺度に AVaR を用い，計画期間全体の想定される需要量を厳守するという意味で,「需要量のトータルな想定値を重視する方法」である．在庫量あるいは，在庫品切れ量の多次元同時確率分布計算を必要としない．最後に，需要が期ごとに互いに相関を持つ場合への拡張が容易であることを示す．

キーワード: ゲーム理論，在庫，多期間生産計画，需要の不確実性，リスク評価尺度，AVaR(average value-at-risk)，　シャープレイ値，内示生産システム，レジリエンス

1. はじめに

近年，様々な産業において，自然災害，金融危機，テロ等の非日常的リスクや劣化，環境変化，不確実性等の日常的リスクに対応したレジリエンス (しなやかな回復力) [3, 5, 14] を加味した生産システムの確立が急務である．ここでは，生産システムの日常的なリスクとして，注文の不確実性から生じる不充足，すなわち「在庫品切れ」をリスクと捉え，レジリエンスを高めることを考える．とりわけ，内示生産システム [15, 16] では，内示情報が持つ不確実性により，確定注文に在庫を充当していく際に，保有する在庫量によっては「在庫品切れ」が発生し，顧客へ製品の納入が遅滞する事態が起こることへの対処が求められている．すでに，在庫品切れ確率を所与として安全在庫を求める方法，在庫保管コストと在庫品切れペナルティコストを所与としてコストを最小化する基点在庫を求める方法 [10, 22]，在庫コストと期間全体の品切れ確率（未達率）を所与として多期間の生産計画問題を確率計画法として定式化して，未達率制約下でコストを最小化する方法 [17–20] などが提案されてきた．これらは，リスクの程度を確率的に表現される目標値に合致させるか目標値以内に収めることを

基本とする方法である．しかし，需要量の分散の大きさから生じる在庫量の分布のすそ野の広がりによるリスクは考慮されなかったし，場合によっては，多次元同時確率分布計算を扱わなければならなかった．また，需要の期ごとの相関性を扱うことは困難であった．一方，金融分野においては，VaR(Value-at-risk)， AVaR(Average value-at-risk) をもちいた計画問題 [2, 6, 7, 9, 12, 13]，多次元確率分布を基にリスクを複数の資産に配分する方法 [11] やこれらにゲーム理論を適用する方法 [1] 等は提案されている．しかし，生産計画問題への適用はなく，特に，生産計画のように単なる組み合わせではなく，時系列展開が必要な計画問題への適用はない．

そこで，本論文は，AVaR(Average value-at-risk) を評価指標とする多期間の生産計画問題について，ゲーム理論を適用して解を求める方法を提案する．解法としては，第 1 段階として，AVaR を評価指標として，計画期間トータルに想定される需要量をゲーム理論におけるシャープレイ値 [4, 8, 21] を用いて，各期に配分し，期別の想定される需要量を決定する．次に，第 2 段階として，ゲーム理論の結果を時系列に展開して期別の生産量を決めるものである．このように決める在庫量，生産量の特性を明らかにする．5 期間の生産計画問題に適用し，本提案法の特徴を述べる．

本提案の手法は，週間生産計画問題について，従来の「確率で表現される目標値を制約にする方法」ではなく，信頼水準を所与としてリスク評価尺度に AVaR を用い，計画期間全体の想定される需要量を厳守するという意味で,「需要量のトータルな想定値を重視する方法」である．在庫量あるいは，在庫品切れ量の多次元同時確率分布計算を必要としない．最後に，需要が期ごとに互いに相関を持つ場合への拡張が容易であることを示す．

2. $AVaR$ に基づく週間生産計画問題とは

2.1. 問題の概要

計画期間を n 期とする．$i(\leq n)$ 期の不確実な需要量を d_i，需要量の期待値を $\bar{d}_i$，需要量の分散を ω_i^2 とし，互いに独立な正規分布に従うとする．

$$d_i \sim N(\bar{d}_i, \omega_i^2)\ \forall i \tag{2.1}$$

$$Cov(d_i, d_j) = 0\ \forall i, j,\ i \neq j \tag{2.2}$$

需要量の分散共分散行列 A は,

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

と所与である．また，1 から n 期までの累積需要量を D とする．

$$D \equiv d_1 + d_2 + \cdots + d_n \tag{2.4}$$

信頼水準を α とし，$VaR_D(1-\alpha)$ を $Pr(D \geq x) \leq$ α となる最小の x であるとする．全期間の累積需要量 D に対する $AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ は,

$$AVaR_{D|D}(1-\alpha) = E[D|D > VaR_D(1-\alpha)] \tag{2.5}$$

である．

週間生産計画問題とは,「初期在庫量 S_0，信頼水準 α を所与として, (2.5) 式であらわされる計画期間の累積需要量 D に対する $AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ を満足するように，週間の期別の生産量 $(x_i, i=1,\cdots,n)$ を求める」ことである．

期別の需要量が在庫量を上回ったときに，その分を次期 (以降) に繰り越さない．また，週間生産計画は，計画期間の期首 (0 期) までに決定しているとする．

2.2. 解法の基本的な考え

累積需要量 D に対する $AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ を満足して，かつ期別の生産計画を求めるには, $AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ を期別に適正に配分することが必要である．このために協力ゲーム理論の一つであるシャープレイ値 [8] により，これを各期に適正に配分し，期別の想定される需要量を求め，その結果から期別の生産量 $(x_i, i=1,\cdots,n)$ を求める方法（シャープレイ値配分と呼ぶ）を考案する．

すなわち， まず， $AVaR$ を評価指標として $AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ を求め，これを満足するように，ゲーム理論におけるシャープレイ値 π_i を求める．π_i の比率で，$AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ を各期に配分し，期別の想定される需要量を決定する．次に，ゲーム理論の結果を提案する方法を用いて時系列に展開して期別の生産量を決めるものである．

2.3. 協力ゲームとシャープレイ値

協力ゲームは，n 人のプレーヤーの集合 $N=1,2,\cdots,n$ と特性関数 ν の組 (N,ν) によって表現される．

特性関数 ν は，N の部分集合 S に対して， S に含まれるメンバーが獲得できる利得の値を与える関数である．特性関数 ν がすべての相交わらない 2 つの提携 $S,T \subseteq N, S\cap T=\{\quad\}$ に対して，$\nu(S)+\nu(T) \le \nu(S\cup T)$ となるとき，ν は優加法性を満たすという．特性関数 ν が優加法性を満たす場合は，独自に行動するよりも，提携して共同で行動した方が獲得できる利得は小さくなることはないことが知られている [8]．したがって，提携のサイズは大きくなっていき，最終的に全員提携が形成され，全員提携が形成されたときに獲得できる値 $\nu(N)$ をプレーヤー間でどのように分け合うかを決めることが解をもとめることになる．

ゲーム (N,ν) において，任意の提携 S と S に含まれない任意のプレーヤー i を考えるときに， $\nu(S\cup i)-\nu(S)$ を提携 S に対する i の貢献度として定義されている．

シャープレイ値は，協力ゲーム (N,ν) において，提携に対するプレーヤーの貢献度に基づき，利得が配分されると考える．プレーヤー i の配分量 π_i はシャープレイ値と呼ばれ，次のように計算される．

$$\pi_i = \sum_{S\subset N-\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!} \left(\nu(S\cup\{i\})-\nu(S)\right) \tag{2.6}$$

ここで $|S|$ は，S に含まれるプレーヤーの数である．

（2.6）式の意味は，シャープレイ値とは，提携 S に，S に含まれない $\{i\}$ が加わった時の利得の増加分 $\nu(S\cup\{i\})-\nu(S)$（すなわち貢献度）の期待値であることを示している．シャープレイ値は，次の性質を有している．

1.全体合理性
$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = \nu(N) \tag{2.7}$$

2.個人合理性
$$\pi_i \geq \nu(\{i\}), \forall i \tag{2.8}$$

性質 1 は，全員の利得を合計したものは，$\nu(N)$ に等しいことを表している．したがって，シャープレイ値 π_i は，全員が提携した時に得られる利得 $\nu(N)$ を各プレーヤーに配分した配分値である．

性質 2 は，各プレーヤーが得る利得は，そのプレーヤーが単独で行動した時に得る利得を下回らないことを表しており，各プレーヤーは連携した方が得であるから提携に加わる動機を持つことを表している．

2.4. シャープレイ値と生産計画の対応付け

2.4.1. 提携と $AVaR$

プレーヤー i を生産計画における「i 期」にあてはめ，提携 S を「期の合成」と考える．例えば，提携 $S = \{2, 3\}$ とは，2，3 期が合成されることを表し，その貢献度は，2 期の不確実な需要量 d_2 に対する特性関数であらわされる値と 3 期の需要量 d_3 が加わり，2,3 期を合わせた需要量 $d_2 + d_3$ に対する特性関数であらわされる値との差異（増加分）となる．

生産計画問題は，$AVaR$ を評価指標とすることから，特性関数は $-AVaR$ とする．$-$ をつけることにより，$-AVaR$ は優加法性を満たす．提携 S の累積需要量を $D(S) = \sum_{i \in S} d_i$ とすると，

1. 全期間（全提携 N）の累積需要量 D の $AVaR$
   $D = D(N) = \sum_{i \in N} d_i$ に対する $AVaR$ は
$$AVaR_{D|D}(1-\alpha) = E[D|D > VaR_D(1-\alpha)] \tag{2.9}$$

2. i 期（提携 $\{i\}$）の需要量 d_i の $AVaR$
   $D(\{i\}) = d_i$ に対する $AVaR$ は,
$$AVaR_{d_i|D}(1-\alpha) = E[d_i|D > VaR_D(1-\alpha)] \tag{2.10}$$

3. 合成期間（提携 S）の累積需要量の $AVaR$
   $D(S) = \sum_{i \in S} d_i$ に対する $AVaR$ は,
$$AVaR_{D(S)|D}(1-\alpha) = E[D(S)|D > VaR_D(1-\alpha)] \tag{2.11}$$

となる．

第 1 段階によって決められるシャープレイ値 π_i の意味を述べる．特性関数として，技巧的に $-AVaR$ を使うことから，すべての π_i は，負となるので，意味を解釈するときには，$-\pi_i$ を考える．$AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ は，全提携 N の利得であり，生産計画問題では，$\sum_{i=1}^{n} d_i$ に対する信頼水準 α で計画期間トータルの想定される需要量 (トータル想定需要量と呼ぶ) であると解釈することができ，かつ全体合理性より $AVaR_{D|D}(1-\alpha) = -\nu(N) = \sum_{i=1}^{n}(-\pi_i)$ であるので，すべての期の $-\pi_i$ の合計は，トータル想定需要量と合致する．

このことより，$-\pi_i$ は，トータル想定需要量を各期に割り振られる想定需要量（期別想定需要量と呼ぶ）である．この値以上の需要量が発生すると，信頼水準 α で，$AVaR$ を上

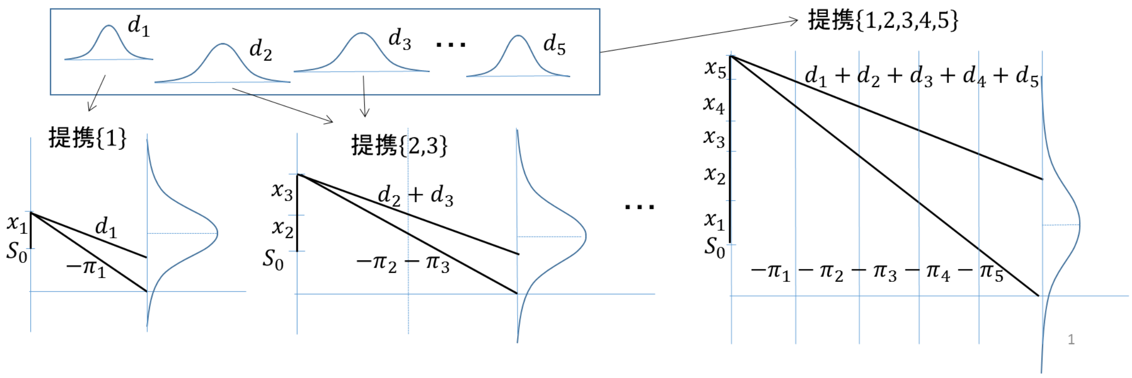

図 1: 生産計画における提携のイメージ (5 期間の生産計画の場合)

回る需要量が想定される．逆に，期別の期首に $-\pi_i$ に相当する在庫量を保有しておけば，信頼水準 α で想定されるリスクにほぼ対応できていることになる．厳密には，個人合理性より，$-\pi_i \leq -\nu(\{i\}) = AVaR_{d_i|D}(1-\alpha)$ であるから，$-\pi_i$ は期別の不確実な需要量の分布パラメータ（需要量の期待値，分散共分散）から決まる $AVaR_{d_i|D}(1-\alpha)$ より下回った値となる．

以上の内容を例にて示す．提携 $S = \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4,5\}$ の場合における在庫量の挙動のイメージを図 1 に示す．例えば，$S = \{1,2,3,4,5\}$ は，全提携であり，この提携の特性関数の値は，α と $D = \sum_{i=1}^{5} d_i$ の分布のパラメータにより決まる． $-\sum_{i=1}^{5} \pi_i$ で表わされる想定需要量に対する在庫量を期首に保有していれば，5 期間の不確実な需要量に対して信頼水準 α で想定される需要量に厳密に対応が可能であることを表している．提携 $S = \{1\}$ の場合では，プレーヤー 1 の特性関数の値は，需要量 d_1 の分布のパラメータ $\overline{d}_1, \omega_1^2$ により決まり，$-\pi_1$ は，1 期目の想定需要量を意味している．1 期目の想定需要量 $-\pi_1$ に相当する在庫を期首に保有していれば，信頼水準 α で想定されるリスクを考慮した想定需要量にほぼ対応ができることになる．提携 $S = \{2,3\}$ も同様である．

2.4.2. 特性関数

特性関数 $\nu(S)$ を求める．i 期の在庫量に影響を及ぼす需要量 D_i とその特性を求めておく．

$$D_i \equiv d_1 + d_2 + \cdots + d_i = \sum_{t=1}^{i} d_t \tag{2.12}$$

である．D_i の特性は，$i < j$ として，

$$E[D_i] = \sum_{t=1}^{i} \overline{d}_t \tag{2.13}$$

$$Var[D_i] = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_i^2 = \sum_{t=1}^{i} \omega_t^2 \equiv \sigma_{ii} \tag{2.14}$$

$$Cov[D_i, D_j] = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_i^2 = \sum_{t=1}^{i} \omega_t^2 \equiv \sigma_{ij} \tag{2.15}$$

となる．すなわち，D_i の分散共分散行列 Σ は,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \omega_1^2 & & \cdots & \omega_1^2 \\ \omega_1^2 & \omega_1^2+\omega_2^2 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \omega_1^2+\omega_2^2+\cdots+\omega_{n-1}^2 \\ \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^2+\omega_2^2+\cdots+\omega_{n-1}^2 & & \omega_1^2+\omega_2^2+\cdots+\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \sigma_{n1} & \cdots & & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

となる．これらを用いて，提携 S の特性関数は,

$$\nu(S) = -AVaR_{D(S)|D}(1-\alpha) = -\left(\sum_{i\in S}\overline{d}_i + K\sqrt{\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\sigma_{ij}}\right) \tag{2.17}$$

$$K = \frac{\varphi(z_{1-\alpha})}{1-\Phi(z_{1-\alpha})} \tag{2.18}$$

$$z_{1-\alpha} = \frac{VaR_{D(S)}(1-\alpha) - \sum_{i\in S}\overline{d}_i}{\sqrt{\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\sigma_{ij}}} \tag{2.19}$$

である [1, 11].

ここで，φ ，Φ は，それぞれ標準正規分布における確率密度関数と累積確率分布関数である．(2.17) 式の特性関数 $\nu(S)$ は，優加法性を満たしている．なお，需要量 d_i に相関がある場合は，$Cov(d_i, d_j) \neq 0, i \neq j$ であるから，これに対応する D_i の分散共分散行列を求めて，σ_{ij} とすればよい.

2.5. 従来法と提案手法

不確実環境における生産・在庫計画手法については，従来から種々の手法が提案されてきている.

安全在庫を求める方法 [10, 22] は，需要量のばらつきを吸収するバッファとして，在庫品切れ確率を所与とする．この確率でぴったりあらわされる在庫不足の機会となるような在庫レベルの持ち上げ（増加）量を示している．従来から多用されているが，需要量の期待値が一定となる期間に適用せざるを得ないので，多期間計画への適用は困難である.

基点在庫を求める方法 [10, 22] では，在庫保管コストと在庫品切れペナルティコストを所与として多期間トータルのコストを最小化するように各期間の在庫量を求めるものである．多期間の生産・在庫計画に適用可能であるが，実務上，在庫品切れペナルティコストの見積もりが困難である.

未達率制約下でコストを最小化する方法 [17] は，在庫コストと期間全体の品切れ確率（未達率）を所与として，未達率制約下でコストを最小化する確率計画法により求める方法である．既に述べた手法の課題を解消しているが，期間全体の品切れ確率（未達率）を求めるには，多次元同時確率分布計算を扱わなければならない．計算量の軽減化を図る近似解法 [17, 18] が提案されている.

これらに比べて，提案手法は，信頼水準 α を所与として，多期間トータルの想定需要量が $AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ を満足する制約のもとで期別に期首の在庫量目標と期別生産量を決定することができる．不確実な需要量に対して，$AVaR$ を評価指標として組み込みこんでいるので，在庫品切れ確率を指標とした場合には現れない在庫量の分布のすそ野の大きさ（分散）から生じるリスクを考慮できる．ただし，このリスクに対応するためには，結果として在庫量が大きくなるが，リスクに対する耐性が増し，危険事態からの挽回が容易になる．提案手法の計算負荷については，提携 S のすべてについて特性関数値 $\nu(S)$ が必要であるが，(2.17)，(2.18)，(2.19) 式より，1 次元の確率分布計算をあつかえばよいことが分かる．従来手法のように，期間全体の品切れ確率（未達率）を厳密に求めるために，在庫量や在庫品切れ量の多次元同時確率分布の同定や確率計算を必要としないなどの利点を持つ．

従来解法が困難であった需要が互いに相関を持つ場合への拡張が容易であることについては，6 章にて詳述する．

3. 生産量の求め方

生産量を求めるに際しては，提携を扱うゲーム理論の結果を時系列展開する方法を考案する．プレーヤー i は生産計画における「i 期」に対応しており，また π_i は，i 期の需要量分布のパラメータとその特性関数値の情報を使って求めた値であるから，プレーヤー 1，2，3，$\cdots$ を生産計画の期 1，2，3，$\cdots$ にそれぞれ対応させ，この順に連結する．

3.1. 期別生産量の決定

$-\pi_i$ は，リスクを考慮に入れた期別想定需要量である．期別に，期首の在庫量目標を $-\pi_i$ としておけば，トータル想定需要量を満たし，かつ $AVaR_{d_i|D}(1-\alpha)$ より下回る値として求めることができ，この値で i 期のリスクに対応してゆくことになる．初期在庫量 S_0，i 期の在庫量 S_i，生産量 x_i とすると，計画段階における i 期の期首（すなわち，$i-1$ 期末）の在庫量のもっともらしい値は，期待値 $E[S_{i-1}]$ とみなせることから，

$$E[S_{i-1}] + x_i = -\pi_i \tag{3.1}$$

である．したがって，各期の生産量 x_i は，

$$x_1 = -\pi_1 - S_0 \tag{3.2}$$

$$x_i = -\pi_i - E[S_{i-1}] \; i \geq 2 \tag{3.3}$$

として求めることができる．

尚，$x_i < 0$ の場合は，$x_i = 0$ とおく．ここで，一般性を失うことなく，$x_1 \geq 0$ としておく．初期在庫量 S_0 が大きく，$x_1 < 0$ の場合は，生産量 $x_1 = 0$ として，1 期目をはずし 2 期目以降から再計算すると考える．

3.2. 期別の在庫量

3.1 節にて，生産量が求まると，次に期別の在庫量とその期待値を求めることができる．

(i)1 期（$i = 1$）

$$S_1 = S_0 + x_1 - d_1 = S_0 - \pi_1 - S_0 - d_1 = -\pi_1 - d_1 \tag{3.4}$$

$$E[S_1] = -\pi_1 - \bar{d}_1 \tag{3.5}$$

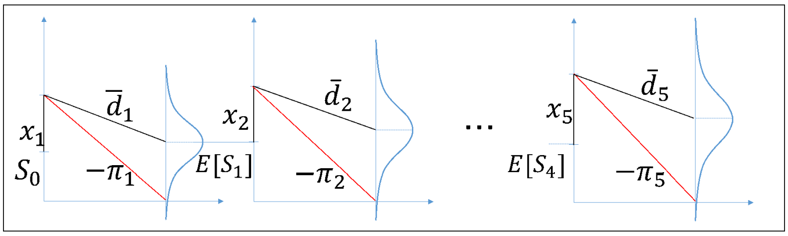

図 2: 期別の生産量の決定法（５期間の例）

(ii) i 期 $(i \geq 2)$

$$
\begin{aligned}
S_i &= S_0 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_i) - (d_1 + d_2 + \cdots + d_i) \\
&= S_0 + (-\pi_1 - S_0) + (-\pi_2 - E[S_1]) + \cdots + (-\pi_i - E[S_{i-1}]) - (d_1 + d_2 + \cdots + d_i) \\
&= -\pi_i + \sum_{t=1}^{i-1} \bar{d}_t - \sum_{t=1}^{i} d_t \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

$$E[S_i] = -\pi_i - \bar{d}_i \qquad (3.7)$$

以上の内容について,「期」の連結のイメージと各期の生産量，在庫の期待値の関係を図 2 に示す．S_i の分布のイメージを横向きに描いている．

3.3. 解法の手順

計画期間 n，初期在庫量 S_0，需要量の確率分布のパラメータ $\bar{d}_i(i = 1, \cdots, n)$，分散共分散行列 $\sum$，信頼水準 α は，所与とする．

（手順）

1. 特性関数 (2.17) 式を用いて，(2.6) 式よりシャープレイ値 π_i を求める．
2. 期別の生産量 x_i を (3.2)，(3.3)，(3.7) 式より，次のように決定する．
   1. $i = 1 : x_1 = -\pi_1 - S_0$
   2. $i \geq 2 : x_i = -\pi_i + \pi_{i-1} + \bar{d}_{i-1}$

   ここで，$x_i \geq 0$ なら，そのまま．$x_i < 0$ なら，$x_i = 0$ とする．

4. 生産量・在庫量の特性

在庫量の期待値，生産量について諸性質を導出する．なお，σ_{ii} は σ_i と簡略化する．

まず，準備として 2 つの集合 $I, J \subseteq N$ と需要量の期待値からの増減値 $\delta^+(i), \delta^-(j)$ を定義する．

$I : E[S_i] < 0$ となる期 i の集合

$J : E[S_i] \geq 0$ となる期 i の集合，ここで $I \cup J = N, I \cap J = \{\quad\}$

$\delta^+(i), \delta^-(j)$：下記の (4.1)，(4.2) 式を満たす i 期 (あるいは，j 期) における需要量の期待値からの増減値

$$i \in I \text{ の場合} \quad E[S_i] = -\pi_i - \bar{d}_i < 0 \text{ より}, \quad -\pi_i = \bar{d}_i - \delta^-(i), \delta^-(i) > 0 \qquad (4.1)$$

$$j \in J \text{ の場合} \quad E[S_j] = -\pi_j - \bar{d}_j \geq 0 \text{ より}, \quad -\pi_j = \bar{d}_j + \delta^+(j), \delta^+(j) \geq 0 \qquad (4.2)$$

まず，全体合理性より，(4.1)，(4.2) 式を用いて全ての期 i について和をとると，

$$\sum_{i \in I}(-\pi_i) + \sum_{j \in J}(-\pi_j) = \sum_{i \in I}\bar{d}_i + \sum_{j \in J}\bar{d}_j + \sum_{j \in J}\delta^+(j) - \sum_{i \in I}\delta^-(i)$$

これより，

$$\sum_{i\in N}(-\pi_i) = \sum_{i\in N}\bar{d}_i + \sum_{j\in J}\delta^+(j) - \sum_{i\in I}\delta^-(i) \tag{4.3}$$

また，ここで (2.17) 式より，

$$-\sum_{i\in N}\pi_i = -\nu(N) = \sum_{i\in N}\bar{d}_i + K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} \tag{4.4}$$

よって，(4.3)，(4.4) 式より，

$$\sum_{i\in N}\bar{d}_i + K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} = \sum_{i\in N}\bar{d}_i + \sum_{j\in J}\delta^+(j) - \sum_{i\in I}\delta^-(i)$$

$$K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} = \sum_{j\in J}\delta^+(j) - \sum_{i\in I}\delta^-(i) \tag{4.5}$$

一方，個人合理性より，

$$\pi_i \geq \nu(\{i\}) = -(\bar{d}_i + K\sqrt{\sigma_i}) \tag{4.6}$$

したがって，

(i)$i \in I$ の場合

(4.1)，(4.6) 式より，

$$\pi_i = \delta^-(i) - \bar{d}_i \geq -(\bar{d}_i + K\sqrt{\sigma_i}) \tag{4.7}$$

$$\delta^-(i) \geq -K\sqrt{\sigma_i} \tag{4.8}$$

$$\sum_{i\in I}\delta^-(i) \geq -K\sum_{i\in I}\sqrt{\sigma_i} \tag{4.9}$$

(ii) $j \in J$ の場合

(4.2)，(4.6) 式より，

$$\pi_j = -\delta^+(j) - \bar{d}_j \geq -(\bar{d}_j + K\sqrt{\sigma_j}) \tag{4.10}$$

$$\delta^+(j) \leq K\sqrt{\sigma_j} \tag{4.11}$$

$$\sum_{j\in J}\delta^+(j) \leq K\sum_{j\in J}\sqrt{\sigma_j} \tag{4.12}$$

(4.9)，(4.12) 式より，

$$\sum_{j\in J}\delta^+(j) - \sum_{i\in I}\delta^-(i) \leq K\left(\sum_{j\in J}\sqrt{\sigma_j} + \sum_{i\in I}\sqrt{\sigma_i}\right)$$

これより，

$$\sum_{j\in J}\delta^+(j) - \sum_{i\in I}\delta^-(i) \leq K\left(\sum_{k\in N}\sqrt{\sigma_k}\right) \tag{4.13}$$

(4.5)，(4.13) 式より，

$$K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} = \sum_{j\in J}\delta^+(j) - \sum_{i\in I}\delta^-(i) \leq K\left(\sum_{k\in N}\sqrt{\sigma_k}\right) \tag{4.14}$$

以上を用いて，以下に示すような【補題】と【定理】を導くことができる．

補題 4.1. $I \neq \{\quad\}, J \neq \{\quad\}, I \cup J = N, I \cap J = \{\quad\}$ の場合には,

$$K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} = \sum_{j\in J}\delta^+(j) - \sum_{i\in I}\delta^-(i) \leq K\left(\sum_{k\in N}\sqrt{\sigma_k}\right) \tag{4.15}$$

が成立する.

（証明）

（4.14）式より明らかである.

（証明終）

補題 4.2. $I = \{\quad\}$ の場合，すなわち，$E[S_j] = -\pi_j - \overline{d}_j \geq 0 \ \forall j$ の場合には,

$$K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} = \sum_{j\in J}\delta^+(j) \leq K\left(\sum_{k\in N}\sqrt{\sigma_k}\right) \tag{4.16}$$

が成立する.

（証明）

(4.14) 式において，$\sum_{i\in I}\delta^-(j) = 0$ と置く.

（証明終）

補題 4.2 は，次のことを表している.

$\delta^+(j)$ は，$K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}}$ を資源として，各期に振り分けられる i 期の期別想定需要量 $-\pi_i$ を「i 期の需要量の期待値 $\overline{d}_i$ からの増加分」として表現したものである.

補題 4.3. $E[S_i] = -\pi_i - \overline{d}_i < 0 \ \forall i$ となることはない

（証明）

$-\pi_i - \overline{d}_i < 0 \ \forall i$ とすると，矛盾であることを示す.

(4.14) 式において，$J = \{\}$ の場合であるから，$\sum_{j\in J}\delta^+(j) = 0$ を代入すると,

$$K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} = -\sum_{i\in I}\delta^-(i) \leq K\left(\sum_{k\in N}\sqrt{\sigma_k}\right) \tag{4.17}$$

等号の左辺> 0 であるから，(4.17) 式は矛盾である.

（証明終）

定理 4.1. すべての期 j について，期別の在庫量の期待値 $E[S_j] = -\pi_j - \overline{d}_j \geq 0$ である，すなわち，$\delta^+(j) \geq 0 \ \forall j$ である.

（証明）

背理法による．任意の期 i について，$-\pi_i - \overline{d}_i < 0$ が成立すると矛盾であることを示す. $\overline{d}_i, \sigma_{ij}, \alpha$ が与えられた場合のシャープレイ値配分結果が 2 つ得られ，π_i^A, π_i^B とする.

（ケース A）

$I = \{\}$ の場合，すなわち，$-\pi_j^A - \overline{d}_j \geq 0 \ \forall j$ より,

$$-\pi_j^A = \overline{d}_j + \delta^{+A}(j), \delta^{+A}(j) \geq 0 \ \forall j \tag{4.18}$$

（ケース B）

$I = \{i\}$ の場合，すなわち，$-\pi_i^B - \overline{d}_i < 0$ より，

$$-\pi_i^B = \overline{d}_i - \delta^{-B}(i), \delta^{-B}(i) > 0 \tag{4.19}$$

$$-\pi_j^B = \overline{d}_j + \delta^{+B}(j), \delta^{+B}(j) \geq 0 \ \forall j \neq i \tag{4.20}$$

(i) ケース A の場合

(4.16) 式より，

$$K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} = \sum_{j\in N}\delta^{+A}(j) \leq K\left(\sum_{k\in N}\sqrt{\sigma_k}\right) \tag{4.21}$$

(ii) ケース B の場合

(4.15) 式より，

$$K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}} = \sum_{j\in J}\delta^{+B}(j) - \sum_{i\in I}\delta^{-B}(i) \leq K\left(\sum_{k\in N}\sqrt{\sigma_k}\right) \tag{4.22}$$

$N' = N - \{i\}$ として，ケース A における提携 N とケース B における提携 N' のシャープレイ値を比較する．

ケース A の場合における提携 N のシャープレイ値の合計は，

$$\sum_{j\in N}\pi_j^A = -\left(\sum_{j\in N}\overline{d}_j + \sum_{j\in N}\delta^{+A}(j)\right) \tag{4.23}$$

ケース B の場合における提携 N' のシャープレイ値の合計は，

$$\sum_{j\in N'}\pi_j^B = -\left(\sum_{j\in N'}\overline{d}_j + \sum_{j\in N'}\delta^{+B}(j)\right) \tag{4.24}$$

(4.23) から (4.24) を引くと，

$$\sum_{j\in N}\pi_j^A - \sum_{j\in N'}\pi_j^B = -\overline{d}_i - \left(\sum_{j\in N}\delta^{+A}(j) - \sum_{j\in N'}\delta^{+B}(j)\right) \tag{4.25}$$

ここで，(4.15) 式より，ケース A，ケース B は，

$$\sum_{j\in N}\delta^{+A}(j) - 0 = K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}}$$

$$\sum_{j\in N'}\delta^{+B}(j) - \delta^{-B}(i) = K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}}$$

となる．これらを (4.25) 式に代入して，

$$\sum_{j\in N}\pi_j^A - \sum_{j\in N'}\pi_j^B = -\overline{d}_i + \delta^{-B}(i) = \pi_i^B < 0 \tag{4.26}$$

よって，

$$\sum_{j\in N}\pi_j^A < \sum_{j\in N'}\pi_j^B$$

一つの問題から得られる2つの配分結果について，全提携Nのシャープレイ値が提携N'のそれより小さくなることになり，矛盾である．

（証明終）

つぎに，生産量x_iの変形式を求めておく．生産量x_iは，(3.2)，(3.3)式より，$x_i = -\pi_i - E[S_{i-1}]$である．この式に，$E[S_{i-1}] = -\pi_{i-1} - \overline{d}_{i-1}$を代入して，

$$x_i = -\pi_i - E[S_{i-1}] = -\pi_i + \pi_{i-1} + \overline{d}_{i-1} \tag{4.27}$$

を得る．

補題 4.4. 期別の生産量は，次の式を満たす．

$$\overline{d}_i - K\sqrt{\sigma_{i-1}} \leq x_i \leq \overline{d}_i + K\sqrt{\sigma_i} \ \forall i \geq 2 \tag{4.28}$$

（証明）

個人合理性より，

$$\pi_i \geq \nu(\{i\}) = -(\overline{d}_i + K\sqrt{\sigma_i}) \text{ より}, -\pi_i \leq \overline{d}_i + K\sqrt{\sigma_i}$$

定理4.1より，$-\pi_{i-1} - \overline{d}_{i-1} \geq 0$であり，$\pi_{i-1} \leq -\overline{d}_{i-1}$

これらを，(4.27)式に代入して，

$$x_i \leq \overline{d}_i + K\sqrt{\sigma_i} - \overline{d}_{i-1} + \overline{d}_{i-1} = \overline{d}_i + K\sqrt{\sigma_i} \tag{4.29}$$

また，

$$\pi_{i-1} \geq \nu(\{i-1\}) = -(\overline{d}_{i-1} + K\sqrt{\sigma_{i-1}}) \tag{4.30}$$

$$E[S_i] = -\pi_i - \overline{d}_i \geq 0 \tag{4.31}$$

(4.27)式に，(4.30) (4.31)式を代入して，

$$\begin{aligned} x_i &= -\pi_i + \pi_{i-1} + \overline{d}_{i-1} \\ &\geq \overline{d}_i - (\overline{d}_{i-1} + K\sqrt{\sigma_{i-1}}) + \overline{d}_{i-1} \\ &= \overline{d}_i - K\sqrt{\sigma_{i-1}} \end{aligned} \tag{4.32}$$

よって，(4.29)(4.32)式より，

$$\overline{d}_i - K\sqrt{\sigma_{i-1}} \leq x_i \leq \overline{d}_i + K\sqrt{\sigma_i} \tag{4.33}$$

（証明終）

定理 4.2.

$$\overline{d}_i \geq K\sqrt{\sigma_{i-1}} \ \forall i \geq 2 \tag{4.34}$$

ならば，生産量$x_i \geq 0 \ \forall i \geq 2$である．

（証明）

補題 4.4 より，

$$x_i \geq \overline{d}_i - K\sqrt{\sigma_{i-1}}$$

仮定より，$x_i \geq 0$ となる．

（証明終）

定理 4.2 の補足説明を行う．K は α に依存するので，$K(\alpha)$ とかくと，

$$\frac{\overline{d}_i}{\sqrt{\sigma_{i-1}}} \geq K(\alpha) \tag{4.35}$$

が生産量 $x_i \geq 0$ となる十分条件であることを示している．一般的に，α が大きいときは，$K(\alpha)$ は小さくなり，定理 4.2 は成立しやすいし，$\overline{d}_i$ に比べて σ_{i-1} が小さいときには，定理 4.2 は成立しやすい．

尚，$x_i < 0$ の場合は，$x_i = 0$ とおく．在庫量が高めに設定されることになるので，$AVaR$ が好転する方向であり，リスクに対する耐性が増すことになる．

5. 数値計算

シャープレイ値配分による生産計画結果を示す．次に，需要量の平均値の期別変動による生産量，在庫量の期待値への影響を述べる．従来から用いられている指標に基づき生産計画結果を評価する．

5.1. 前提条件

5 期間の週間生産計画問題を考える．$[\overline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3, \overline{d}_4, \overline{d}_5] = [10, 20, 24, 6, 12], [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5] = [3, 3, 3, 3, 3], \alpha = 0.01, S_0 = 10,$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 9 & 18 & 27 & 27 & 27 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 36 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}$$

5.2. 生産計画の指標

従来の方法との比較のために，下記の指標を用いて，シャープレイ値配分の結果と比較する．

(i) i 期の未達率 ε_i：i 期の在庫量 S_i が 0 未満になる確率であり，一般的に，期別に異なる．

$$\varepsilon_i = 1 - Pr(S_i | S_i \geq 0) \tag{5.1}$$

(ii) 計画期間全体の未達率 SO_n：計画期間において「少なくとも 1 つ以上の期の在庫量が 0 未満になる（在庫切れが生ずる）確率」である．表現を変えると,「すべての期の在庫量が 0 以上ではない確率」をあらわしている．すなわち，

$$SO_n = 1 - Pr\{(S_1, S_2, \cdots, S_n) | \cap_i^n (S_i \geq 0)\} \tag{5.2}$$

表 1: シャープレイ値配分による計画結果

	1期	2期	3期	4期	5期	合計
シャープレイ値 $-\pi_i$	15.78	29.58	36.92	20.83	28.18	131.30
$-\nu(\{i\})$	18.00	31.31	37.85	21.99	29.88	139.02
生産量 x_i	5.78	23.79	27.35	7.90	13.36	78.18
在庫量 $E[S_i]$	5.78	9.58	12.92	14.83	16.18	59.30
期別未達率 ε_i	0.0269	0.0120	0.0064	0.0067	0.0079	
期間全体の未達率 $SO_n(0)$	0.0587					

である．この指標に基づいて計算するには，n 次元同時確率分布計算が必要である．それで，従来から期間の相関性を考慮せずに，互いに独立として，次の $SO_n(0)$ が用いられている [19]．すなわち，期別の未達率 ε_i を用いて，

$$SO_n(0) = 1 - \Pi_i^n(1 - \varepsilon_i) \tag{5.3}$$

である．

5.3. シャープレイ値配分による生産計画結果

結果を表 1 に示す．比率は，下 4 桁，量は下 2 桁に丸めている．

結果と考察を以下に述べる．表 1 より，

1. 個別合理性 $\pi_i \geq \nu(\{i\}), \forall i$ が成り立っている．
2. $AVaR_{D|D}(1-\alpha) = 131.30$ であり全体合理性 $\nu(N) = -AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ と $\sum_{i=1}^n \pi_i$ が等しいことがわかる．
3. 生産計画結果より求まる $SO_5(0)$ は，5.9 %である．一方，$\varepsilon_i = 0.01, \forall i$ としたときの 5 期間における $SO_5(0)$ は，$1-(1-0.01)^5 \simeq 0.049$ であり，ほぼ同じであるが，シャープレイ値配分の結果の方が若干大きくなっている．この理由は，シャープレイ値配分における $-AVaR_{d_i|D}(1-\alpha)$ が優加法性であることより，π_i は $-AVaR_{d_i|D}(1-\alpha)$ より少し大きく（すなわち，期別想定需要量 $-\pi_i$ は $AVaR_{d_i|D}(1-\alpha)$ より少し小さく）見積もられるからである．

以上のことから，従来法がコストを最小化するかリスクの程度を確率的に表現される目標値に合致させるか目標値以内に収める方法であるのに対して，シャープレイ値配分は「信頼水準 α を所与として，計画期間全体のトータル想定需要量は，$AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ を順守して，期別想定需要量 $-\pi_i$ を調整し，これをもとに期別に期首の在庫量目標と期別生産量を決定するものである」ということができる．シャープレイ値を求めるに際しては，すべての提携 S の特性関数値 $\nu(S)$ が必要であるが，(2.17)，(2.18)，(2.19) 式より，1 次元の確率分布計算をあつかえばよい．従来のように，在庫量や在庫品切れ量の多次元同時確率分布の同定や確率計算を必要としない．

5.4. 内示の期別変動の影響

計画期間における需要量の期待値の合計は同じであるという条件のもとで，期別に変化させた時のシャープレイ値配分への影響を解析する．

需要量の期待値（内示量と呼ぶ）の期別変動のパターン (以下，内示変動パターンと呼ぶ) を表 2 に示す．caseB は変動型（ベース），case1 は漸減型，case2 はジグザク型である．合計量は 72 である．caseB は，5.3 節の結果と同じであるが，再掲している．

結果と考察を以下に述べる．

表 2: 内示変動パターン

	1期	2期	3期	4期	5期	合計
caseB	10	20	24	6	12	72
case1	24	20	12	10	6	72
case2	10	6	20	12	24	72

表 3: シャープレイ値配分による計画結果（内示変動パターンの影響）

		1期	2期	3期	4期	5期	合計
シャープレイ値 $-\pi_i$	caseB	15.78	29.58	36.92	20.83	28.18	131.30
	case1	29.78	29.58	24.92	24.83	22.18	131.30
	case2	15.78	15.58	32.92	26.83	40.18	131.30
生産量 x_i	caseB	5.78	23.79	27.35	7.90	13.36	78.18
	case1	19.78	23.79	15.35	11.90	7.36	78.18
	case2	5.78	9.79	23.35	13.90	25.36	78.18
在庫量 $E[S_i]$	caseB	5.78	9.58	12.92	14.83	16.18	59.30
	case1	5.78	9.58	12.92	14.83	16.18	59.30
	case2	5.78	9.58	12.92	14.83	16.18	59.30
期別未達率 ε_i	caseB	0.0269	0.0120	0.0064	0.0067	0.0079	
	case1	0.0269	0.0120	0.0064	0.0067	0.0079	
	case2	0.0269	0.0120	0.0064	0.0067	0.0079	
期間全体の未達率 $SO_n(0)$	caseB	0.0587					
	case1	0.0587					
	case2	0.0587					

1. 内示変動パターンが変わっても，シャープレイ値の合計の値，在庫量の期待値の合計値は同じである．
   シャープレイ値の合計の値が等しいのは，(2.17）式により，$S=N$ とおけば，
$$-\sum_{i\in N}\pi_i = -\nu(N) = \sum_{i\in N}\bar{d}_i + K\sqrt{\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sigma_{ij}}$$
   であり，$\sum_{i=1}^{n}\bar{d}_i$ はケースによらず一定であることから明らかである．在庫量の期待値の合計については，(3.7）式より，
$$\sum_{i\in N}E[S_i] = \sum_{i\in N}(-\pi_i - \bar{d}_i) = -\sum_{i\in N}\pi_i - \sum_{i\in N}\bar{d}_i$$
   であり，右辺はケースによらず一定であることから明らかである．
2. 内示変動パターンが変わっても，在庫量の期待値 $E[S_i] = -\pi_i - \bar{d}_i$ は，ケースによらず，すべての期 i について同一である．シャープレイ値の定義と特性関数より明らかである．なぜなら，(2.17) 式を用いて，
$$\begin{aligned}\nu(S\cup\{i\})-\nu(S) &= -\left(\sum_{k\in S\cup\{i\}}\bar{d}_k + K\sqrt{\sum_{k\in S\cup\{i\}}\sum_{l\in S\cup\{i\}}\sigma_{kl}}\right) + \left(\sum_{k\in S}\bar{d}_k + K\sqrt{\sum_{k\in S}\sum_{l\in S}\sigma_{kl}}\right)\\ &= -\left\{\bar{d}_i + K\left(\sqrt{\sum_{k\in S\cup\{i\}}\sum_{l\in S\cup\{i\}}\sigma_{kl}} - \sqrt{\sum_{k\in S}\sum_{l\in S}\sigma_{kl}}\right)\right\}\end{aligned}$$
   であるから，(2.6) 式に代入して整理すれば，
$$-\pi_i - \bar{d}_i = \sum_{S\subset N-\{i\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}\left\{K\left(\sqrt{\sum_{k\in S\cup\{i\}}\sum_{l\in S\cup\{i\}}\sigma_{kl}} - \sqrt{\sum_{k\in S}\sum_{l\in S}\sigma_{kl}}\right)\right\}$$

K, σ_{kl} は所与であるから，右辺は，$\overline{d}_i$ の変動パターンによらず一定になる．すなわち，$E[S_i] = -\pi_i - \overline{d}_i$ はすべて期 i についてケースによらず同一である．

3. 内示変動パターンが変化しても，生産量 x_i の合計は，ケースによらず同一である．計画期間の期末（5 期目）の在庫量の期待値は，

$$E[S_5] = S_0 + \sum_{t=1}^{5} x_t - \sum_{t=1}^{5} \overline{d}_t$$

である．$E[S_5], S_0, \sum_{t=1}^{5} \overline{d}_t$ はケースによらず同一であるから，$\sum_{t=1}^{5} x_t$ もケースによらず同一になる．

以上のことから，内示変動パターンが異なる場合でも，計画期間の内示量の合計が同じときには，期別の内示量に対応して，シャープレイ値が変化し，期別の生産量を調整し,「すべての期の在庫量の期待値のレベルを同一にしている」ことがわかる．

6. 需要に期別の相関性がある場合

6.1. 分散共分散行列の作成

需要に期別の相関がある場合に，本手法を拡張する．$i(\leq n)$ 期の需要量 d_i は，正規分布に従い，

$$d \equiv [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5], \overline{d} \equiv [\overline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3, \overline{d}_4, \overline{d}_5] = [10, 20, 24, 6, 12] \tag{6.1}$$

$$d \sim N(\overline{d}, A) \tag{6.2}$$

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \omega_{1\ n-1} \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{n-1\ 1} & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

とする．

D_i の特性は,

$$E[D_i] = \sum_{t=1}^{i} \overline{d}_t \tag{6.4}$$

$$Var[D_i] = \sum_{t=1}^{i} \omega_t^2 + 2\sum_{t=1}^{i}\sum_{u>t}^{i} \omega_{tu} \equiv \sigma_{ii} \tag{6.5}$$

$$Cov[D_i, D_j] = \sum_{t=1}^{i} \omega_t^2 + 2\sum_{t=1}^{i}\sum_{u>t}^{i} \omega_{tu} + \sum_{t=1}^{i}\sum_{u>i}^{j} \omega_{tu} \equiv \sigma_{ij}, i < j \tag{6.6}$$

となるので σ_{ii}, σ_{ij} をもちいて，D_i の分散共分散行列 Σ は,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \sigma_{n1} & \cdots & & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

表 4: シャープレイ値配分による計画結果（需要に期別の相関がある場合）

		1期	2期	3期	4期	5期	合計
シャープレイ値 $-\pi_i$	caseB	15.78	29.58	36.92	20.83	28.18	131.30
	case1	16.34	29.72	37.81	24.14	31.36	139.37
	case2	15.08	29.36	36.98	17.35	24.85	123.61
生産量 x_i	caseB	5.78	23.79	27.35	7.90	13.36	78.18
	case1	6.34	23.38	28.09	10.32	13.22	81.36
	case2	5.08	24.28	27.62	4.37	13.50	74.85
在庫量 $E[S_i]$	caseB	5.78	9.58	12.92	14.83	16.18	59.30
	case1	6.34	9.72	13.81	18.14	19.36	67.37
	case2	5.08	9.36	12.98	11.35	12.85	51.61
期別未達率 ε_i	caseB	0.027	0.012	0.006	0.007	0.008	
	case1	0.017	0.011	0.004	0.001	0.002	
	case2	0.045	0.014	0.006	0.029	0.028	
期間全体の未達率 $SO_n(0)$	caseB	0.0587					
	case1	0.0350					
	case2	0.1169					

6.2. 数値計算

6.2.1. 前提条件

$\overline{d} = [10, 20, 24, 6, 12], \alpha = 0.01, S_0 = 10$ とする．

1. case1：1，4 期の間に正の相関がある場合

1 期目に来た顧客に，4 期目にも来店勧誘などの需要促進をする場合である．

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 15 & 15 \\ 9 & 18 & 18 & 24 & 24 \\ 9 & 18 & 27 & 39 & 39 \\ 15 & 24 & 39 & 48 & 48 \\ 15 & 24 & 39 & 48 & 57 \end{bmatrix}$$

2. case2：1，4 期の間に負の相関がある場合

1 期目に来た顧客に，4 期目には，値上がり予想広報などの需要抑制をせざるを得ない場合である．

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 3 & 3 \\ 9 & 18 & 18 & 12 & 12 \\ 9 & 18 & 27 & 21 & 21 \\ 3 & 12 & 21 & 24 & 24 \\ 3 & 12 & 21 & 24 & 33 \end{bmatrix}$$

6.2.2. 結果

表 4 に示す．結果の在庫量の期待値の推移の比較を図 3 に示す．

結果と考察を以下に述べる．

1. シャープレイ値の合計の値は，case1，caseB，case2 の順に大きい．これは，分散共分散の要素の値が大きい case1 では，トータル想定需要量を大きく見積もるからである．

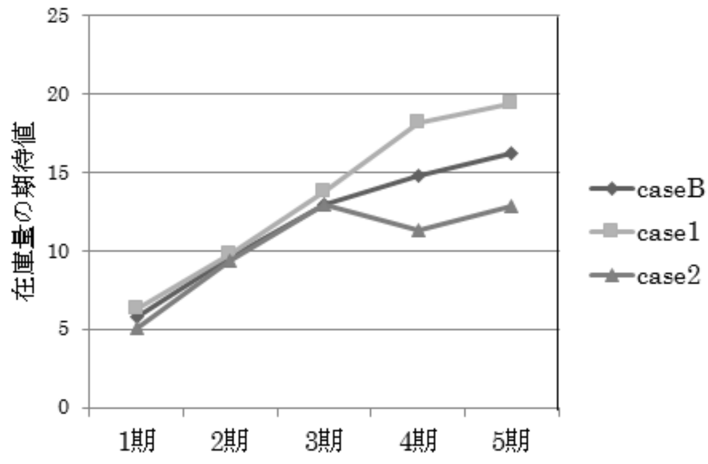

図 3: ケースごとの在庫量の期待値の推移（需要に期別の相関性がある場合）

2. 図 3 より，4 期以降において在庫の持ち方が大きく異なっている．case1（1 と 4 期に正の相関がある場合）は，後半の時期に需要量の分散が大きくなるので，在庫量の期待値のレベルを上げて注文の不確実性のリスクに対応する方策をとっている．

以上に示すように，従来法がコストを最小化するかリスクの程度を確率的に表現される目標値に合致させるか目標値以内に収める方法であるのに対して，需要量に相関がある場合には，分散共分散の大きさに合わせてシャープレイ値を変化させ，在庫量の期待値のレベルを調整している．また，シャープレイ値の計算に際しては，(6.5)，(6.6) 式を用いて分散共分散行列 Σ を求めておけば，それ以降の計算手続きは，需要の相関がない場合と同じである．これらのことから，需要が互いに相関を持つ場合への拡張が容易であるといえる．

7. おわりに

1. 不確実な需要環境における生産計画問題についてシャープレイ値配分による生産計画法を提案し，その特性を明らかにした．
2. シャープレイ値配分の特徴を以下に示す．
   (a) 全体合理性，個人合理性を厳守している．
   (b) 既存手法で用いられる評価指標 $SO_n(0)$ で比較すると，シャープレイ値配分の結果は若干大きくなる傾向にあるが，ほぼ同じである．
   (c) 既存手法 [10, 22] は，各期の「在庫品切れ確率」や「在庫量のレベル」を調整することを重視するが，シャープレイ値配分は「計画期間全体のトータル想定需要量を厳守して，期別想定需要量を調整する」ことを重視する．
   (d) 内示変動があったとしても，計画期間の内示量の合計が同じときには，期別の生産量を調整し,「在庫量の期待値のレベルを同一」にしている．これは，内示生産システム [15] において，計画期間中に内示量の変動があったとしても，期間の合計の内示量が同じ場合には，提案手法は，シンプルな在庫管理基準を示しており，適切に調整できることを示している．
   (e) 需要量に相関がある場合にも，分散共分散の大きさに合わせてシャープレイ値を調整し，在庫量の期待値のレベルを調整している．
3. 提案したシャープレイ値配分による多期間の生産計画法の利点は，

(a) 不確実な需要量に対して，$AVaR$ を評価指標として組み込むことができ，在庫品切れ確率を指標とした場合には現れない在庫量の分布のすそ野の大きさ（分散）から生じるリスクを考慮できる．

(b) トータル想定需要量が $AVaR_{D|D}(1-\alpha)$ を満足する制約下で，期別に期首の在庫量目標と期別生産量を決定することができる．

(c) 1 次元の確率分布計算を主体としたものであり，在庫量や在庫品切れ量の厳密な多次元同時確率分布計算を必要としない．

(d) 従来解法が困難であった需要が互いに相関を持つ場合への拡張が容易である．

今後の予定としては，多ケーススタディを行い，レジリエンス向上への知見を蓄積する．

謝辞

本研究に際して，深く議論していただきました県立広島大学韓虎剛教授，宇野健准教授に感謝いたします．また，本研究は，日本学術振興会科学研究費基盤研究 (C)-25350452 による助成を受けています．

参考文献

[1] B. Abbasi and S.Z. Hosseinifad: Tail conditional expectation for multivariate distributions: A game theory approach. *Statistics and Probability Letters*, **83** (2013), 2228–2235.

[2] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber and D. Health: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9-3** (1999), 203–228.

[3] 藤井聡: 経済レジリエンス宣言 (日本評論社, 2013).

[4] ロバート・ギボンズ, 福岡雅夫, 須田伸一訳: 経済学のためのゲーム理論入門 (創文社, 2010).

[5] E. Hollnagel, D.D. Woods and N. Leveson (eds.), 北村正晴 (監訳): レジリエンスエンジニアリング概念と指針 (日科技連, 2012).

[6] 岩沢宏和: リスク・セオリーの基礎 (培風館, 2010).

[7] J. Lee and A. Prekopa: Properties and calculation of multivariate risk measures: MVaR and MCVaR. *Annals of Operations Researche*, **211** (2013), 225–254.

[8] 中山幹夫, 舟木由喜彦, 武藤滋夫: 協力ゲーム理論 (勁草書房, 2008).

[9] N. Noyan and G. Rudolf: Optimization with multivariate Conditional Value-at-Risk constraints. *Operation Research*, **61-4** (2013), 990–1013.

[10] 大野勝久: Excel による生産管理 (朝倉書店, 2011).

[11] H.H. Panjar: Measurement of risk,solvency requirements,and allocation of capital within financial conglomerates. *Institute of Insurance and Pension Research,University of Waterloo Research Report*, **1-15** (2002).

[12] S.T. Rachev, S.V. Stoyanov and F.J. Fabozzi: *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimzation* (John Wiley & Sons, Inc., 2008).

[13] R.T. Rockafellar and S. Uryasev: Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, **26-7** (2002), 1443–1471.

[14] 澤田康幸: 巨大災害・リスクと経済 (日本経済新聞社, 2014).

[15] 上野信行: 内示情報と生産計画ー持続可能な社会における先行需要情報の活用ー (朝倉書店, 2011).

[16] 上野信行: 大規模生産における内示情報を活用した生産計画一不確実な需要環境に対する先行需要情報の活用一. 計測と制御, **50-7** (2011), 436–443.

[17] 上野信行, 川崎雅也, 奥原浩之: 内示情報を用いた未達率による生産計画システムの提案. システム制御情報学会誌, **23-7** (2010), 147–156.

[18] 上野信行, 角本清孝, 奥原浩之: 内示情報を用いた未達率による生産計画システムの提案 (II) 一未達率尺度の特性解析と基点在庫方策との比較一. システム制御情報学会誌, **24-3** (2011), 43–53.

[19] N. Ueno, K. Okuhara, H. Ishii, H. Shibuki and T. Kuramoto: Multi-item production planning and management system based on unfulfilled order rate in supply chain. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **50-3** (2007), 201–218.

[20] 上野信行, 李偉, 韓虎剛, 奥原浩之: 内示情報を用いた在庫補充方策の特性解析. 日本経営システム学会誌, **31-1** (2014), 37–44.

[21] 渡辺隆裕: ゲーム理論入門 (日本経済新聞社, 2013).

[22] P.H. Zipkin: *Foundation of inventory management* (McGraw-Hill, 2000).

上野信行
広島経済大学 大学院経済学研究科
(兼) 経済学部ビジネス情報学科
〒731-0192 広島市安佐南区祇園 5-37-1
E-mail: nb-ueno@hue.ac.jp

ABSTRACT

WEEKLY PRODUCTION PLANNING ON THE BASIS OF AVERAGE VALUE-AT-RISK: A GAME THEORY APPROACH

Nobuyuki Ueno
Hiroshima University of Economics

Yuki Taguchi　Koji Okuhara
Osaka University

It is an urgent need to complete a production system with the resilience against deterioration, environmental change, demand uncertainty, etc.

For the risk of the demand uncertainty, they use stock-out ratio and/or unfulfilled-order-rate for estimating the risk in the past.

In this paper, we propose a formulation and a solution for multi-period production planning problem that reflects the AVaR (Average value-at-risk) for weighing the tail risk and Shapley value in game theory. The characteristics of the solution method by comparing with the previous method are revealed. The present method has the features that it does not require strict probability distribution of stock-out and it enables an extension to the case where demand in different period is correlated.