日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 58, 2015, pp. 42–55
© 日本オペレーションズ・リサーチ学会

ダイバージェンスによる議員定数配分方式の偏りについて

一森哲男
大阪工業大学

(受理 2013 年 7 月 18 日; 再受理 2014 年 4 月 7 日)

和文概要　この論文では議席の配分方式（緩和除数方式）の偏りを評価する新しい尺度を提案する．従来の尺度は大州・小州を定義し，それに基づく変量を用いて定義されている．しかしながら，誰もが納得する大州・小州の定義は存在するはずもなく，結果，従来の尺度での偏りの評価は極めてあいまいなものとなっている．本論文では，情報理論で使われるダイバージェンスを利用して，大州・小州の定義に基づく変量を必要としない新しい尺度を提案する．また，過去に得られている配分方式の偏りの結果と比較することにより，その妥当性について議論する．

キーワード: 離散最適化, 議員定数配分, 緩和除数方式, 一人一票，偏り

1. はじめに

最近の研究 [6–16] により，議員定数を配分する方法として，緩和除数方式を考察対象とすることは妥当なことと考えられる．しかしながら，緩和除数方式はパラメータを含む配分方式のクラスであり，その中に，無限個の配分方式を含んでいる．そのため，これらの中から唯一の配分方式を選び出すためには，何らかの基準が必要である．そこで，本論文では，人口の多い州（以下，大州と呼ぶ）と人口の少ない州（以下，小州と呼ぶ）への偏りの大きさを，配分方式の選択の基準とする．議員定数配分問題はアメリカの連邦下院議員の議席配分をモデルにして議論することが多いので，本論文もそれに従う．ただし，各州には 1 議席が憲法により保証されているが，その下限は設けない．配分方式は人口に比例した数の議席を州に与えるべきであるが，その数は整数値でなければならず，ある程度の偏りは避けられない．

残念ながら，現時点では，大州・小州への偏りを測るための決定的なモデルが存在しない．そのため，Balinski と Young は妥当と思えるモデルをいくつか考え，配分方式の偏りを調べた．彼等は，それらすべてにおいて，Webster 方式には大州・小州への偏りがない（もしくは，実質上，偏りがない）と結論づけ，Webster 方式を唯一の配分方式として選び出した [1]．一方，Ernst は彼らのものと異なるモデルをいくつか提案し，それらのモデルでは Balinski と Young の結論が正しくないことを示した [3].（偏りを測るモデルに関して，両者の比較が [5] で行われている.）このように，偏りを測る決定的なモデルの存在しないことが，唯一の配分方式の選出を非常に困難にしている．

従来の偏りを測るモデルでは，大州・小州という用語に，誰もが納得する明確な定義がないにもかかわらず（慣例的に，州全体を人口の多い順に並べたとき，上位三分の一が大州，下位三分の一が小州と定義される），その大州・小州の定義に基づく変量を用いて偏りを測る尺度を定義している．しかしながら，大州・小州に配分される議席の総和や取り分*の総

*州に配分される議席数は整数値に限定されるが，その整数条件を連続緩和し，実数値をとることを許した場

和などの変量は，大州・小州の定義が変われば，それらの値も変化する．そのため，このような変量を用いる尺度†では，配分方式の偏りの評価を極めてあいまいなものとしている．また，州全体に対する配分の偏りを調べる代わりに，2 州間で配分方式の偏りを調べる場合も多いが（除数方式には，一様性という性質があり [1]，配分方式が州全体で公正に配分するのであれば，2 州間でも公正に配分する．そのため，偏りを 2 州間で測ることは妥当なことと考えられている），この場合，人口の多い方が大州，少ない方が小州と定義される．しかしながら，相対的に人口の多い州が絶対的にも人口が多いとは限らない．

本論文では，これらの欠点を回避すべく，大州・小州の定義に基づく変量を必要としない新しい尺度を提案する．そのために情報理論で使われるダンバージェンスを利用する．情報理論に基づく（具体的には， Shannon のエントロピー‡に基づく）配分方式を最初に提案したのは Theil である．そこで，第 2 節では，この Theil 方式について簡単に説明する．第 3 節では，より一般的に緩和除数方式とダイバージェンスの関係について述べ，Theil 方式はパラメータの値が 1 の緩和除数方式であること，および，この配分方式が，情報理論では非常に有名な Kullback-Leibler ダイバージェンス（以下，KL ダイバージェンスと略する）に対応することを述べる．第 4 節では，大州・小州の定義に基づく変量を必要としない，偏りを測る新しい尺度を提案する．第 5 節では，過去に得られている配分方式の偏りの結果と比較することにより，この新しい尺度の妥当性について議論する．最後の第 6 節では，新旧の偏り尺度について簡単な所見を述べる．

2. Theil 方式の誕生

実は，Theil 方式は著者が名付けた配分方式であり，その存在も，ほとんど知られていない．それにもかかわらず，Theil が論文 [20] の脚注 1 で彼の配分方式を提案したのは事実である．彼の論文の主目的は人口に比例して議席を配分する問題を考えるのではなく，その平方根あるいは一般的に人口の $\alpha \geq 0$ 乗に比例して配分する問題を考えるべきというものであった．一方，議員定数配分問題は人口に比例した議席配分を実現する方法を求めている．そのため，両者の主張は対立するものと考えられたようである．

議員定数配分問題で求めたいものは人口に比例する配分であるが，これを有権者に比例する配分と変更しても，より一般的に，適当な数値に比例する配分としても，問題そのものの本質は変わらない．議員定数配分問題では，議席数が整数値であることが重要であり，何に比例すべきかは問題ではない．だから，議員定数配分問題は人口の平方根あるいは $\alpha \geq 0$ 乗に比例する議席配分問題と定義してもよい．あるいは，州の人口をその人口の平方根あるいは $\alpha \geq 0$ 乗と定義し直しても良い．そのような意味では，Theil の論文は議員定数配分問題に関連するものの，それを否定するものではない．結局，論文の脚注で提案した彼の配分問題（配分方式）は忘れ去られてしまった．

Theil の配分問題をアメリカの下院議員の議席配分モデルで記述する．すなわち，州 i の人口を $p_i > 0$，州 i への配分議席数を $a_i \geq 0$，州の総数を $s > 0$，州の集合を $S = \{1, \ldots, s\}$，議席総数を $h > 0$，総人口を $\pi = \sum_{i=1}^{s} p_i$ とする．さらに，$u_i = a_i/h$，$v_i = p_i/\pi$，および，

合に配分される完全比例値をその州の取り分と呼んでいる．

†本論文の第 6 節のあとがきで，このような変量を用いた尺度をふたつ具体的に与えている．

‡エントロピーとダンバージェンスは密接な関係にある [2]．

©日本オペレーションズ・リサーチ学会． 無断複写・複製・転載を禁ず．

$H_0 = \{0, 1/h, 2/h, 3/h, \dots\}$ を定義すると，Theil の問題は

$$\min \sum_{i=1}^{s} u_i \log \frac{u_i}{v_i} \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{s} u_i = 1,\ u_i \in H_0 (i \in S)$$

として記述できる．ここで，$v_i > 0\ (i \in S)$ は定数で，最小化は $u_i \geq 0\ (i \in S)$ に関して行う．慣例に従い，$0 \log 0 = 0$ と定義する．Theil はこの形で彼の配分方式を提案したと解釈できるが，これが除数方式であることも，その丸め関数がどのようなものであるのかも述べていない．数値例に対しどのような結果になるのかも含め，何も論じていない．Theil の定式化の目的関数に変数変換（$u_i = a_i/h$，$v_i = p_i/\pi$）を行い，それから，正のアフィン変換を施せば（目的関数から $\log(\pi/h)$ を減じ，さらに $h > 0$ を乗じると）この定式化は

$$\min \sum_{i=1}^{s} a_i \log \frac{a_i}{p_i} \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{s} a_i = h,\ a_i \in \mathbb{Z}_0 (i \in S)$$

と書き直せる．記号 $\mathbb{Z}_0$ は非負の整数の集合である．これは最適化による議席配分問題の定式化の標準的な形になっている．当然ながら，この離散最適化問題の最適解 $(a_1, \dots, a_s)$ が Theil 方式の配分結果を与える．

3. 緩和除数方式とダイバージェンスの関係

新しい配分方式として，緩和除数方式が提案されている [9,18]．緩和除数方式の丸め関数 $d_\alpha(a)\ (a \in \mathbb{Z}_0)$ は以下のように定義される．パラメータ α は有限の値の実数とする．

定義 3.1. 記号 $\mathbb{Z}_+$ を正の整数の集合とする．$a \in \mathbb{Z}_+$ に対して，丸め関数 $d_\alpha(a)$ を

$$d_\alpha(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}} \dfrac{(a+1)^{a+1}}{a^a} & \alpha = 1 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{\log \frac{a+1}{a}} & \alpha = 0 \text{ のとき} \\ \left(\dfrac{(a+1)^\alpha - a^\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} & \alpha \neq 1, 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.1}$$

と定義し，$d_\alpha(0)$ を

$$d_\alpha(0) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1} \approx 0.37 & \alpha = 1 \text{ のとき} \\ 0 & \alpha \leq 0 \text{ のとき} \\ \left(\dfrac{1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} & \text{上記以外のとき} \end{cases} \tag{3.2}$$

と定義する．

丸め関数の定義式 (3.1) の定義域を正の実数 $x > 0$ に拡大したものを $d_\alpha(x)$ とすれば，$d_\alpha(0) = \lim_{x \to 0} d_\alpha(x)$ となる（[11] の補題 2.1）．また，緩和除数方式による議席総数 h の配分 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ は不等式

$$\max_{i \in S} \frac{d_\alpha(a_i - 1)}{q_i} \leq \min_{j \in S} \frac{d_\alpha(a_j)}{q_j}$$

を満たす．逆に，制約 $\sum_{i=1}^{s} a_i = h,\ a_i \in \mathbb{Z}_0\ (i \in S)$ を満たし，かつ，この不等式を満たす $\boldsymbol{a}$ は緩和除数方式の配分になる [9]．ここで，$d_\alpha(-1) = 0$ と約束する．

©日本オペレーションズ・リサーチ学会． 無断複写・複製・転載を禁ず．

さらに，緩和除数方式は最適化問題としても記述できる．実数のパラメータ α に対し，$\mathbb{R}_\alpha$（$\alpha \le 0$ のときは正の実数の集合，$\alpha > 0$ のときは非負の実数の集合）を定義域とする関数：

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x \log \dfrac{x}{p_i} & \alpha = 1 \text{ のとき} \\ -p_i \log \dfrac{x}{p_i} & \alpha = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{\alpha(\alpha-1)} \left(\dfrac{x^\alpha}{p_i^{\alpha-1}} - 1 \right) & \alpha \neq 1, 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.3}$$

を定義する．ここで，$p_i > 0$ は定数 (人口）である．また，

$$\mathbb{Z}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{Z}_+ & \alpha \le 0 \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}_0 & \alpha > 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.4}$$

を定義すると，緩和除数方式は最適化問題

$$\min \sum_{i=1}^{s} f_\alpha(a_i) \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{s} a_i = h,\ a_i \in \mathbb{Z}_\alpha (i \in S)$$

として記述できる [9]．パラメータ $\alpha = 1$ をこの定式化に代入すると，$\alpha = 1$ をもつ緩和除数方式は Theil 方式となることがわかる．さらに，$\alpha = -1, 0, 2$ をもつ緩和除数方式はそれぞれ Hill 方式，TS 方式[§]，Webster 方式である．Hill 方式と Webster 方式の解説は文献 [1] が詳しい．また，前者は Huntington [4]，後者は Willcox [22] により，それぞれ，強烈に支持された．情報理論の観点から，TS 方式は論文 [21] で提案されている．

この定式化を以前に定めた変数 $u_i = a_i/h,\ v_i = p_i/\pi$ を用いて書き直してみる．式 (3.3) で，$p_i = 1$ とした関数を $\varphi_\alpha(x)$ $(x \in \mathbb{R}_\alpha)$ とする．言い換えれば，

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} x \log x & \alpha = 1 \text{ のとき} \\ -\log x & \alpha = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{x^\alpha - 1}{\alpha(\alpha-1)} & \alpha \neq 1, 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.5}$$

とする．さらに，$\alpha \le 0$ のとき $H_\alpha = H_0 \backslash \{0\}$，$\alpha > 0$ のとき $H_\alpha = H_0$ とする．上記の緩和除数方式の定式化は，その目的関数に正のアフィン変換を施せば，

$$\min \sum_{i=1}^{s} v_i \varphi_\alpha \left(\frac{u_i}{v_i} \right) \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{s} u_i = 1,\ u_i \in H_\alpha (i \in S) \tag{3.6}$$

と書き直せる．$v_i > 0$ は定数（州 i の人口 p_i の総人口 π に対する割合）で $\sum_{i=1}^{s} v_i = 1$ である．最小化は u_i $(i \in S)$ に関して行う．

情報理論では，この目的関数を α ダイバージェンスと呼んで，記号 $D_\alpha(U||V)$ を用いて表現している [2]．すなわち，

$$D_\alpha(U||V) = \sum_{i=1}^{s} v_i \varphi_\alpha \left(\frac{u_i}{v_i} \right) \tag{3.7}$$

[§]以前は T&S 方式と呼んでいた．

©日本オペレーションズ・リサーチ学会．　無断複写・複製・転載を禁ず．

である．これは分布 $U=(u_1,\ldots,u_s)$ および $V=(v_1,\ldots,v_s)$ 間の差異を定量化したものと解釈されている．言い換えれば，割合で表現した議席分布 $U=(a_1/h,\ldots,a_s/h)$ と人口分布 $V=(p_1/\pi,\ldots,p_s/\pi)$ 間の差異の量を表している．明らかに，このダイバージェンスは $U,\ V$ に関して対称性を有さず，$D_\alpha(U||V)\neq D_\alpha(V||U)$ である．しばしば，ダイバージェンス $D_\alpha(U||V)$ は（厳密に言えば，数学的には距離ではないが）U から V への有向距離といわれる．また，パラメータ α に関しては等式 $D_\alpha(U||V)=D_{1-\alpha}(V||U)$ が成り立つことは容易に確認できる．この等式がなりたつという意味で，ダイバージェンス $D_\alpha(U||V)$ と $D_{1-\alpha}(U||V)$ は互いに双対関係にあるという．ただし，$\alpha>0$ のときは（関数 $\varphi_\alpha(x)$ の定義域は $x\geq 0$ に注意）$u_i=0$ となる可能性があるので，$D_{1-\alpha}(V||U)=\sum_i u_i\varphi_{1-\alpha}(v_i/u_i)$ の値を定める際，$0\varphi_{1-\alpha}(v_i/0)=0$ と定義する．パラメータ $\alpha=-1,0,1/2,1,2$ のとき，α ダイバージェンス $D_\alpha(U||V)$ はそれぞれ，Neyman の χ^2 ダイバージェンス，逆 KL ダイバージェンス，Hellinger ダイバージェンス，KL ダイバージェンス，Pearson の χ^2 ダイバージェンスと呼ばれている [2]．$\alpha=1/2$ の Hellinger ダイバージェンのみ分布 $U,\ V$ に関して対称である．

パラメータ α を持つ緩和除数方式は α ダイバージェンスの最小化問題に対応（全単射）することから，表 1 の結果が得られる．パラメータ $\alpha=1/2$ の Hellinger ダイバージェンスに対応する配分方式はこれまで誰も提案していないので，それに対する配分方式の名前がない．ダイバージェンスの双対関係を配分方式にも適用すれば，Webster 方式と Hill 方式は互いに双対であり，Theil 方式と TS 方式も双対となる．Webster 方式は議席の割合の分布から人口の割合の分布までの χ^2 ダイバージェンス，すなわち，有向距離 $D_2(U||V)$ を最小にし，Hill 方式は，逆に，人口の割合の分布から議席の割合の分布までの χ^2 ダイバージェンス，すなわち，有向距離 $D_2(V||U)=D_{-1}(U||V)$ を最小にしている．同様に，Theil 方式は議席の割合の分布から人口の割合の分布までの KL ダイバージェンス，すなわち，有向距離 $D_1(U||V)$ を最小にし，TS 方式はその逆の人口の割合の分布から議席の割合の分布までの KL ダイバージェンス，すなわち，有向距離 $D_1(V||U)=D_0(U||V)$ を最小にしている．

以上のことから，Webster と Hill 方式のグループと Theil と TS 方式のグループでは，式 (3.5) を用いて有向距離を測るとき，それに含まれるパラメータの値が異なるだけである．前者のグループでは $\alpha=2$（または，$\alpha=-1$）であり，後者のグループでは $\alpha=1$（または，$\alpha=0$）である．Hellinger ダイバージェンス $D_{1/2}(U||V)$ に対応する配分方式は，また別のパラメータの値 $\alpha=1/2$ を用いて測り，人口の割合の分布と議席の割合の分布の間の距離を最小にしている．χ^2 ダイバージェンスと KL ダイバージェンスと Hellinger ダイバージェンスの三者を比較して，どの有向距離が優れているのかという判断は難しい．しかしながら，情報理論ではダイバージェンスの中で，とりわけ，KL ダイバージェンスがよく知られていることは注意すべきであり，それに対応する議席配分方式は Theil 方式および TS 方式であることも注目すべきことに思われる．少なくとも，Theil 方式と TS 方式を無視して，配分方式の議論をすべきではないように思われる．

表 1: 議席配分方式とダイバージェンスの関係

パラメータ	$\alpha=-1$	$\alpha=0$	$\alpha=1/2$	$\alpha=1$	$\alpha=2$
配分方式の名前	Hill	TS		Theil	Webster
ダイバージェンスの名前	Neyman χ^2	逆 KL	Hellinger	KL	Pearson χ^2

©日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

さらに，同じパラメータ α の値を用いても，有向距離の向きが異なれば，どちらの向きが優れているかも判断しがたい．実のところ，有向距離の向きが反対の Webster 方式と Hill 方式の優劣問題はアメリカでは 100 年近く議論が続いている [1, 16]．Theil 方式と TS 方式についてはそのような議論がなされてこなかったものの，理論的には，同じ優劣問題が生じる．

4. 偏りを測る新しい尺度の提案

緩和除数方式の中から，どの配分方式を選び出せばよいのか？すなわち，パラメータの値をいくらに設定するのが好ましいのか？アメリカでほぼ 100 年間続く Webster 方式と Hill 方式の優劣問題からは，$\alpha = -1, 2$ を選び，KL ダイバージェンスの重要性からは $\alpha = 0, 1$ を選ぶことが考えられる．

議員定数配分問題とダイバージェンスの関係をより明確にするために，正規化されていない議席分布 $A = (a_1, \ldots, a_s)$ と取り分分布 $Q = (q_1, \ldots, q_s)$ 間の α ダイバージェンス $D_\alpha(A||Q)$ を考えることにする．ここで，州 i の取り分は $q_i = hp_i/\pi$ であり，$\alpha \le 0$ ならば $a_i \ge 1$ $(i \in S)$ と仮定する．いま，

$$\psi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) - \varphi'_\alpha(1)(x-1), \qquad x \in \mathbb{R}_\alpha \tag{4.1}$$

を定義すると，すなわち，

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} x\log x - (x-1) & \alpha = 1 \text{ のとき} \\ -\log x + (x-1) & \alpha = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{x^\alpha - 1}{\alpha(\alpha-1)} - \dfrac{x-1}{\alpha-1} & \alpha \ne 1, 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.2}$$

を定義すると，文献 [2] より，A と Q 間の α ダイバージェンスは

$$D_\alpha(A||Q) = \sum_{i=1}^{s} q_i \psi_\alpha\left(\frac{a_i}{q_i}\right) \tag{4.3}$$

と書ける．

つぎに，$\sum_{i=1}^s a_i = \sum_{i=1}^s q_i = h$ に注意すると

$$\sum_{i=1}^{s} q_i\psi_\alpha\left(\frac{a_i}{q_i}\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i\left\{\varphi_\alpha\left(\frac{a_i}{q_i}\right) - \varphi'_\alpha(1)\left(\frac{a_i}{q_i} - 1\right)\right\} = \sum_{i=1}^{s} q_i\varphi_\alpha\left(\frac{a_i}{q_i}\right)$$

の関係，すなわち，$\sum_i q_i\psi_\alpha(a_i/q_i) = \sum_i q_i\varphi_\alpha(a_i/q_i)$ の関係が得られる．この関係式と $q_i = hp_i/\pi$ に注意すると，式 (3.7) および式 (4.3) より

$$\begin{aligned} D_\alpha(U||V) &= \sum_{i=1}^{s} v_i\varphi_\alpha\left(\frac{u_i}{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{p_i}{\pi}\varphi_\alpha\left(\frac{a_i}{h} \times \frac{\pi}{p_i}\right) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{s} q_i\varphi_\alpha\left(\frac{a_i}{q_i}\right) \\ &= \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{s} q_i\psi_\alpha\left(\frac{a_i}{q_i}\right) = \frac{1}{h}D_\alpha(A||Q) \end{aligned}$$

が得られる．この関係：$D_\alpha(U||V) = D_\alpha(A||Q)/h$，および，正規化された分布間の α ダイバージェンスの定義式 (3.7) に注意すると，定式化 (3.6) より，緩和除数方式は最適化問題

$$\min D_\alpha(A||Q) \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{s} a_i = h,\ a_i \in \mathbb{Z}_\alpha (i \in S) \tag{4.4}$$

©日本オペレーションズ・リサーチ学会． 無断複写・複製・転載を禁ず．

として表現できることがわかる．

つぎに，上記の最適化問題 (4.4) で，制約 $\sum_i a_i = h$ を緩和した最適化問題

$$\min D_\alpha(A||Q) \quad \text{s.t. } a_i \in \mathbb{Z}_\alpha (i \in S) \tag{4.5}$$

を考える．この緩和問題 (4.5) の最適解を $a_i = a_i(\alpha)$ と書くと，以下の性質が得られる．

補題 4.1. $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor$ もしくは $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor + 1$ となる．ただし，$q_i \in \mathbb{Z}_+$ ならば $a_i(\alpha) = q_i$ となる．

証明　　定義式 (4.1) の関数 $\psi_\alpha(x)$ $(x \in \mathbb{R}_\alpha)$ に関して，式 (3.5) の関数 $\varphi_\alpha(x)$ $(x \in \mathbb{R}_\alpha)$ の性質 $\varphi_\alpha(1) = 0$ および狭義凸性 $\varphi''_\alpha(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R}_\alpha)$ より，$\psi_\alpha(1) = \psi'_\alpha(1) = 0$ および狭義凸性 $\psi''_\alpha(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R}_\alpha)$ が成り立つ．よって，$\psi_\alpha(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R}_\alpha)$ となり，このことから，式 (4.3) の第 i 成分 $q_i\psi_\alpha(a_i/q_i)$ は a_i が実数値を取るならば，$a_i = q_i$ のとき，最小値 0 を実現する．一方，a_i が整数値に限定されるならば，$q_i\psi_\alpha(a_i/q_i)$ は $a_i = \lfloor q_i \rfloor$ もしくは $a_i = \lfloor q_i \rfloor + 1$ で最小値を実現する．すなわち，$a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor$ もしくは $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor + 1$ となる．　□

補題 4.2. 関数 $\psi_\alpha(x)$ に関し，$\psi_\alpha(\lfloor q_i \rfloor/q_i) < \psi_\alpha((\lfloor q_i \rfloor + 1)/q_i)$ ならば $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor$ となり，$\psi_\alpha(\lfloor q_i \rfloor/q_i) > \psi_\alpha((\lfloor q_i \rfloor+1)/q_i)$ ならば $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor+1$ となり，$\psi_\alpha(\lfloor q_i \rfloor/q_i) = \psi_\alpha((\lfloor q_i \rfloor+1)/q_i)$ ならば $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor$ または $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor + 1$ となる．

証明　　式 (4.3) の第 i 成分 $q_i\psi_\alpha(a_i/q_i)$ の a_i に関する大小関係，すなわち，$\psi_\alpha(a_i/q_i)$ の大小関係から明らか．　□

定理 4.1. $q_i < d_\alpha(\lfloor q_i \rfloor)$ ならば $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor$，$q_i > d_\alpha(\lfloor q_i \rfloor)$ ならば $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor + 1$，$q_i = d_\alpha(\lfloor q_i \rfloor)$ ならば $a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor$，または，$a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor + 1$ となる．

証明　　最初に，$\alpha > 1$ の場合を考える．また，$q_i < d_\alpha(\lfloor q_i \rfloor)$ と仮定する．すなわち，

$$q_i < \left(\frac{(\lfloor q_i \rfloor + 1)^\alpha - \lfloor q_i \rfloor^\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{4.6}$$

と仮定する．関数 $y = x^c$ $(x > 0)$ は $c > 0$ ならば狭義増加関数であること，および，$\alpha - 1 > 0$ に注意すると，上記の不等式 (4.6) は

$$q_i^{\alpha-1} < \frac{(\lfloor q_i \rfloor + 1)^\alpha - \lfloor q_i \rfloor^\alpha}{\alpha}$$

に等価である．さらに，両辺に $\alpha > 1$ を乗じた不等式 $\alpha q_i^{\alpha-1} < (\lfloor q_i \rfloor + 1)^\alpha - \lfloor q_i \rfloor^\alpha$ から，等価変形すると，

$$\frac{\left(\frac{\lfloor q_i \rfloor}{q_i}\right)^\alpha - 1}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{\frac{\lfloor q_i \rfloor}{q_i} - 1}{\alpha - 1} < \frac{\left(\frac{\lfloor q_i \rfloor+1}{q_i}\right)^\alpha - 1}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{\frac{\lfloor q_i \rfloor+1}{q_i} - 1}{\alpha - 1} \tag{4.7}$$

となる．式 (4.2) の 3 番目の等式より，上記の不等式 (4.7) は

$$\psi_\alpha\left(\frac{\lfloor q_i \rfloor}{q_i}\right) < \psi_\alpha\left(\frac{\lfloor q_i \rfloor + 1}{q_i}\right)$$

となる．補題 4.2 より，$a_i(\alpha) = \lfloor q_i \rfloor$ となることが分かる．

つぎに，$q_i > d_\alpha(\lfloor q_i \rfloor)$ の場合と $q_i = d_\alpha(\lfloor q_i \rfloor)$ であるが，上記の証明での式の変形が等価変形であることから，容易に結論がそれぞれ導ける．

さらに，他の α の値に対しても，同様に証明することができるので，それらの証明は略する．　□

©日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

正の実数 x に対して，記号

$$[x]_\alpha = \begin{cases} a, & d_\alpha(a-1) < x < d_\alpha(a) \text{ となる } a \in \mathbb{Z}_\alpha \text{ が存在するとき} \\ a \text{ または } a+1, & x = d_\alpha(a) \text{ となる } a \in \mathbb{Z}_\alpha \text{ が存在するとき} \end{cases}$$

を定義する．これは正の実数を丸め関数を用いて整数に丸める標準的な丸め方である．すると，定理 4.1 より，$a_i(\alpha) = [q_i]_\alpha$ の関係が得られる．いま，実数 α の関数 $H(\alpha)$ を

$$H(\alpha) = \sum_{i=1}^{s} [q_i]_\alpha \tag{4.8}$$

と定義する．

系 **4.1.** $H(\alpha)$ は減少関数となる．

証明　　固定された各議席数 $a \in \mathbb{Z}_0$ に対し，$d_\alpha(a)$ は α に関して増加するので [19]，定理 4.1 より，$[q_i]_\alpha$ は減少する．よって，$H(\alpha)$ は減少する． □

形式的にパラメータ α の有限性を緩和したとき，緩和除数方式の丸め関数 $d_\alpha(a)$ は，$\alpha \to -\infty$ では a に収束し，$\alpha \to +\infty$ では $a+1$ に収束する [11]．言い換えれば，緩和除数方式は，$\alpha \to -\infty$ では Adams 方式に収束し，$\alpha \to +\infty$ では Jefferson 方式に収束する．定理 4.1 より，(現実にはあり得ないが，すべての取り分 q_i が正の整数となる場合を除き）$\alpha \to -\infty$ では取り分の小数点以下の端数がすべて切上げられ $H(\alpha) = \sum_i \lceil q_i \rceil > h$ となり，$\alpha \to +\infty$ では取り分の小数点以下の端数がすべて切捨てられ $H(\alpha) = \sum_i \lfloor q_i \rfloor < h$ となる．

$H(\alpha)$ のとる値は整数値なので，$H(\alpha)$ は減少階段関数となる．α に関する方程式

$$d_\alpha(\lfloor q_i \rfloor) = q_i \tag{4.9}$$

は q_i が整数でなければ唯一の解を持つ¶．これを $\alpha(q_i)$ と書くと，$H(\alpha)$ の不連続点の集合は $\{\alpha(q_i) \mid q_i \notin \mathbb{Z}_+ \ (i \in S)\}$ となる．州の数 s が 1 の場合は，どの配分方式も偏りを持たないので，以下の議論では $s \geq 2$ と仮定する．関数 $H(\alpha)$ は固定された $(q_1, \ldots, q_s)$ に対して定義されているが，$s-1$ 次元の取り分ベクトル $(q_1, \ldots, q_{s-1})$ が $s-1$ 次元単体

$$C = \left\{ (x_1, \ldots, x_{s-1}) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{s-1} x_i \leq h, \quad x_i \geq 0 \ \ (1 \leq i \leq s-1) \right\}$$

の内部全体にわたるとして平均をとる．すなわち，

$$\mathrm{E}[H(\alpha)] = \frac{\int \cdots \int_C \left(\sum_{i=1}^{s-1} [x_i]_\alpha + [h - \sum_{i=1}^{s-1} x_i]_\alpha \right) dx_1 \ldots dx_{s-1}}{\int \cdots \int_C dx_1 \ldots dx_{s-1}} \tag{4.10}$$

を定義する．すると，$H(\alpha)$ の不連続点 $\alpha(x_i)$ が x_i に関して連続であること，および，無限個の単調減少の階段関数の平均をとっていることから，不連続点はなくなり $\mathrm{E}[H(\alpha)]$ は連続な狭義減少関数‖ となる（図 1 参照）．よって，$\mathrm{E}[H(\alpha)] = h$ となる唯一の α が存在する．

¶変数 α の関数 $d_\alpha(0)$ $(\alpha > 0)$ は狭義増加で値域は $(0,1)$，整数 $a \geq 1$ に対して $d_\alpha(a)$ $(-\infty < \alpha < +\infty)$ も狭義増加で値域は $(a, a+1)$ である．よって，q_i が整数でなければ，方程式 (4.9) は唯一の解を持つ．

‖$h = 1$ ならばすべての i に対し $0 < x_i < 1$ なので，脚注 5 より $\alpha(x_i) > 0$ となる．よって，$h = 1$ ならば $\mathrm{E}[H(\alpha)]$ は $\alpha > 0$ の範囲で狭義減少となる．

©日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

つぎに，緩和除数方式の偏りについて考える．パラメータ $\alpha < \alpha'$ に対して，数列

$$g(a) = \frac{d_\alpha(a)}{d_{\alpha'}(a)}, \quad a \in \mathbb{Z}_\alpha$$

を定義する．文献 [11] の補題 3.3 より，この数列 $\{g(a)\}$ は狭義増加列となる．この事実に文献 [17] の命題 1 を適用すると，パラメータ α を持つ緩和除数方式はより大きなパラメータ α' を持つ緩和除数方式より小州有利（大州不利）となることが分かる．言い換えれば，緩和除数方式はパラメータ α が増加すると小州有利から大州有利へと連続的に変化する．以前に述べたように，$\alpha \to -\infty$ では緩和除数方式は Adams 方式に収束し，$\alpha \to +\infty$ では Jefferson 方式に収束する．また，Adams 方式は小州に極端な偏りを有し，Jefferson 方式は大州に極端な偏りを有することは広く認められている [1]．よって，十分小さな値から，α を連続的に増加させると，小州有利から大州有利に変化する境界値（閾値）が存在すると考えられる．

以上の内容をまとめると，十分小さな値から α を増加させると，(i) $\mathrm{E}[H(\alpha)]$ は狭義減少し，途中，$\mathrm{E}[H(\alpha)] = h$ となる．(ii) 配分方式は小州有利から大州有利に変化し，途中，偏りがなくなる．両者を重ね合わせて，本論文では偏りを測る尺度として，以下のものを提案する．

定義 4.1. 緩和除数方式の大州・小州への偏りを測る尺度を $I(\alpha) = \mathrm{E}[H(\alpha)] - h$ とする．$I(\alpha) > 0$ ならば，その緩和除数方式は小州に有利であり，小州への偏りがあるという．一方，$I(\alpha) < 0$ ならば，その緩和除数方式は大州に有利であり，大州への偏りがあるという．$I(\alpha) = 0$ ならば，その緩和除数方式には（大州・小州への）偏りがないという．$|I(\alpha)|$ を偏りの大きさと呼ぶ．

5. 提案した偏り尺度の妥当性

この節では緩和除数方式の大州・小州への偏りの定義式 $I(\alpha)$ の妥当性について議論する．これまでの研究で理論的な偏りを導いた研究は，州の数を 2 に限定している [1, 3, 15]．理由は，第 1 節で述べたように，大州と小州の定義がはっきりしているからである．そこで，$s = 2$ での $I(\alpha)$ を求め，過去の偏りの理論値と比較する．さらに，州の数が現実的な場合は，シミュレーションによる配分方式の偏りの結果 [1, 3, 9] が知られているので，$H(\alpha) - h$ の平均値をシミュレーションにより求め，以前の結果と比較する．

最初に，$s = 2$ での $I(\alpha)$ を求め，過去の偏りの理論値と比較する．式 (4.10) に $s = 2$ を代入すると，

$$I(\alpha) = \frac{\int_0^h ([x]_\alpha + [h-x]_\alpha)dx}{\int_0^h dx} - h = \frac{2\int_0^h [x]_\alpha dx}{h} - h$$

となる．分子に含まれる積分は

$$\begin{aligned}\int_0^h [x]_\alpha dx &= \int_0^{d_\alpha(0)} [x]_\alpha dx + \int_{d_\alpha(0)}^{d_\alpha(1)} [x]_\alpha dx + \cdots + \int_{d_\alpha(h-2)}^{d_\alpha(h-1)} [x]_\alpha dx + \int_{d_\alpha(h-1)}^{h} [x]_\alpha dx \\ &= 1(d(1) - d(0)) + \cdots + (h-1)(d(h-1) - d(h-2)) + h(h - d(h-1)) \\ &= h^2 - \sum_{a=0}^{h-1} d_\alpha(a)\end{aligned}$$

となるので，配分方式の偏りは $s = 2$ のとき

$$I(\alpha) = \frac{h^2 - 2\sum_{a=0}^{h-1} d_\alpha(a)}{h} \tag{5.1}$$

©日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

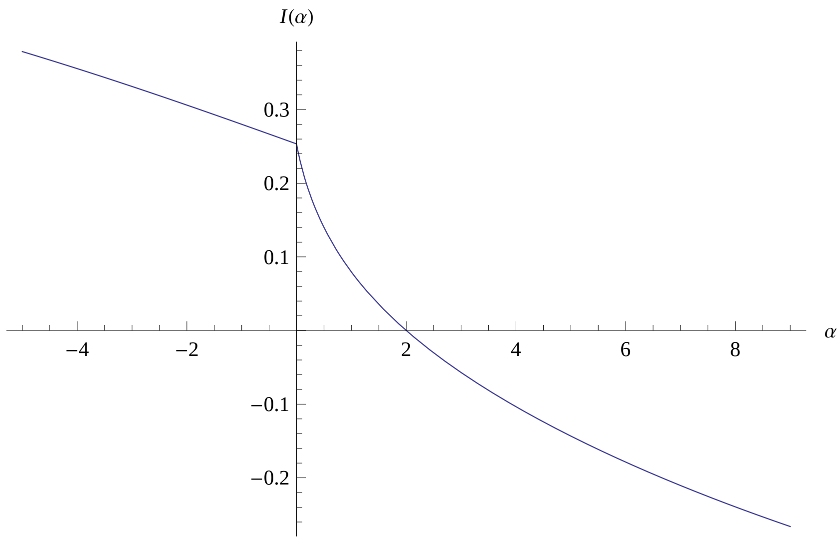

図 1: $h = 5$ のときの偏り $I(\alpha)$ $(-5 < \alpha < 9)$

と書ける．正の整数 a に対して $d_\alpha(a)$ は α に関して狭義増加なので，h が 2 以上ならば，$I(\alpha)$ は α に関して狭義減少となる．$h = 1$ の場合は，$d_\alpha(0)$ が $\alpha > 0$ で狭義増加なので，$\alpha > 0$ の範囲では狭義減少となる．一方，$\lim_{\alpha\to-\infty} d_\alpha(a) = a$ および $\lim_{\alpha\to+\infty} d_\alpha(a) = a + 1$ なので

$$\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = 1, \quad \lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = -1$$

となる．さらに，$\alpha = 2$ のとき $d_\alpha(a) = a + 1/2$ となるので，これを式 (5.1) に代入することより $I(\alpha) = 0$ の唯一の解が $\alpha = 2$ であることが確認できる．故に，$\alpha < 2$ となる緩和除数方式は $I(\alpha) > 0$ となり，小州に有利となる．一方，$\alpha > 2$ となる緩和除数方式は $I(\alpha) < 0$ となり，大州に有利となる．さらに，α の値が 2 から離れれば離れるほど偏りは大きくなる．図 1 では，$h = 5$ のときの偏り $I(\alpha)$ のグラフを区間 $(-5 < \alpha < 9)$ で示している．$\alpha = 2$ で $I(\alpha) = 0$ となっていることが確認できる．言い換えれば，州の数が 2 のとき，緩和除数方式の中で Webster 方式が偏り $I(\alpha) = 0$ となる唯一の配分方式で，$\alpha = -1$ の Hill 方式は小州に有利となる．この結果は，文献 [1] の平面モデル，文献 [15] の BY モデルと E モデルの結論に完全に一致する．

つぎに，州の数が現実的な場合を考える．実際の過去の人口と各配分方式の配分結果を準備する．アメリカの下院議員の定数が $h = 435$ に固定されるようになった 1920 年度の国勢調査から 2010 年度の国勢調査人口に対し，$H(\alpha) - h$ の値を調べる．1920 年から 1950 年度の国勢調査では，州の数は $s = 48$ であり，1960 年度からは $s = 50$ である．現実的な意味で，パラメータの値を $\alpha \in \{-1, 0, 1/2, 1, 2, 3\}$ に限定する．すなわち，Hill 方式，TS 方式，“Hellinger 方式”，Theil 方式，Webster 方式，“1/3 方式” の偏りを調べる．(Hellinger ダイバージェンスを最小にする配分方式には名前がないので，便宜的に，これを Hellinger 方式と呼ぶことにする．また，1/3 方式は，単に他の配分方式と比較のため，Webster 方式より少し大州に有利となる配分方式として文献 [6] で初めて提案された．)

各州の人口をある範囲内の一様乱数で変化させ，上記の各配分方式の偏り，すなわち，$H(\alpha) - h$ の平均値を調べる．具体的には，各国勢調査年度人口により定まる各配分方式による州の配分議席数が変化しない範囲内**で，各州の人口は一様分布すると仮定する．その

**一般に，除数方式では州の人口を少し変化させても，州の配分議席数は変化しない性質を持つ．

©日本オペレーションズ・リサーチ学会． 無断複写・複製・転載を禁ず．

ため，用いる配分方式や州に配分されている議席数により，変動させる人口の範囲はそれぞれ異なる．人口は定められた区間内の整数値を取る一様乱数と仮定して，各国勢調査年度に対応して，50 州（48 州）の人口を定める．さらに，そのような決め方で，10 万組の 50 州（48 州）の人口を定める．よって，表 2 の中で，各国勢調査年度の一つひとつの配分方式に対する数値は 10 万個の $H(\alpha) - h$ の値の平均値を表す．各配分方式の 100 年間にわたる 10 個の平均値に対する更なる平均を，各列の最後に記している．

表 2: 偏り $H(\alpha) - 435$ の平均値；正は小州有利；負は大州有利
州人口はその配分議席数が変化しない範囲でランダムに定める

パラメータ	$\alpha = -1$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$
配分方式の名前	Hill	TS	Hellinger	Theil	Webster	1/3
2010 年度	2.93	2.49	1.43	0.85	0.07	−0.29
2000 年度	2.94	2.49	1.44	0.86	0.07	−0.30
1990 年度	2.96	2.49	1.45	0.86	0.07	−0.32
1980 年度	2.71	2.26	1.32	0.80	0.07	−0.31
1970 年度	2.78	2.54	1.45	0.87	0.06	−0.30
1960 年度	2.56	2.08	1.26	0.77	0.07	−0.34
1950 年度	2.14	1.73	1.07	0.66	−0.14	−0.50
1940 年度	2.16	1.74	1.07	0.45	−0.14	−0.49
1930 年度	2.59	2.19	1.27	0.54	−0.14	−0.48
1920 年度	2.08	1.69	1.23	0.52	−0.14	−0.46
100 年間の平均	2.59	2.17	1.30	0.72	−0.02	−0.38

これらの結果から，1/3 方式と Webster 方式がこの順序で大州に有利で，Webster 方式のそれは僅かで，その大きさは実質上無視できることが読み取れる．さらに，Hill 方式，TS 方式，Theil 方式はこの順序で小州有利で，これらの中では Hill 方式の小州への偏りが最大である．これらのことは文献 [9] の図 1 の結果にほぼ一致し，文献 [15] の I モデルの結論にもかなり一致する．Webster 方式が大州に有利という点は文献 [3] に一致し，Hill 方式が小州に有利という点は文献 [1] に一致する．さらに，直接，偏りを求めたものではないが，文献 [6] の表 2 および文献 [8] の表 2 と表 3 の結果は，ここで得られた結果の妥当性を与える††．

6. あとがき

本論文ではダイバージェンスを利用して，配分方式の大州・小州への偏りを測る新しい尺度 $I(\alpha)$ を提案した．この尺度は大州・小州の定義に基づく変量を用いないので，大州・小州の定義に幅を持たせても，尺度の値は変化しない．つぎに，この尺度を用いて，州の数を 2 に限定した場合の緩和除数方式の理論的偏りを導いた．さらに，アメリカの 100 年間の人口を利用して，緩和除数方式（Hill 方式，TS 方式，Hellinger 方式，Theil 方式，Webster 方式，1/3 方式）の偏りをシミュレーションにより求めた．得られた結果を過去のものと比較して，その妥当性を議論した．

20 世紀前半の Huntington と Willcox の長く激しい対立，つまり，Hill 方式と Webster 方式の対立を考えれば，どのような偏りの尺度を提案しても両者を満足させることはできない

††a_i と q_i の差が決められた範囲（0.5 など）以内となる州の数が多いほど偏りは小さいと考えている．

©日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

が，ここで提案した偏りの評価尺度 $I(\alpha)$ を用いた結論は過去の研究内容によく一致している．特に，Balinski と Young は著書 [1] の定理 5.2 の中で「$s=2$ のとき，Webster 方式は偏りのない唯一の比例除数方式である」と述べているが，$s=2$ のとき $I(\alpha)=0$ となる解が唯一で，それが $\alpha=2$，つまり，Webster 方式であるという我々の結論に驚くほど一致している‡‡．

従来の偏りを測る尺度は，あまりにも，大州・小州の定義に依存し過ぎたようである．典型的なものとして，$\mathcal{L}$ を大州の集合として，変量 $k_{\mathcal{L}}=\sum_{\mathcal{L}} a_i/\sum_{\mathcal{L}} p_i$ を定義する．同様に，$\mathcal{S}$ を小州の集合として，$k_{\mathcal{S}}=\sum_{\mathcal{S}} a_i/\sum_{\mathcal{S}} p_i$ を定義する．これらを用いて，Balinski と Young は偏りを測る尺度として $k_{\mathcal{S}}/k_{\mathcal{L}}-1$ を定義した．この値が正なら小州有利であり，負なら大州有利である．一方，$a_i>0$ と仮定して，州 i の選挙区サイズ $d_i=p_i/a_i$ を定義し，Ernst は偏りを測る尺度として $\sum_{\mathcal{S}} d_i/\sum_{\mathcal{L}} d_i-1$ を定義した．これは以前とは逆で，正ならば大州有利で，負ならば小州有利である．これらの尺度は大州・小州の定義が変われば，尺度の値も変化し，結論も変化する．さらに言えば，そもそも，誰もが納得するように，大州・小州を定義することは不可能である．故に，このような従来の尺度では配分方式の偏りをうまく評価することはできないと思える．

参考文献

[1] M.L. Balinski and H.P. Young: *Fair Representation* (Yale University Press, New Haven, 1982). 越山康, 一森哲男 (訳), 公正な代表制 (千倉書房, 東京, 1987). 2nd ed. (Brookings Institution Press, Washington D.C., 2001).

[2] A.Cichocki and S. Amari: Families of alpha- beta- and gamma-divergences: flexible and robust measures of similarities. *Entropy*, **12** (2010), 1532–1568.

[3] L.R. Ernst: Apportionment methods for the House of Representatives and the court challenges. *Management Science*, **40** (1994), 1207–1227.

[4] E.V. Huntington: The apportionment of representatives in Congress. *Transactions of the American Mathematical Society*, **30** (1928), 85–110.

[5] 一森哲男: 連邦制における議員定数の配分アルゴリズムについて. 情報処理学会論文誌, **50** (2009), 3127–3135.

[6] T. Ichimori: New apportionment methods and their quota property. *JSIAM Letters*, **2** (2010), 33–36.

[7] 一森哲男: 連続平等性と対称性の観点からみた議員定数配分方法と大域的最適化問題. 日本応用数理学会論文誌, **21** (2011), 103–124.

[8] T. Ichimori: On rounding off quotas to the nearest integers in the problem of apportionment. *JSIAM Letters*, **3** (2011), 21–24.

[9] T. Ichimori: Relaxed divisor methods and their seat biases. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **55** (2012), 63–72.

[10] 一森哲男: レニーのエントロピーを最大にする議席配分方式について. 日本応用数理学会論文誌, **22** (2012), 81–96.

[11] T. Ichimori: A note on relaxed divisor methods. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **55** (2012), 225–234.

‡‡緩和除数方式が比例除数方式であることは文献 [13] で証明されている．

©日本オペレーションズ・リサーチ学会． 無断複写・複製・転載を禁ず．

[12] 一森哲男: 議員定数配分問題の離散最適化による解法について. 日本応用数理学会論文誌, **23** (2013), 15–35.

[13] 一森哲男: 緩和除数方式の比例性と歴史上の 5 方式との関係について. 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, **56** (2013), 1–14.

[14] 一森哲男: 分布間ダイバージェンスと議席配分方式の関係について. 情報処理学会論文誌, **54** (2013), 1988–1995.

[15] 一森哲男: 緩和除数方式の偏りについて. 日本応用数理学会論文誌, **23** (2013), 601–617.

[16] 一森哲男: ダイバージェンスが定める議席配分方式. 情報処理学会論文誌, **55** (2014), 1568–1572.

[17] A.W. Marshall, I. Olkin and F. Pukelsheim: A majorization comparison of apportionment methods in proportional representation. *Social Choice and Welfare*, **19** (2002), 885–900.

[18] 薩摩順吉, 大石進一, 杉原正顯 (編): 応用数理ハンドブック (朝倉書店, 東京, 2013).

[19] K.B. Stolarsky: Generalizations of the logarithmic mean. *Mathematics Magazine*, **48** (1975), 87–92.

[20] H. Theil: The desired political entropy. *American Political Science Review*, **63** (1969), 521–525.

[21] H. Theil and L. Schrage: The apportionment problem and the European Parliament. *European Economic Reviews*, **9** (1977), 247–263.

[22] W.F. Willcox: The apportionment of representatives. *American Economic Review*, **6** (1916), 3–16.

一森哲男
大阪工業大学
情報科学部情報システム学科
〒 573-0196 大阪府枚方市北山 1-79-1
E-mail: `ichimori@is.oit.ac.jp`

©日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ABSTRACT

ON THE MEASUREMENT OF THE BIAS OF APPORTIONMENT METHODS USING DIVERGENCES

Tetsuo Ichimori
Osaka Institute of Technology

In this paper we propose a new measurement for estimating the bias of apportionment methods (relaxed divisor methods). Usual bias measurements depend on the definitions of large states and small states. But there are no rigorous definitions of large states or small states. Therefore usual bias measurements are rather obscure. We develop a new bias measurement or a new bias index, using divergences which appear frequently in information theory. We investigate the bias of several apportionment methods with this new bias index and compare our results to those obtained in the past in order to give the validity of our new measurement of apportionment methods.

©日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.