

取引コストを考慮した最適資産配分問題 — DFO 手法を用いた最適乖離許容領域の決定 —

枇々木 規雄 山本 零 田辺 隆人 今井 義弥
慶應義塾大学 三菱 UFJ トラスト投資工学研究所 NTT データ数理システム

(受理 2013 年 3 月 25 日; 再受理 2013 年 11 月 20 日)

和文概要 取引コストを考慮して、リバランスをしない最適な乖離許容領域の決定とリバランス戦略を求める問題に対し、様々な理論的研究が行われている。これらの研究は主に連続時間モデルで特異的確率制御問題として取り扱われる。それに対して、本研究では、非線形計画問題を解くための最適化手法である DFO(derivative free optimization) 手法を用いて、有限期間・離散時間のもとの乖離許容領域の決定方法を提案する。具体的には、モンテカルロ・シミュレーションで収益率分布を記述し、時間に依存する乖離許容境界へリバランスをする戦略のもとで目的関数値(コスト関数)を最小化する乖離許容境界関数のパラメータを表す変数の最適解を求める。本研究で対象とする問題のタイプは乖離許容領域内ではリバランスをせずに、境界を越えたならばリバランスをするというルールのため、通常の数値計画法では解きにくい。その一方で、変数の数が少なくて済み、計算精度の要求がそれほど厳しくないため、DFO 手法と相性のよい問題である。取引コストとトラッキング・エラーのトレードオフを考慮した Leland[7] のタイプの問題に対して、DFO モデルの有用性を検証する。リスク資産が 1 個と 2 個の場合について、Leland[7] と同じパラメータを用いて、無限期間・連続時間のもとの解析解とも比較する。有限期間・離散時間の DFO 解は、有限期間の満期が近づくほど、乖離許容境界は政策ポートフォリオから離れていく(乖離許容領域が大きくなる)こと、離散時間における時間間隔が長くなるにつれて、乖離許容境界が政策ポートフォリオに近づくことが分かった。また、いくつかのパラメータに対する感度分析も行い、モデルの特徴を明らかにすることができた。さらに、モデルを簡略化することによって、目的関数値の劣化を避けながら、計算時間を約 30%高速化することができた。

キーワード: 金融, 最適資産配分問題, 取引コスト, 数理計画, DFO

1. はじめに

多くの年金基金などでは、政策ポートフォリオ(政策資産配分)を定めて資産運用を行っている。資産配分比率は時間の経過とともに政策ポートフォリオから乖離するが、取引コストを考慮したリバランス戦略を考える場合、必ずしも目標とする政策ポートフォリオにリバランスすることが最適な戦略になるとは限らない。このように取引コストを考慮して、リバランスをしない最適な乖離許容領域の決定とリバランス戦略を求める問題に対し、様々な理論的研究が行われている。

まずはじめに、取引コストとトラッキング・エラーのトレードオフを考慮した目的関数を最小化する研究をいくつか紹介する。Leland[6] は 2 つのリスク資産を対象に、政策ポートフォリオは所与の下で、連続時間モデルにおいて比例取引コストの場合の最適化問題を特異的確率制御問題として定式化し、解析解を数値的に導く方法を示している。比例取引コストの場合、乖離許容境界にリバランスすることが最適となる。Leland[7] は無リスク資産を含む 3 資産以上を対象に定式化し、準解析解を導く方法を示している*。具体的には $N = 1$

*3 資産以上の問題で、乖離許容境界上のすべての点で最適条件を満たすことは難しいため、数個の点のみで最適条件を満たす準解析解(Quasi-optimal no-trade region)を求めている。

と $N = 2$ (N はリスク資産数) の簡単な数値計算結果のみが示されている。Leland[6, 7] で最小化する目的関数はともに、取引コストとトラッキング・エラーの定数倍の和である。それに対し、Donohue and Yip[4] は Leland[7] のモデルを $N = 7$ まで実装したプログラムを作成し、 $N = 2$ の場合の感度分析 (取引コスト, リスク回避係数, 分散, 相関係数), 様々なリバランス手法 (Leland モデルによる最適戦略, 定期リバランス戦略, レンジ幅リバランス戦略, 買い持ち戦略, 等確率戦略, アクティブリスク戦略) に対する $N = 3$ の場合の結果を比較し、取引コスト, トラッキング・エラーの点で Leland 最適戦略が良いことを示している。

Pliska and Suzuki[11] は Leland[7] を拡張し、リスク資産比率過程を厳密に記述するとともに、取引コストとして比例的部分だけでなく、固定的部分を追加したモデルを提案している。2 資産を対象としたインパルス制御問題の定式化を行い、政策ポートフォリオから乖離することによって得られる期待超過リターンからトラッキング・エラーと取引コストを引いた目的関数を最大化している。固定取引コストを含めているため、乖離許容境界と政策ポートフォリオの間に最適なりバランス目標を求めている。

これらの研究は、特異的確率制御問題に対する HJB 方程式や、インパルス制御問題に対する準変分不等式などの無限期間に対する連続時間モデルで問題が取り扱われている。

CRRA 型効用関数最大化問題に対する有限期間モデルに関する研究も、連続時間もしくは離散時間の枠組みでいくつか行われている。連続時間の枠組みで、Liu and Loewenstein[8] は 1 つのリスク資産と無リスク資産の 2 資産問題を取り扱い、HJB 方程式を解いて、期間が確率的な場合に解析解が得られることを示している。Lynch and Tan[9] は 2 つのリスク資産と無リスク資産の 3 資産を対象として、リスク資産のリターン予測が可能な場合の問題を定式化し、固定と比例の取引コストを考慮した最適取引戦略を求めている。Atkinson and Ingpochai[1] は比例取引コストを考慮し、 N 個のリスク資産と無リスク資産を対象とした問題を解いている。具体的な数値例としては 2 つのリスク資産と無リスク資産の 3 資産を対象にして、リスク資産の収益率の分散が確率的である場合の最適資産配分に対する効果を示している。一方、離散時間の枠組みで、Genotte and Jung[5] は 1 つのリスク資産と無リスク資産で構成される 2 資産を対象として、問題を解いている。2 項格子モデルを用いて、時間依存の乖離許容境界を数値解として導出している。Boyle and Lin[2] は Genotte and Jung[5] を拡張し、乖離許容境界の解析解を示している。

これらの有限期間モデルで用いられている効用関数は実務において取り扱いにくく、さらに実際の資産運用現場では政策ポートフォリオが決められていて、それをもとに運用する場合が多い。また、連続的にはリバランスを行うことができないため、離散時間でモデル化する必要もある。そこで、本研究では取引コストとトラッキング・エラーのトレードオフを直接取り扱うことができる Leland モデルの枠組みで、有限期間・離散時間モデルで問題を考える。その場合、必ずしも Leland[6, 7] で示されているように乖離許容境界へのリバランスが最適となる保証はないが、本研究では実務的な使いやすさを考え、それを前提にして問題を設定する[†]。この問題を解くために、非線形計画問題を解くための最適化手法である DFO(derivative free optimization) 手法を用いた乖離許容領域の決定方法を提案する。具体的には、モンテカルロ・シミュレーションで収益率分布を記述し、時間に依存する乖離許容境界へリバランスをする戦略のもとで目的関数値 (コスト関数) を計算するプロセスを最適化問題の中に組み込み、DFO 手法を用いて、目的関数を最小化する乖離許容境界関数のパ

[†]1 個のリスク資産と無リスク資産の 2 資産の場合を用いて、乖離許容境界をリバランス目標とする場合の妥当性を付録 A で確認している。

ラメータを表す変数の最適解を求める。DFO 手法を用いる理由は

- 本研究で対象とする問題のタイプは乖離許容領域内ではリバランスをせずに、境界を越えたならばリバランスをするというルールのため、通常の数理計画法では解きにくい
- その一方で、変数の数が少なくて済み、計算精度の要求がそれほど厳しくないため、DFO 手法と相性のよい問題である

からである。本研究における貢献は以下の2点である。

(1) DFO 手法による最適解の導出

本研究で対象とする問題に対する解法は、主に特異的確率制御問題か準変分不等式問題としての定式化に対する解法であり、DFO 手法を用いた解法はない。この解法を用いることによって、目的関数や制約条件、さらに様々な収益率分布などに対して、比較的柔軟な設定のもとで問題を取り扱うことができる。

(2) Leland モデルの枠組みでの有限期間・離散時間問題に対するモデル化

Gennotte and Jung[5] や Boyle and Lin[2] は有限期間・離散時間問題に対する最適解を導出しているが、CRRA 型効用関数を用いており、リスク資産も1個の問題(2資産問題)である。それに対し、本研究では、取引コストとトラッキング・エラーのトレードオフを直接取り扱うことができる Leland モデルの枠組みで、有限期間・離散時間問題に対し、乖離許容境界関数を時間依存にしたモデルを提案する。3資産以上の複数資産に対しても最適なりバランス乖離許容境界を決定するモデルを構築できる。

本研究では、Leland[7] と同じパラメータを用いて、時間に依存する乖離許容境界関数を導出し、無限期間・連続時間のもとの解析解(リスク資産が1個の場合)や準解析解(リスク資産が2個の場合)との比較も含め、DFO 手法を用いた有限期間・離散時間モデルの有用性を検証する。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、取引コストを考慮したリバランス決定問題として、本研究で対象とする Leland[7] のモデルを簡単に紹介する。さらに、有限期間・離散時間問題に対し、乖離許容境界関数を時間依存にしたモデルを提案する。リスク資産が1個と2個の場合のシミュレーション・アルゴリズムを記述する。3節と4節では数値分析を行い、有限期間・離散時間モデルの考察や解析解(準解析解)との比較、感度分析などを行うことにより、DFO モデルの有用性を検証する。5節ではまとめと今後の課題を述べる。

2. 取引コストを考慮したリバランス決定問題

本研究で対象とする先行研究である Leland[7] のモデルを簡単に紹介する。対象資産は N 個のリスク資産と1つの無リスク資産である。取引コストとトラッキング・エラーを考慮し、リスク資産の乖離許容領域(no-trade region)を決定する最適化問題(特異的確率制御問題)として取り扱われている。

2.1. 基本設定

リスク資産 i の価格過程は(2.1)式に示すように、幾何ブラウン運動に従うと仮定する。

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dZ_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.1)$$

$$\text{correl}(dZ_i, dZ_j) = \rho_{ij} dt$$

ここで、 μ_i は資産 i の期待収益率、 σ_i は収益率の標準偏差、 dZ_i はウィナー過程の増分、 ρ_{ij} は資産 i と j の収益率の相関係数を表す。リスク資産 i の投資比率を w_i とすると、その確率過程は伊藤のレナマを用いて、(2.2) 式のように記述できる。

$$\frac{dw_i}{w_i} = a_i dt + \sigma_i dZ_i - \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j w_j dZ_j \right) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.2)$$

a_i は資産 i の期待収益率 μ_i 、ポートフォリオの期待収益率 μ_w 、収益率の分散 σ_w^2 、資産 i とポートフォリオの収益率の共分散 σ_{iw} を用いて、(2.3) 式で計算される。

$$a_i = \mu_i - \mu_w + \sigma_w^2 - \sigma_{iw} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.3)$$

$$\mu_w = r + \sum_{i=1}^N (\mu_i - r) w_i, \quad \sigma_w^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j, \quad \sigma_{iw} = \sum_{j=1}^N w_j \sigma_{ij} \quad (i = 1, \dots, N)$$

ここで、 r は無リスク金利、 σ_{ij} は資産 i と j の共分散を表す。ただし、Leland[7] は(2.2) 式の右辺に含まれる ($a_i, \mu_w, \sigma_w^2, \sigma_{iw}$ も含めて) w_i を政策ポートフォリオのリスク資産 i の投資比率 (政策比率) w_i^* で近似して問題を解いている。目的関数は(2.4) 式のように初期ポートフォリオベクトル $\mathbf{x} \in R^N$ 、取引戦略 β のもとで、トラッキング・エラーの定数倍 (λ 倍) と取引コストの期待割引コストで定義し、それを最小化する。

$$J(\mathbf{x} : \beta) = \mathbf{E} \left[\left\{ \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)} \lambda (\mathbf{w}(\tau) - \mathbf{w}^*)^\top V (\mathbf{w}(\tau) - \mathbf{w}^*) d\tau + \int_t^\infty e^{-r(\tau-t)} \mathbf{k}^\top |\delta \mathbf{w}(\tau)| \right\} \middle| \mathbf{x}, \beta \right] \quad (2.4)$$

ここで、 $V \in R^{N \times N}$ は分散・共分散行列、 $\mathbf{k} \in R^N$ は比例コストベクトル、 $\mathbf{w}^* \in R^N$ は政策ポートフォリオベクトル、 $\mathbf{w}(\tau)$ は τ 時点のポートフォリオベクトル、 $\delta \mathbf{w}(\tau)$ は微小時間におけるポートフォリオの変化幅のベクトルを表す。投資比率がリバランスの有無の境界となる比率 (境界比率) を越えた場合にリバランスを行う。無限期間・連続時間で、かつリバランスをする際の取引コストが投資比率に比例する場合、境界比率に移動することが最適なリバランス戦略となることが示されている。

乖離許容領域の境界比率は、図1に示すように、リスク資産が1個の場合と2個以上の場合で大きく異なる。リスク資産が1個の場合には図1(左)に示すように、 w_{min} を下限、 w_{max} を上限とする幅が乖離許容幅となる。すなわち、乖離許容領域 χ は $\chi = [w_{min}, w_{max}]$ であり、乖離許容領域 χ の境界を $\beta(\chi) = \{w_{min}, w_{max}\}$ と表す。このときの最適リバランス戦略は以下のようなになる。

- ① $w_1 \in (-\infty, w_{min})$: $w_1 = w_{min}$
- ② $w_1 \in [w_{min}, w_{max}]$: 何もしない
- ③ $w_1 \in (w_{max}, \infty)$: $w_1 = w_{max}$

一方、リスク資産が2個の場合には図1(右)に示すように、各資産ごとの乖離許容幅の組み合わせによる領域となる。乖離許容領域 χ (⑤の領域) の境界のウェイトベクトルの集合を $\beta(\chi) = \{\mathbf{w}^\beta\}$ と表す。表1に示すように、乖離許容領域 (⑤) 以外のリバランス戦略は領域によって異なる。本研究ではLelandと同じルールに従い、リバランスを行う。ただし、リバランス位置は必ずしも最短距離や、取引コストやトラッキング・エラーが最小になる点とは限らない。リスク資産が1個の場合の解析解と2個の場合の準解析解の計算方法はLeland[7]を参照されたい。

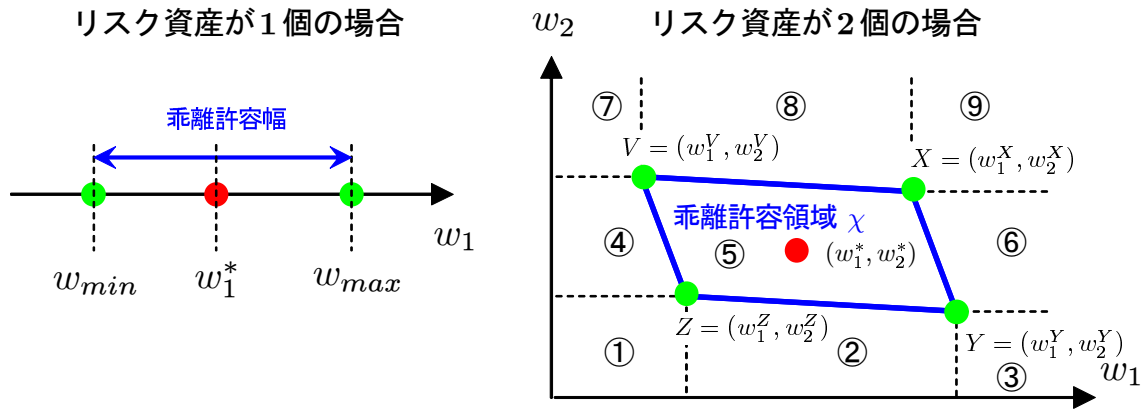


図 1: 乖離許容領域 (境界比率)

表 1: リスク資産が2個の場合の最適リバランス戦略

領域	リバランス位置 (端点)	資産1 w_1	資産2 w_2	領域	リバランス位置 (線上の点)	資産1 w_1	資産2 w_2
①	$Z = (w_1^Z, w_2^Z)$	増加	増加	②	YZの線上	不変	増加
③	$Y = (w_1^Y, w_2^Y)$	減少	増加	④	VZの線上	増加	不変
⑦	$V = (w_1^V, w_2^V)$	増加	減少	⑥	XYの線上	減少	不変
⑨	$X = (w_1^X, w_2^X)$	減少	減少	⑧	VXの線上	不変	減少

2.2. 有限期間・離散時間問題のモデル化と DFO モデル

本研究では, Leland[7] の問題を有限期間・離散時間において考える. その際, Leland[7] で示されているように必ずしも乖離許容境界へのリバランスが最適なものになる保証はないが, 実務的な利用のしやすさを考え, この設定でのモデル化を行う.

このとき, Gennotte and Jung[5] のように2項格子で多期間の収益率を記述し, 動的計画問題として問題を定式化することが考えられる. ただし, 様々な収益率分布, 特にジャンプを含むような複雑なものを扱う場合や実務的に必要な制約条件を含む場合などには対応することができない. このような場合, モンテカルロ・シミュレーションで収益率分布を記述し, 数理計画法により多期間最適化モデルで解くということが考えられる. しかしながら, 本研究で取り扱う「乖離許容領域内ではリバランスをせず, 境界を越えたならばリバランスをする」というルールのもとで, その境界を決める」という問題を定式化する場合, 現実的に求解することができない.

このようなルールに基づく意思決定を最適化する問題に対しては, DFO(derivative free optimization) 手法を用いてある程度の目的関数の精度で最良の局所最適解を求解することができる. DFO手法は Conn, Scheinberg and Vicente[3], Nocedal and Wright[10](第9章)にあるように, 古くから存在している手法で, 目的関数の微分の情報を用いず最適解を求める方法である. 近年, 様々なアルゴリズムの研究がなされ, 広く実用可能になってきた. そこで本研究では, DFO手法を用いて本問題を求解することを提案する.

DFO手法は一般的に以下のような問題への適合性がよい.

- (1) 目的関数値の計算コスト (計算時間等) が大きい問題

- (2) 変数が連続で比較的少数(数十個程度)の問題
- (3) 目的関数にノイズ(誤差)が含まれる問題
- (4) 計算手続きのみが与えられている場合など, 目的関数の関数形が明らかでない問題
- (5) 急速な漸近収束が重要でない問題
- (6) あまり高い精度が要求されない問題

具体的な例を挙げるならば, 目的関数がシミュレーションや物理現象等の結果, 得られる値であるような問題に向いている. DFOには以下のような手法がある.

- ① 直接探索法: 主にパターン探索を行なう
- ② 目的関数を近似したモデル関数を用いる手法: 信頼領域法の概念等を利用する
- ③ フィルター法: 「目的関数の最小化」と「制約条件の充足」という2つの側面に分けて問題を解く多目的最適化的な手法

本研究では, (株)NTT データ数理システム社の数理計画法パッケージ NUOPT(現 数理システム Numerical Optimizer) のアドオンである NUOPT/DFO に実装されている②の「目的関数を近似したモデル関数を用いる手法」を利用し, 解を求める[‡]. この手法の特徴は以下の3点である.

- モデル関数を構築することで部分問題をより扱いやすいものにより計算コストを削減できる
- モデル関数によって近似した目的関数の(局所的な)形状を考慮した探索点の決定が可能である
- 近似する目的関数の形状がある程度なめらかである場合に適合的である

2.3. 乖離許容境界が時間に依存する場合のモデル化

Leland[7]は無限期間・連続時間モデルで問題を取り扱っているため, 乖離許容境界は一定の値に決めることができるが, 有限期間では時間に依存することが多くの先行研究で示されている. 例えば, CRRA型効用関数を用いた有限期間問題では, 有限期間の最終時点(満期)に近づくに従って, 取引コストを削減するために, 乖離許容境界が広がることを示している(Gennotte and Jung[5], Liu and Loewenstein[8]). 本研究で用いる目的関数を有限期間で取り扱った先行研究は存在しないが, いくつかの予備実験を通じて, 同様の性質を確認した(付録B参照). 最終時点に近づくにつれて, 取引をしなくてもトラッキング・エラーが生じる可能性が減ってくる一方で, 取引コストをかけないために乖離許容境界が徐々に広くなると解釈できる. 本研究においてもこの前提のもとで, 時間に依存する乖離許容境界関数を用いて, 問題を定式化する. 具体的には, 2.4節で, シミュレーションのアルゴリズムおよび数理計画モデルの定式化を記述する. その前に, リスク資産が1個の場合の下限と上限に対する乖離許容境界関数を $w_{min}(t)$, $w_{max}(t)$, リスク資産が2個の場合の4つの端点(V , X , Y , Z)における8つの乖離許容境界関数を w_{1t}^V , w_{2t}^V , w_{1t}^X , w_{2t}^X , w_{1t}^Y , w_{2t}^Y , w_{1t}^Z , w_{2t}^Z として, それらの関数形について議論する.

[‡]NUOPT/DFOでは目的関数を近似した2次のモデル関数を作成し部分問題を逐次的に解いて, 解を求めている. 計算精度は, 初期の点集合を構築する際のステップ幅や信頼領域の大きさの初期値など, 初期条件の影響を受けるので, 利用に際しては注意が必要である. また, モデル関数を用いる手法については, Nocedal and Wright[10]の9.2節を参照されたい.

2.3.1. リスク資産が1個の場合

時間に依存する乖離許容境界関数を明示的に導出することは難しい．モデル上はノンパラメトリックに関数形を想定することは可能である．しかし，実際に問題を解く場合には，時点数の増加に伴い決定変数が増加し DFO 手法を使えなくなることや関数形が不安定になりやすいという問題点がある．さらに，得られた結果を実際には使いにくいという問題点もある．そのため，本研究では先行研究で得られた関数の形状を参考にし， $N = 1$ の場合の乖離許容境界関数 $w_{min}(t)$, $w_{max}(t)$ として，(2.5),(2.6) 式を提案する[§]．ここで，有限期間の期間長(年数)を L ，離散時間間隔を Δt とすると，期間数 T は $T = \frac{L}{\Delta t}$ となる．

$$w_{min}(t) = \alpha_{min} \{1 - \gamma e^{-\beta(T-t+1)\Delta t}\} \quad (t = 1, \dots, T) \quad (2.5)$$

$$w_{max}(t) = \alpha_{max} \{1 + \gamma e^{-\beta(T-t+1)\Delta t}\} \quad (t = 1, \dots, T) \quad (2.6)$$

$T \rightarrow \infty (L \rightarrow \infty)$ のとき，

$$\lim_{T \rightarrow \infty} w_{min}(t) = \alpha_{min}, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} w_{max}(t) = \alpha_{max} \quad (2.7)$$

となり，無限期間の場合の乖離許容境界も一定値として記述できる．また，これらの関数は β と γ の値を様々に変えることにより，様々な関数形を記述することが可能である．期間長が10年 ($T = 100$, $\Delta t = 0.1$ 年) の場合で， $\beta = 0.5, 2$ と $\gamma = 0.5, 2$ を組み合わせた4つの関数を図2に示す (① $\beta = 2, \gamma = 0.5$, ② $\beta = 2, \gamma = 2$, ③ $\beta = 0.5, \gamma = 2$, ④ $\beta = 0.5, \gamma = 0.5$)．

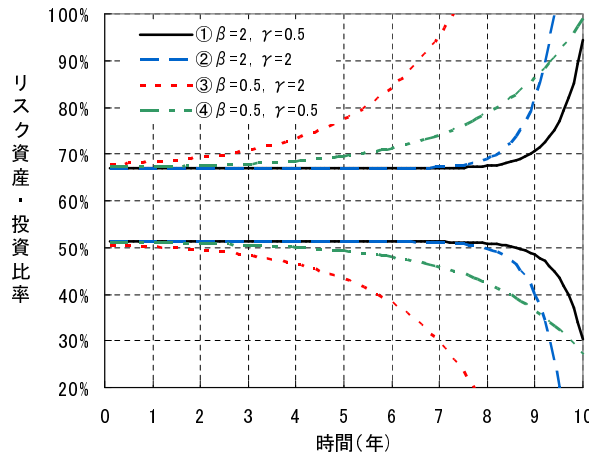


図 2: 時間に依存する乖離許容境界関数

$t = 1(\Delta t \text{ 年})$ のとき，

$$w_{min}(1) = \alpha_{min} (1 - \gamma e^{-\beta L}), \quad w_{max}(1) = \alpha_{max} (1 + \gamma e^{-\beta L}) \quad (2.8)$$

である．したがって，ある程度 L が大きければ，1時点 (Δt 年) の乖離許容幅は α_{min} と α_{max} の値に近づくことが期待される．そこで，以降， α_{min} と α_{max} を初期乖離許容境界と呼ぶことにする．

β の値だけが異なる①と④(または②と③)を比べると， β の値が小さくなるにつれて，早い時点から乖離許容幅は大きくなり始める．一方， γ の値だけが異なる①と②(または③と

[§] 予備実験の詳細と (2.5),(2.6) 式で共通の β と γ を用いている理由を付録 B に示す． $N = 2$ の場合も 2.3.2 項の (2.10) 式のように，同様の関数形を用いる．

④) を比べると, γ の値が大きくなるにつれて, 乖離許容幅の広がり方が大きくなる. また, $t = T$ のとき,

$$w_{min}(T) = \alpha_{min} (1 - \gamma e^{-\beta \Delta t}), \quad w_{max}(T) = \alpha_{max} (1 + \gamma e^{-\beta \Delta t}) \quad (2.9)$$

であり, T 時点の乖離許容境界には, γ が大きく影響することが分かる.

これらの4つのパラメータ α_{min} , α_{max} , β , γ を決定変数として設定し, DFO 手法を用いて, 2.4.1 項で定式化された問題を解くことによって, この設定のもとでの時間に依存した最適乖離許容境界を導出することができる.

2.3.2. リスク資産が2個の場合

$N = 1$ のときと同様に, 図1(右)の4つの端点に対する乖離許容境界関数として, (2.10) 式を提案する.

$$w_{it}^c = \alpha_i^c \{1 + g_i^c \gamma e^{-\beta(T-t+1)\Delta t}\}, \quad (i = 1, 2; t = 1, \dots, T; c \in \{V, X, Y, Z\}) \quad (2.10)$$

ここで, g_i^c は資産 i の端点 c が上限側の端点であれば $+1$, 下限側の端点であれば -1 を表す符号条件である. したがって, $g_1^V = -1, g_2^V = 1, g_1^X = 1, g_2^X = 1, g_1^Y = 1, g_2^Y = -1, g_1^Z = -1, g_2^Z = -1$ である.

時間に依存した乖離許容領域の4つの端点 $(w_{1t}^V, w_{2t}^V), (w_{1t}^X, w_{2t}^X), (w_{1t}^Y, w_{2t}^Y), (w_{1t}^Z, w_{2t}^Z)$ に相当する8つのパラメータ α_i^c と β, γ の計10個のパラメータを決定変数として設定し, 2.4.2 項で定式化された問題を DFO 手法を用いて解く.

2.4. シミュレーションのアルゴリズム

2.2 節でも示したように, 本研究では2次のモデル関数で目的関数を近似する DFO 手法を用いる. この手法は決定変数の数が n 個のとき, 近似する2次関数のパラメータ数である $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 個の目的関数値を計算して, パラメータを決定する. そして, そのパラメータを用いて生成した2次のモデル関数を目的関数として, 信頼領域法により部分問題を反復的に解き, 目的関数値が最小となる最適解を求めていく. 本節では, その目的関数値を計算するシミュレーションのアルゴリズムを記述し, 最適化問題の定式化も示す.

(2.1) 式を離散化し, 標準正規分布に従う確率変数 ε_i に対して, モンテカルロ法を用いて標準正規乱数を生成する.

$$\frac{\Delta S_i}{S_i} = \mu_i \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, 1) \quad (2.11)$$

$$\text{correl}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \rho_{ij} \quad (2.12)$$

リスク資産の価格から比率を計算し, リバランス・ルールに基づいて投資を行う. リスク資産が1個と2個の場合のアルゴリズムを以下に記述する. ここで, サンプル数を M とする.

2.4.1. リスク資産が1個の場合

α_{min} , α_{max} , β , γ をパラメータとして計算アルゴリズムを記述し, DFO モデルの定式化で用いる決定変数として設定することによって, 問題を解く.

(1) $t = 0$ のとき, 投資額を1として ($W_0^{(m)} = 1$), $w_{1,0}^{a(m)} = x_{1,0}^{a(m)} = w_1^*$ とする[¶]. ここで, $x_{1t}^{a(m)}$ をリバランス後のリスク資産投資額とする.

[¶]0 時点ではパス m に依存しないが, 便宜上, m を記述している.

- (2) t 時点のときのパス m のリバランス前のリスク資産額 $x_{1t}^{b(m)}$, 富 $W_t^{(m)}$, リスク資産比率 $w_{1t}^{b(m)}$ を逐次的に計算する ($t = 1, \dots, T; m = 1, \dots, M$).

$$\begin{aligned} x_{1t}^{b(m)} &= \left(1 + \mu_1 \Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1t}^{(m)}\right) x_{1,t-1}^{a(m)} \\ W_t^{(m)} &= x_{1t}^{b(m)} + (1 - w_{1,t-1}^{a(m)})(1 + r)W_{t-1}^{(m)} \\ w_{1t}^{b(m)} &= \frac{x_{1t}^{b(m)}}{W_t^{(m)}} \end{aligned}$$

$w_{1t}^{b(m)}$ の値によって (2.13) 式のようにリバランスを行い, $w_{1t}^{a(m)}$ を計算する. リバランス後の資産額は $x_{1t}^{a(m)} = w_{1t}^{a(m)} W_t^{(m)}$ である.

$$w_{1t}^{a(m)} = \begin{cases} w_{\min}(t) & , w_{1t}^{b(m)} \in [0, w_{\min}(t)] \\ w_{1t}^{b(m)} & , w_{1t}^{b(m)} \in [w_{\min}(t), w_{\max}(t)] \\ w_{\max}(t) & , w_{1t}^{b(m)} \in (w_{\max}(t), 1] \end{cases} \quad (2.13)$$

- (3) 問題は以下のように定式化できる.

$$\text{最小化} \quad C \equiv \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T e^{-(r\Delta t)t} \left\{ \lambda \left(w_{1t}^{a(m)} - w_{1t}^* \right)^2 \sigma_1^2 + k \left| w_{1t}^{a(m)} - w_{1t}^{b(m)} \right| \right\} \quad (2.14)$$

$$\text{制約条件} \quad 0 \leq \alpha_{\min} \leq \alpha_{\max} \leq 1 \quad (2.15)$$

$$\beta \geq 0, \gamma \geq 0 \quad (2.16)$$

3節で後述する図3や図4に示すように, 期間が長い場合や λ の値が大きい場合には, 凸性が現れるため, 大域的最適解が得られると期待される. そうでない場合には退化するので, 問題を解くときには注意が必要である^{||}.

2.4.2. リスク資産が2個の場合

4つの端点 (w_{1t}^V, w_{2t}^V) , (w_{1t}^X, w_{2t}^X) , (w_{1t}^Y, w_{2t}^Y) , (w_{1t}^Z, w_{2t}^Z) で囲まれる領域 (四角形) を時間に依存した乖離許容領域とする.

- (1) $t = 0$ のとき, 投資額を1として ($W_0^{(m)} = 1$), $w_{i,0}^{a(m)} = x_{i,0}^{a(m)} = w_i^*$ ($i = 1, 2$) とする. ここで, $x_{it}^{a(m)}$ をリバランス後のリスク資産 i の投資額とする.
- (2) t 時点のときのパス m のリバランス前のリスク資産額 $x_{it}^{b(m)}$, 富 $W_t^{(m)}$, リスク資産比率 $w_{it}^{b(m)}$ を逐次的に計算する ($t = 1, \dots, T; m = 1, \dots, M$).

$$\begin{aligned} x_{it}^{b(m)} &= \left(1 + \mu_i \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{it}^{(m)}\right) x_{i,t-1}^{a(m)} \quad (i = 1, 2) \\ W_t^{(m)} &= \sum_{i=1}^2 x_{it}^{b(m)} + \left(1 - \sum_{i=1}^2 w_{i,t-1}^{a(m)}\right) (1 + r)W_{t-1}^{(m)} \\ w_{it}^{b(m)} &= \frac{x_{it}^{b(m)}}{W_t^{(m)}} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

^{||}2.2節でも説明したように, たとえ凸性が現れたとしても, DFO 手法では高い計算精度を要求できないことにも注意が必要である.

$w_{it}^{b(m)}$ の値によって (2.17) 式のようにリバランスを行い, $w_{it}^{a(m)}$ を計算する. 領域番号は図 1(右) を参照されたい. リバランス後の資産額は $x_{it}^{a(m)} = w_{it}^{a(m)} W_t^{(m)}$ である.

$$(w_{1t}^{a(m)}, w_{2t}^{a(m)}) = \begin{cases} (w_{1t}^Z, w_{2t}^Z) & , w_{1t}^{b(m)} \in [0, w_{1t}^Z] \text{ and } w_{2t}^{b(m)} \in [0, w_{2t}^Z] & \text{(領域①)} \\ (w_{1t}^Y, w_{2t}^Y) & , w_{1t}^{b(m)} \in [w_{1t}^Y, 1] \text{ and } w_{2t}^{b(m)} \in [0, w_{2t}^Y] & \text{(領域③)} \\ (w_{1t}^V, w_{2t}^V) & , w_{1t}^{b(m)} \in [0, w_{1t}^V] \text{ and } w_{2t}^{b(m)} \in [w_{2t}^V, 1] & \text{(領域⑦)} \\ (w_{1t}^X, w_{2t}^X) & , w_{1t}^{b(m)} \in [w_{1t}^X, 1] \text{ and } w_{2t}^{b(m)} \in [w_{2t}^X, 1] & \text{(領域⑨)} \\ (w_{1t}^{b(m)}, w_{2t}^{l_3(m)}) & , w_{1t}^{b(m)} \in (w_{1t}^Z, w_{1t}^Y) \text{ and } w_{2t}^{b(m)} \in [0, w_{2t}^{l_3(m)}] & \text{(領域②)} \\ (w_{1t}^{l_1(m)}, w_{2t}^{b(m)}) & , w_{1t}^{b(m)} \in [0, w_{1t}^{l_1(m)}] \text{ and } w_{2t}^{b(m)} \in (w_{2t}^V, w_{2t}^Z) & \text{(領域④)} \\ (w_{1t}^{l_2(m)}, w_{2t}^{b(m)}) & , w_{1t}^{b(m)} \in (w_{1t}^{l_2(m)}, 1] \text{ and } w_{2t}^{b(m)} \in (w_{2t}^X, w_{2t}^Y) & \text{(領域⑥)} \\ (w_{1t}^{b(m)}, w_{2t}^{l_4(m)}) & , w_{1t}^{b(m)} \in (w_{1t}^V, w_{1t}^X) \text{ and } w_{2t}^{b(m)} \in (w_{2t}^{l_4(m)}, 1] & \text{(領域⑧)} \\ (w_{1t}^{b(m)}, w_{2t}^{b(m)}) & , w_{1t}^{b(m)} \in [w_{1t}^{l_1(m)}, w_{1t}^{l_2(m)}] \\ & \text{and } w_{2t}^{b(m)} \in [w_{2t}^{l_3(m)}, w_{2t}^{l_4(m)}] & \text{(領域⑤)} \end{cases} \quad (2.17)$$

ここで, 各領域を区分する直線は (2.18)~(2.21) 式の通りである.

$$w_{1t}^{l_1(m)} = a_{1t} w_{2t}^{b(m)} + b_{1t}, \quad a_{1t} = \frac{w_{1t}^V - w_{1t}^Z}{w_{2t}^V - w_{2t}^Z}, \quad b_{1t} = \frac{w_{2t}^V w_{1t}^Z - w_{1t}^V w_{2t}^Z}{w_{2t}^V - w_{2t}^Z}, \quad w_{2t}^{b(m)} \in [w_{2t}^V, w_{2t}^Z] \quad (2.18)$$

$$w_{1t}^{l_2(m)} = a_{2t} w_{2t}^{b(m)} + b_{2t}, \quad a_{2t} = \frac{w_{1t}^X - w_{1t}^Y}{w_{2t}^X - w_{2t}^Y}, \quad b_{2t} = \frac{w_{2t}^X w_{1t}^Y - w_{1t}^X w_{2t}^Y}{w_{2t}^X - w_{2t}^Y}, \quad w_{2t}^{b(m)} \in [w_{2t}^X, w_{2t}^Y] \quad (2.19)$$

$$w_{2t}^{l_3(m)} = a_{3t} w_{1t}^{b(m)} + b_{3t}, \quad a_{3t} = \frac{w_{2t}^Y - w_{2t}^Z}{w_{1t}^Y - w_{1t}^Z}, \quad b_{3t} = \frac{w_{1t}^Y w_{2t}^Z - w_{2t}^Y w_{1t}^Z}{w_{1t}^Y - w_{1t}^Z}, \quad w_{1t}^{b(m)} \in [w_{1t}^Z, w_{1t}^Y] \quad (2.20)$$

$$w_{2t}^{l_4(m)} = a_{4t} w_{1t}^{b(m)} + b_{4t}, \quad a_{4t} = \frac{w_{2t}^X - w_{2t}^V}{w_{1t}^X - w_{1t}^V}, \quad b_{4t} = \frac{w_{1t}^X w_{2t}^V - w_{2t}^X w_{1t}^V}{w_{1t}^X - w_{1t}^V}, \quad w_{1t}^{b(m)} \in [w_{1t}^V, w_{1t}^X] \quad (2.21)$$

(3) 問題は以下のように定式化できる.

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad C \equiv & \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T e^{-(r\Delta t)t} \left\{ \lambda \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (w_{it}^{a(m)} - w_i^*) (w_{jt}^{a(m)} - w_j^*) \sigma_{ij} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^2 k_i |w_{it}^{a(m)} - w_{it}^{b(m)}| \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{制約条件} \quad 0 \leq \alpha_1^V \leq \alpha_1^X \leq 1 \quad (2.23)$$

$$0 \leq \alpha_1^Z \leq \alpha_1^Y \leq 1 \quad (2.24)$$

$$0 \leq \alpha_2^Z \leq \alpha_2^V \leq 1 \quad (2.25)$$

$$0 \leq \alpha_2^Y \leq \alpha_2^X \leq 1 \quad (2.26)$$

$$\beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0 \quad (2.27)$$

3. 数値分析：リスク資産が1個の場合

3.1. 設定条件

Leland[7]を参考にして、表2の設定条件のもとで分析を行う。表2には、4節で分析を行うリスク資産が2個の場合($N = 2$)も含めて記載する。

表 2: パラメータ設定

	$N = 1$	$N = 2$
期待リターン	$\mu_1 = 12.5\%$	$\mu_1 = \mu_2 = 12.5\%$
標準偏差	$\sigma_1 = 20\%$	$\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$
相関係数	—	$\rho_{12} = 0.2$
割引率	$r = 7.5\%$	$r = 7.5\%$
比例取引コスト率	$k_1 = 1\%$	$k_1 = k_2 = 1\%$
政策ポートフォリオ	$w_1^* = 0.6$	$w_1^* = w_2^* = 0.4$
トラッキング・エラー係数	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.3$

数値分析に用いた計算機は、Lenovo ThinkPad T530(Windows 7, 2.8GHz, 4GB), ソフトウェアは NUOPT Ver.14.1 (アドオン:NUOPT/DFO) と R Ver.2.10.1 である。シミュレーション・パス数は 10,000 本である。解析解 (最適乖離許容境界) は非線形連立方程式を解くことができる R 言語の `nleqslv` 関数で求解し、最適乖離許容境界の下限は $w_{min}^{SC} = 0.5126$, 上限は $w_{max}^{SC} = 0.6692$ と求められる。また、DFO 手法により得られる最適解 (以降、DFO 解) は NUOPT/DFO を利用して求解する。

3.2. 予備分析

$w_{min}(t)$ と $w_{max}(t)$ が政策ポートフォリオ w_1^* から離れるほど、取引コストは小さくなるが、トラッキング・エラーは大きくなる。そのトレードオフによって、 $w_{min}(t)$ と $w_{max}(t)$ を記述する 4 つの決定変数の最適解が得られる。その結果を示す前に、この問題の性質を確認するために予備分析を行う。

(3.1), (3.2) 式の θ をパラメトリックに変化させて計算した α_{min} , α_{max} と $\beta = 2$, $\gamma = 0.5$ を (2.5), (2.6) 式に代入し、乖離許容境界の下限 $w_{min}(t)$ と上限 $w_{max}(t)$ を求め、取引コスト、トラッキング・エラー、目的関数値の変化を調べる。 θ が大きくなると、 α_{min} , α_{max} も大きくなり、乖離許容幅が大きくなる。

$$\alpha_{min} = \theta(w_{min}^{SC} - w_1^*) + w_1^* \quad (3.1)$$

$$\alpha_{max} = \theta(w_{max}^{SC} - w_1^*) + w_1^* \quad (3.2)$$

$\Delta t = 0.05$ (年) で、期間長が 20 年と 2 年の場合の取引コスト、トラッキング・エラー、目的関数値の変化を図 3 に示す。期間長が 20 年の場合には、取引コストとトラッキング・エラーのトレードオフにより、目的関数の最小値近傍で凸性が現れる。しかし、期間長が 2 年の場合には、係数 (θ) が大きくなると、取引コストがほとんど 0 のところで目的関数値が最小になるため、最小値近傍でほとんど凸性が現れず、退化しやすいことがわかる。特徴としては期間長が短くなるほど、凸性が現れにくくなる。しかし、期間長が短い場合に必ず退化が起きやすいわけではない。なぜならば、トラッキング・エラーのパラメータ λ を大きくすると、目的関数の最小値近傍では凸性が生じやすいからである。

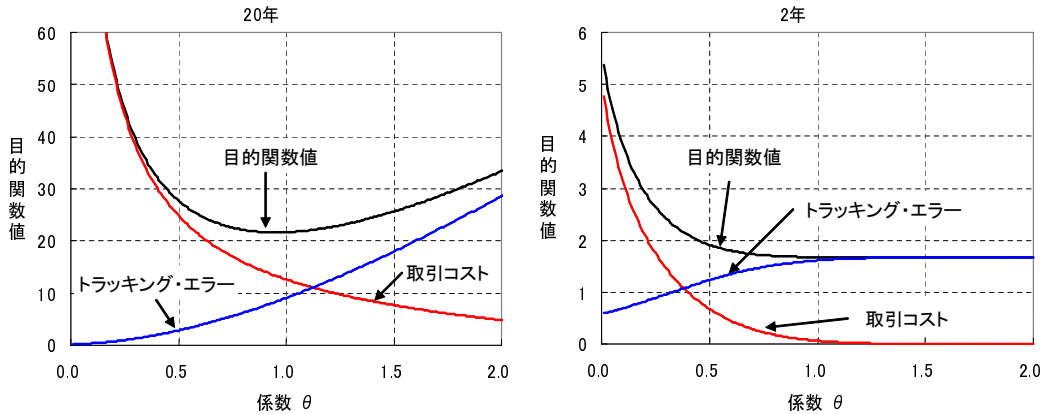


図 3: 取引コスト, トラッキング・エラー, 目的関数値の変化

これらを確認するために, $\lambda = 1$ で期間長が 1~5 年の場合と, 期間長 2 年で $\lambda = 0.5, 1, 3, 5, 7, 10$ の場合の目的関数値を図 4 に示す.

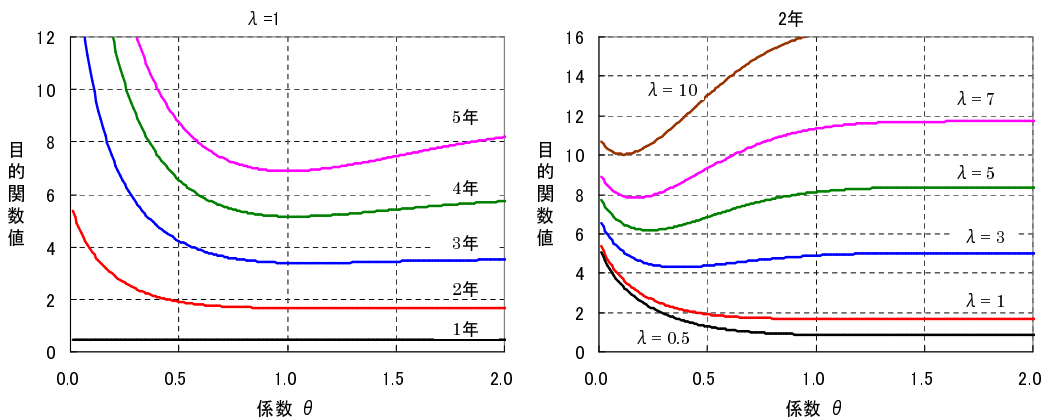


図 4: 様々な期間長や λ に対する目的関数値の変化

左図の 1 年のときや右図の $\lambda = 0.5$ の場合には退化するが, 4 年以上や $\lambda = 3$ 以上では明確に最小値近傍で凸性が現れる. DFO 手法で最適化問題を解くときには, この点に注意を払う必要がある.

3.3. 基本分析

4 種類の離散時間間隔 ($\Delta t = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$ 年) と 4 種類の期間長 ($L = 5, 10, 15, 20$ 年) の 16 種類の組み合わせに対して, DFO 手法で最適解を求め, それらを (2.5), (2.6) 式に代入して乖離許容境界を求める. 予備分析で期間長が短い場合, 最適解が退化する可能性を示したが, 5 年の長さであれば, 退化は生じない. 期間長による違いを示すために, 図 5 を示す. 左図は $\Delta t = 0.1$, 右図は $\Delta t = 0.5$ の場合を示す.

$w_{max}(t)$ と $w_{min}(t)$ は満期 (最終時点) に近づくまではほぼ一定であるが, 満期に近づくとき, 乖離許容幅は大きくなり始める. 'SC wmax', 'SC wmin' は乖離許容境界の解析解を表す. 満期に近づいたときの影響を比較するために, 満期までの時間に対する結果を図 6 に示す. 時間間隔が同じであれば, 期間長にかかわらず, 乖離許容境界は満期までの時間によって決まることが分かる.

次に時間間隔による違いを示すために, 図 7 を示す.

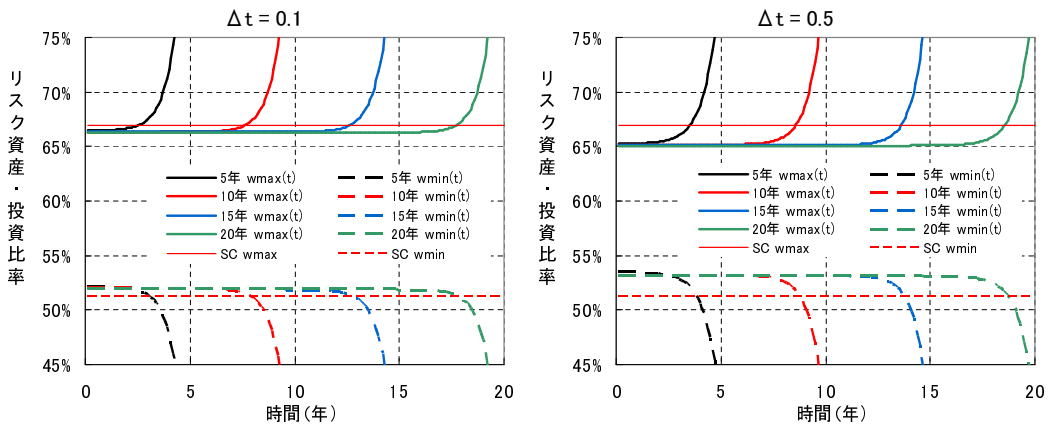


図 5: 様々な期間長に対する乖離許容境界の比較

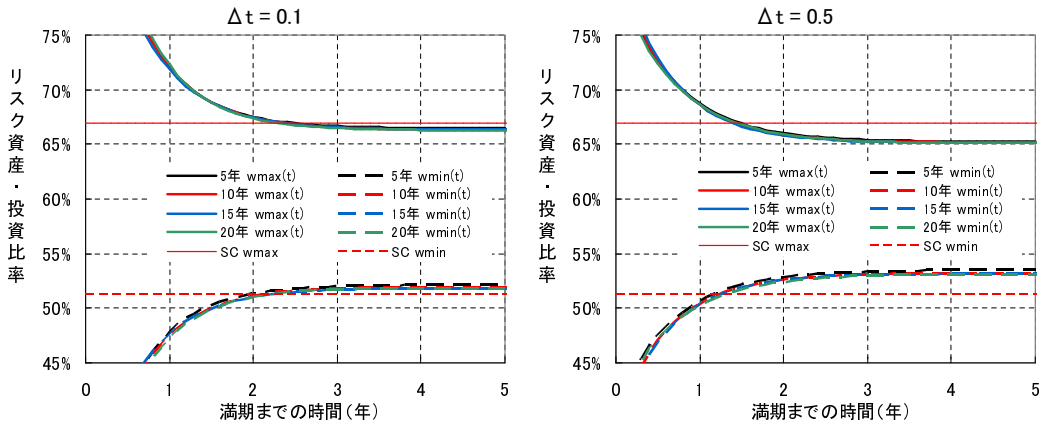


図 6: 満期までの時間に対する乖離許容境界の比較

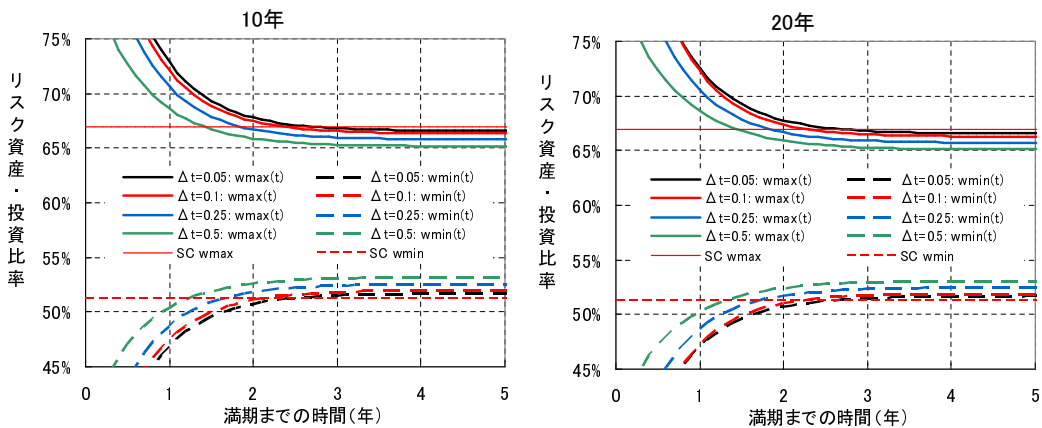


図 7: 様々な時間間隔に対する結果の比較

時間間隔が短くなるにつれて、乖離許容幅は広くなる。この理由は時間間隔が大きくなると、乖離許容境界を超えてもすぐ取引できないので、乖離許容幅が小さくなりやすいからである。また、取引コストが少なくなるため、相対的にトラッキング・エラーを小さくしようとするとも考えられる。また、時間間隔が短くなるにつれて連続時間モデルに近づくため、満期時点 T までの年数が遠い t 時点の ($T - t$ が大きい場合の) 乖離許容境界は解析解に近づくことも分かる。

有限期間・離散時間問題において、DFO 解は解析解 (無限期間・連続時間の最適解) よりも目的関数が小さくなるのが期待される。無限期間の場合には乖離許容境界の最適解は固定戦略であるが、有限期間の場合には時間依存戦略が最適解となる。解析解に対する DFO 解の目的関数値の改善率を図 8 の左図に、解析解と DFO 解の乖離許容幅 (乖離許容境界の上限と下限の差) を右図に示す。ここで、左図の改善率を解析解に対して「離散時間で固定戦略の仮定の下で得られた DFO 解」** による改善効果と固定戦略に対して「時間依存戦略の下で得られた DFO 解」による改善効果の 2 つに分解し、図の中では前者を“離散時間”、後者を“時間依存”と記す。

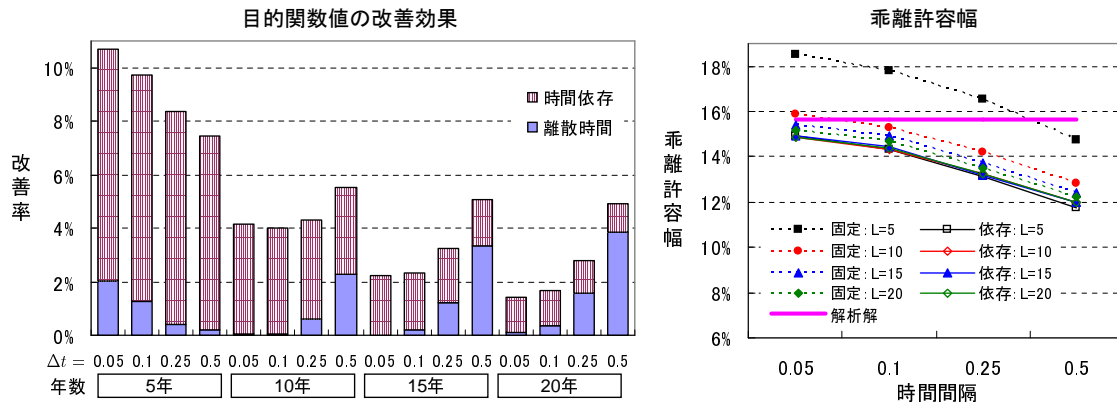


図 8: モデルの改善効果と乖離許容幅

左図を見ると、すべてのケースで改善されており、有限期間・離散時間において本研究で求めた DFO 解は解析解よりも良い解が求められていることが確認できる。期間長 (年数) L が短いほど、改善率は大きくなる。これは有限期間の最適解が時間依存であるため、その改善効果が大きいからである。また、時間依存部分として大きく影響するのは (時間依存を許した解が許さない解と大きく異なるのは) 満期に近い期間だけなので、期間長 L が長くなると、改善率が下がるとともに、有限期間の場合の最適戦略による時間依存効果が小さくなり、固定戦略の下で DFO 解を求める (離散時間に合わせて解を求める) 効果の方が大きくなる。一方、時間間隔が大きくなると、連続時間モデルとは乖離していくため、離散時間モデルによる改善効果は大きくなる。しかし、期間長が 5 年の場合には逆になっている。その理由を調べるために右図を見てみよう。右図の「固定」の値は固定戦略と仮定したときの乖離許容幅、「依存」の値は時間依存戦略における初期乖離許容幅 ($\alpha_{max} - \alpha_{min}$) を示す。時間依存戦略の場合にはあまり期間長 L の長さに依存しないことが分かる。そして、満期に近づくほど乖離許容幅が広がりやすくなるため、期間長 L が短くなると、固定戦略と仮定したときの乖離許容幅は大きくなる。一方で、時間間隔が大きくなると、乖離許容幅は小さくなりやすい。期間長が 5 年で時間間隔が $\Delta t = 0.25$ 以下の場合、解析解よりも大きくなるが、期

** (2.5), (2.6) 式のパラメータを $\gamma = 0$ もしくは $\beta \rightarrow \infty$ として問題を解いたときの最適解に相当する。

間長が10年以上の場合には解析解よりも小さい。そのため、5年の場合の固定戦略におけるDFO解は、時間間隔が長くなるにつれて解析解に近づいているが、その他の場合には解析解から離れていく。これが、5年の場合には時間間隔の効果が他の場合とは逆に生じている理由である。

3.4. 感度分析

以下に示す4種類のパラメータに対する感度分析を行った結果を示す。

- 比例取引コスト率 k : 9種類 ($k = 0.1\%, 0.3\%, 0.5\%, 0.7\%, 1\%, 1.5\%, 2\%, 2.5\%, 3\%$)
- トラッキング・エラー係数 λ : 9種類 ($\lambda = 0.5, 0.7, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15$)
- 期待収益率 μ_1 : 9種類 ($\mu_1 = 10\%, 12.5\%, 15\%, 17.5\%, 20\%, 22.5\%, 25\%, 27.5\%, 30\%$)
- ボラティリティ σ_1 : 8種類 ($\sigma_1 = 15\%, 20\%, 25\%, 30\%, 35\%, 40\%, 45\%, 50\%$)

時間間隔を $\Delta t = 0.1$ (年), 期間長を20年として行った感度分析の結果を図9に示す。

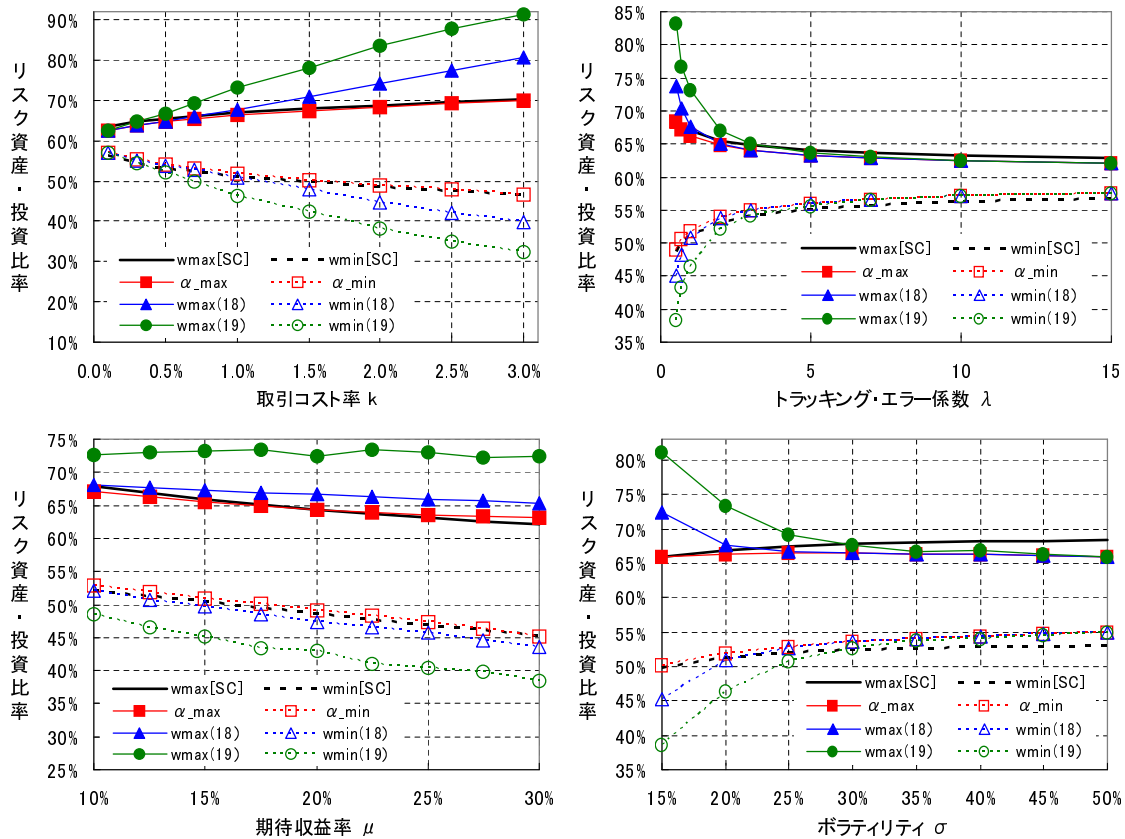


図9: 感度分析

乖離許容境界に対する解析解は‘wmax[SC]’と‘wmin[SC]’, DFO手法で問題を解いたときの α_{max} , α_{min} は‘ α_{max} ’, ‘ α_{min} ’, 満期まで2年の乖離許容境界は‘wmax(18)’, ‘wmin(18)’, 満期まで1年の乖離許容境界は‘wmax(19)’, ‘wmin(19)’と記載している。

取引コスト率, トラッキング・エラー, 期待収益率はパラメータの変化に対して, 解析解と同じように変化している。ボラティリティに関しては, 乖離許容境界の影響の受け方はその大きさに依存する。ボラティリティの大きさは資産価値の変化に大きな影響を与える。分散時間でのリバランスは分散時点ではできないため, 連続時間の場合よりも保守的になる可能性がある。そのため, ボラティリティが大きい場合には解析解に比べて, 乖離許容幅を

狭めていると考えられる。一方、ボラティリティが小さい場合には、離散時間でも満期が近づくと乖離許容幅は大きくなる。このように離散時間の場合、パラメータの変化に対して、解析解の変化とは多少異なる場合もある。

4. 数値分析：リスク資産が2個の場合

4.1. 基本分析

3.3節のリスク資産が1個の場合と同様に、4種類の離散時間間隔 ($\Delta t = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$ 年) と4種類の期間長 ($L = 5, 10, 15, 20$ 年) の16種類の組み合わせに対して、DFO手法で最適解を求める。シミュレーション・パス数は10,000本である。R言語の `nleqslv` 関数で準解析解を求解すると表3のように求めることができる。

表3: リスク資産2個の場合の準解析解

準解析解	w^V	w^X	w^Y	w^Z
資産1	32.170%	46.219%	47.788%	33.195%
資産2	47.788%	46.219%	32.170%	33.195%

$\Delta t = 0.1$, 期間長が10年の組み合わせに対して、DFO解を用いて描いた満期まで5年, 2年, 1年のときの乖離許容境界と準解析解による乖離許容境界を図10の左図に、DFO解を用いて計算された各端点の満期までの時間推移を右図に示す。

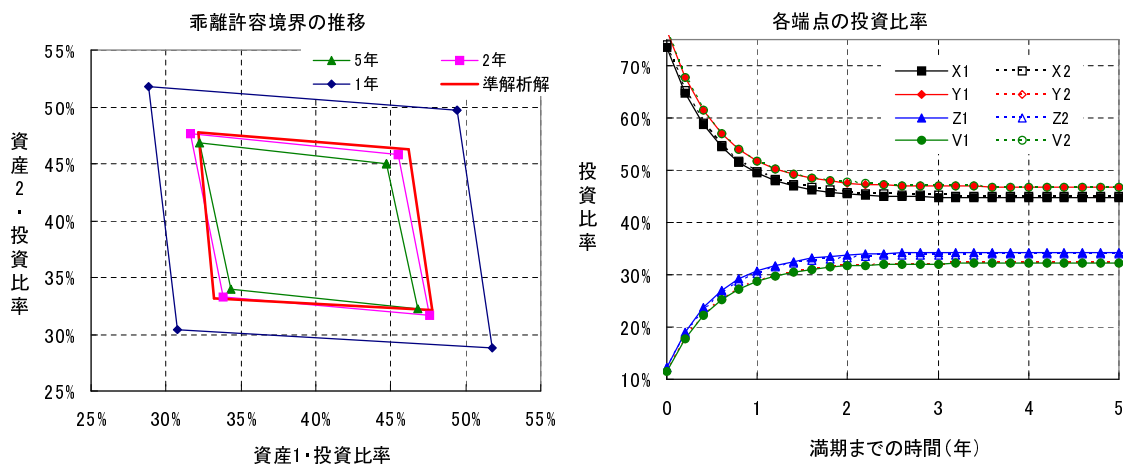


図10: 乖離許容境界の満期までの時間推移 ($\Delta t = 0.1, L = 10$ 年)

右図の $X1, X2, Y1, V2$ が上限, $Y2, Z1, Z2, V1$ が下限の端点を表す。 $N = 1$ のときと同様に、両図ともに満期に近づくと乖離許容境界が広がる様子が分かる。

期間長と時間間隔の違いによる影響を調べるために、DFO解 $\alpha_i^c (i = 1, 2; c \in \{V, X, Y, Z\})$ を端点とした乖離許容境界の図を描いて、比較を行う。時間間隔が $\Delta t = 0.1, 0.5$ の場合の乖離許容境界を図11, 期間長が10年と20年の場合の乖離許容境界を図12に示す。

図11を見ると、DFO解は準解析解とほぼ同じ乖離許容境界の形となっている。また、期間長の違いによる境界の形状の違いはあまり見られない。一方、図12を見ると、時間間隔が大きくなるにつれて、乖離許容境界が政策ポートフォリオに近づく(乖離許容領域が小さくなる)。この理由はリスク資産が1個の場合と同様である。

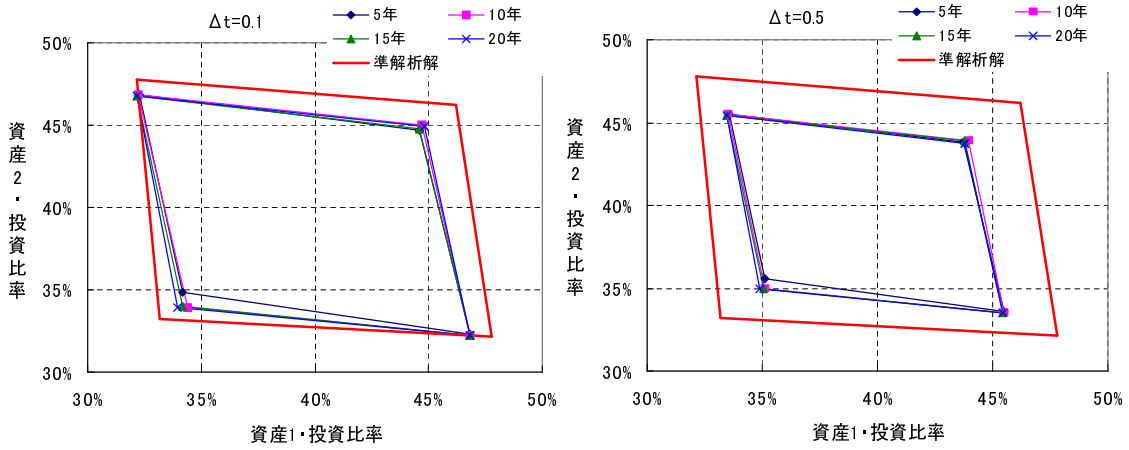


図 11: 様々な期間長に対する乖離許容境界の比較

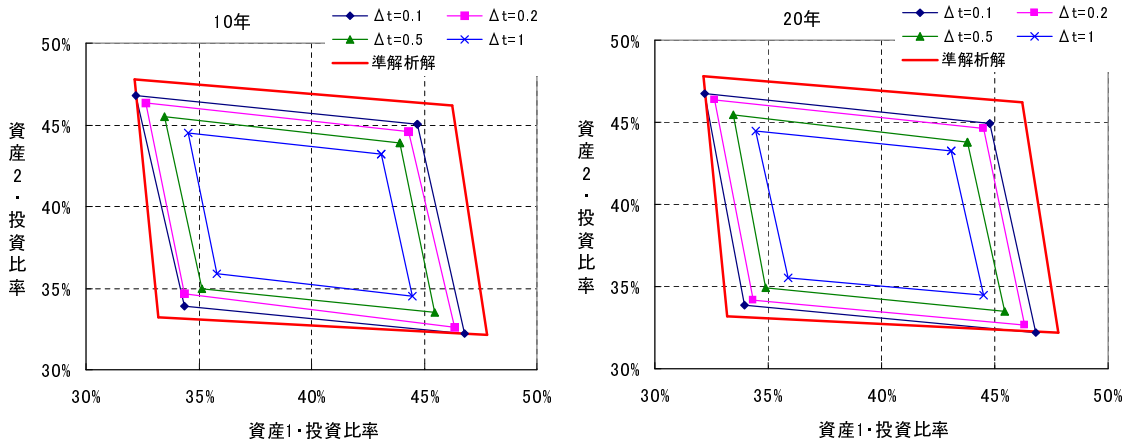


図 12: 様々な時間間隔に対する乖離許容境界の比較

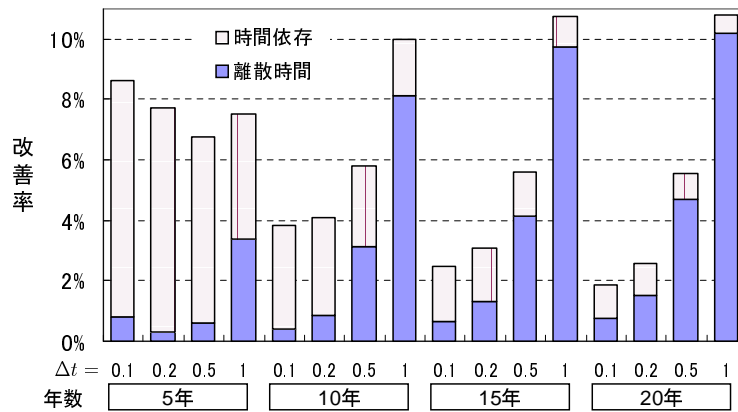


図 13: モデルの改善効果

リスク資産が1個の場合の図8の左図と同様に、準解析解による目的関数値に対する改善率を図13に示す。すべてのケースで改善されており、有限期間・離散時間において本研究で求めたDFO解は準解析解よりも良い解が求められていることが確認できる。また、期間長 L が短いほど時間依存効果の方が大きく、期間長 L が長いと固定戦略と仮定しても、準解析解よりもDFO解の方が大きく改善することが分かる。これもリスク資産が1個の場合の特徴と同じである。

4.2. 感度分析

3種類のパラメータ(比例取引コスト率 k_i , トラッキング・エラー係数 λ , 相関係数 ρ)に対する感度分析を行う。

k_i : 10種類 ($k_i = 0.1\%, 0.3\%, 0.5\%, 0.7\%, 1\%, 1.5\%, 2\%, 2.5\%, 3\%, 3.5\%$)

λ : 10種類 ($\lambda = 0.5, 1, 1.3, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30$)

ρ : 10種類 ($\rho = -0.3 \sim 0.6(0.1 \text{ 刻み})$)

時間間隔を $\Delta t = 0.1$ (年), 期間長を10年として行った感度分析の結果をそれぞれ図14~図16に示す。左図は準解析解, 右図はDFO解の $(\alpha_1^c, \alpha_2^c), c \in \{V, X, Y, Z\}$ を端点として描いた初期乖離許容境界である。

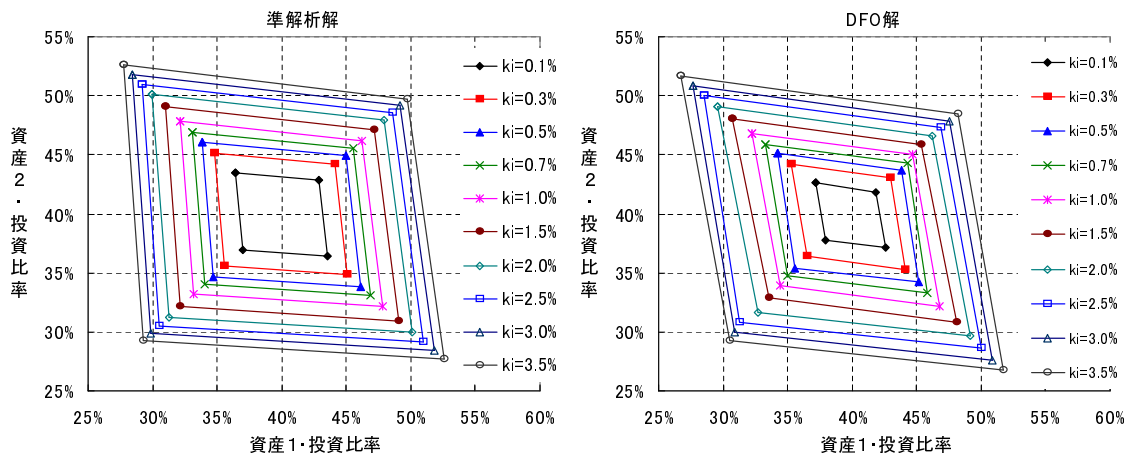


図14: 感度分析(1): 比例取引コスト

比例取引コストが大きくなると取引コストを増加させないために乖離許容領域は大きくなる。また、トラッキング・エラー係数が大きくなると、政策ポートフォリオからの乖離を大きくしないために、乖離許容領域は小さくなる。これらはLelandモデルの準解析解とDFO解の両方に見られる特徴である。一方、Lelandモデルの準解析解は相関係数が大きくなると、各資産の乖離許容境界の上限同士、下限同士の端点が徐々に政策ポートフォリオに近づいている(四角形が徐々に小さくなる)。一方、DFO解では異なる資産の乖離許容境界の上限と下限を表す端点が政策ポートフォリオから遠くなっている(四角形の形状が変化している)。比例取引コストやトラッキング・エラーでは(無限期間・連続時間問題に対する)準解析解と有限期間・離散時間モデルの初期乖離許容境界 (α_i^c) にそれほど違いは見られなかった。しかし、相関係数の場合には、離散時間・有限期間問題に対して準解析解とは異なる乖離許容境界の特徴をうまく表現できている。

各パラメータに対する乖離許容領域の端点の時間推移を確認するために、リスク資産1に対する端点の値を図17に示す。

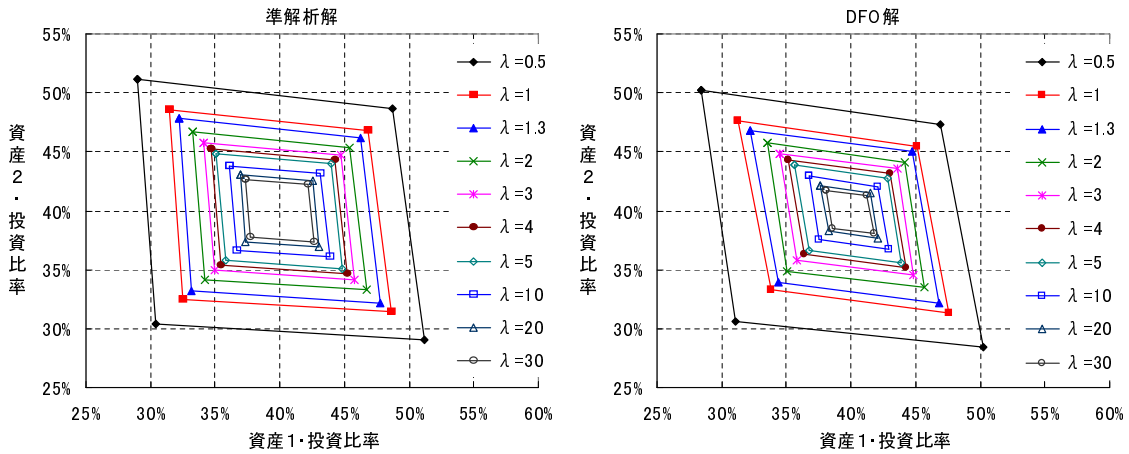


図 15: 感度分析 (2): トラッキング・エラー

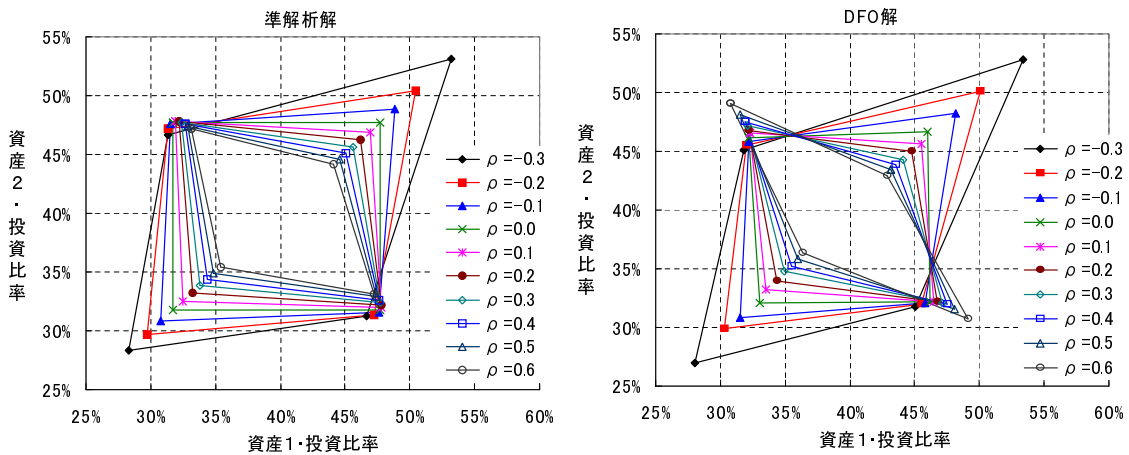


図 16: 感度分析 (3): 相関係数

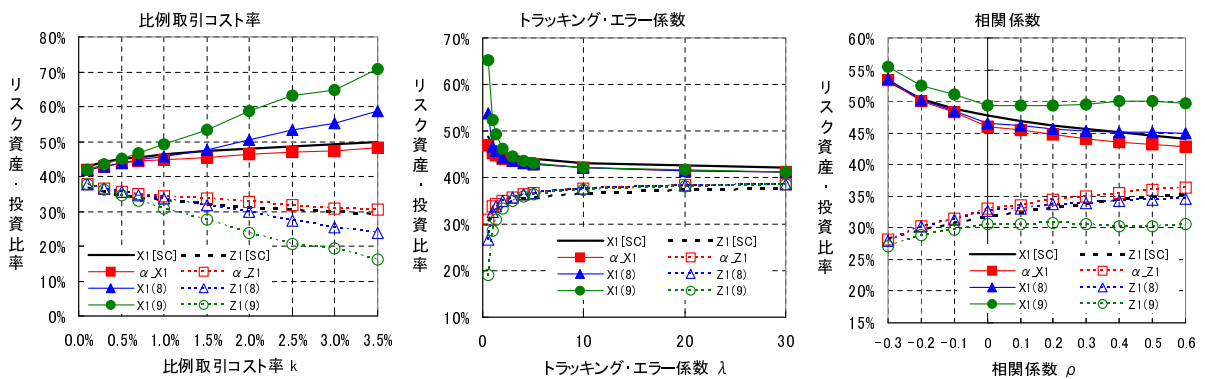


図 17: 乖離許容領域の端点の推移

紙面の都合上、リスク資産1の乖離許容領域の端点 X, Z のみを示す。準解析解は ‘X1[SC]’, ‘Z1[SC]’, DFOで問題を解いたときの α_1^X, α_1^Z は ‘ α_{X1} ’, ‘ α_{Z1} ’, 満期まで2年の値は ‘X1(8)’, ‘Z1(8)’, 満期まで1年の値は ‘X1(9)’, ‘Z1(9)’ と記載している。

リスク資産が1個のときと同様に、比例取引コスト率やトラッキング・エラー係数を変化させたときの乖離許容境界の変化は準解析解の特徴と同様である。具体的には取引コスト率が大きいと、満期に近づくにつれて取引をしないために、乖離許容領域もより大きくなる。トラッキング・エラー係数も小さくなると、乖離許容領域はより急速に大きくなる。一方、相関係数が大きくなると、二つの資産は連動して変化しやすく、満期に近づくにつれて取引をしないために、乖離許容領域はより大きくなる。

4.3. モデルの簡略化と計算時間の高速化

リスク資産が1個(3.3節)と2個(4.1節)の場合に、DFO手法で問題を解いたときの計算時間は図18の通りである。

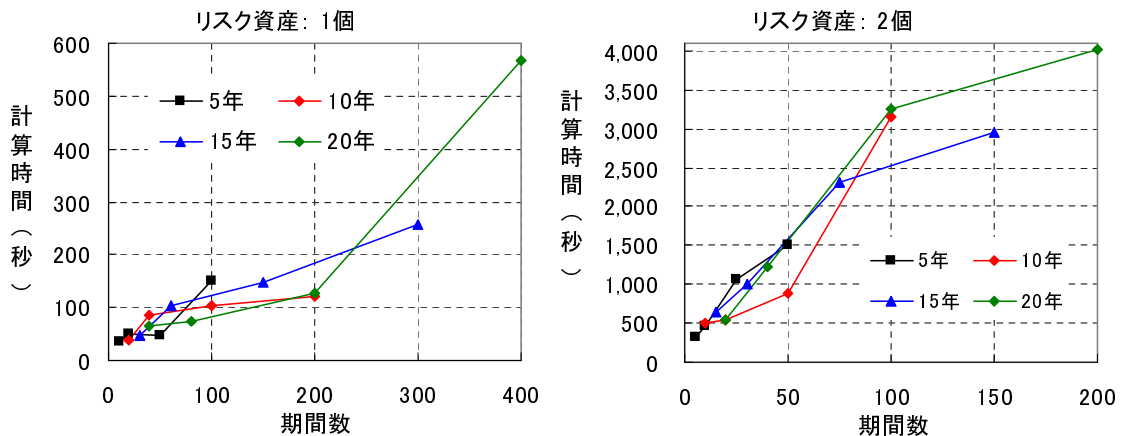


図 18: 計算時間

図18の計算時間を見ると、リスク資産2個で200期間の場合、約67分かかる。問題の性質上、あまり計算時間を気にする必要のない問題ではあるが、様々な感度分析を行うためには問題を高速に解く必要も生じる。そこで、乖離許容領域の特徴を考慮し、決定変数の数を減らして高速化を試みる。ここでは、乖離許容領域を「平行四辺形」と仮定して問題を解き、目的関数値と計算時間を比較する。図1の右図のリスク資産が2個の場合を見てみよう。乖離許容領域を「平行四辺形」とする場合、4つの端点に関する決定変数は(4.1)式のような関係になる。

$$\alpha^X + \alpha^Z = \alpha^V + \alpha^Y \quad (4.1)$$

したがって、任意の1つの端点を除いて、変数を設定すれば、決定変数は10個から8個に減少する。さらに、政策ポートフォリオが乖離許容領域の中心の場合、4つの端点に関する決定変数は(4.2)式のような関係になり、隣り合う2つの端点に変数を設定すれば、決定変数は6個のみとなる。

$$\alpha^X + \alpha^Z = \alpha^V + \alpha^Y = 2w^* \quad (4.2)$$

(4.1)式の場合をモデルA、(4.2)式の場合をモデルBと呼び、オリジナルモデルと比較する。計算時間と目的関数値の増加割合・端点の平均絶対偏差を図19に示す。

オリジナルモデルに対して、モデルAは約34%、モデルBは約25%に計算時間は大幅に減少する。それに対して、目的関数値の増加分はモデルAではほとんど0、モデルBでも

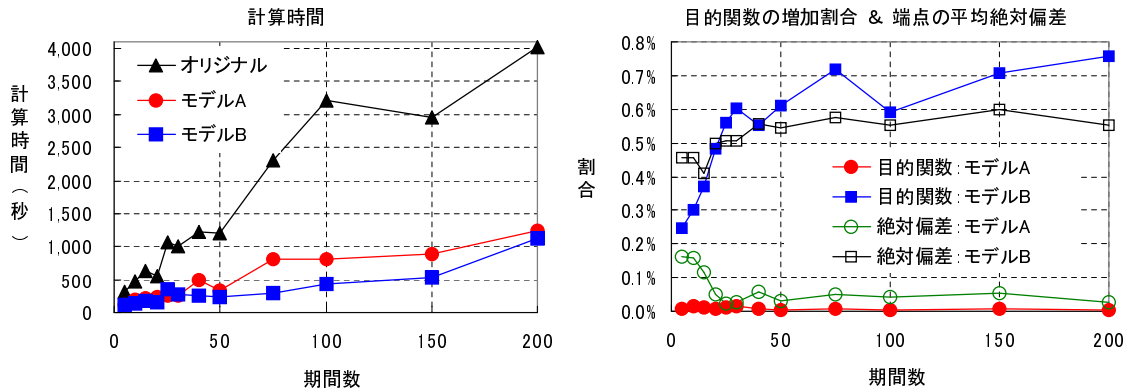


図 19: 計算時間と目的関数値の増加割合・端点の平均絶対偏差

平均すると約 0.5% である。目的関数値の増加分に比べて、計算時間の減少は大きく、モデルの簡略化は極めて効果的である。一方、紙面の都合上掲載しないが、乖離許容領域の変化を図で見るとほとんど同じである。詳細に見るために、オリジナルモデルとモデル A もしくはモデル B の 4 つの端点の差の絶対値の平均 (平均絶対偏差) も図 19 の右図で見てみよう。平均絶対偏差は、モデル A では 0.2%、モデル B でも 0.6% 程度であり、実用的には十分に許容できる範囲である。

5. おわりに

本研究では、有限期間・離散時間の場合の取引コストを考慮した最適資産配分問題を議論した。DFO 手法を用いた乖離許容領域の決定方法を提案し、リスク資産が 1 個と 2 個の場合の Leland モデル [7] について、解析解 (リスク資産 1 個の場合) や準解析解 (リスク資産 2 個の場合) との比較も含めた有限期間・離散時間モデルによる考察、感度分析などを行った。期間長の違いに比べて、時間間隔の差が最適解に影響を与えることが分かった。また、期間長が短い場合でトラッキング・エラー係数が小さい場合には退化する場合があります。また、リスク資産が 1 個の場合には、比例取引コスト率、トラッキング・エラー、期待収益率、ボラティリティ、リスク資産が 2 個の場合には、比例取引コスト率、トラッキング・エラー、相関係数に対する感度分析を行った結果、有限期間・離散時間の場合もパラメータの変化に対して、多少異なる部分もあるが、解析解と同じように変化することを示すことができた。今後の課題として、リスク資産が 3 個以上の問題へ適用し、DFO 手法の適用可能性を調べる必要がある。

参考文献

- [1] C. Atkinson and P. Ingpochai: Optimization of N-risky asset portfolios with stochastic variance and transaction costs. *Quantitative Finance*, **10-5** (2010), 503–514.
- [2] P.P. Boyle and X. Lin: Optimal portfolio selection with transaction costs. *North American Actuarial Journal*, **1-2** (1997), 27–39.
- [3] A.R. Conn, K. Scheinberg, and L.N. Vicente: *Introduction to Derivative-Free Optimization* (SIAM, Philadelphia, 2009).
- [4] C. Donohue and K. Yip: Optimal portfolio rebalancing with transaction costs. *Journal of Portfolio Management*, **29-4** (2003), 49–63.

- [5] G. Gennotte and A. Jung: Investment strategies under transaction costs: The finite horizon case. *Management Science*, **40-3** (1994), 385–404.
- [6] H.E. Leland: Optimal asset rebalancing in the presence of transaction costs, U.C. Berkeley (1996).
- [7] H.E. Leland: Optimal portfolio management with transactions costs and capital gains taxes, U.C. Berkeley (1999).
- [8] H. Liu and M. Loewenstein: Optimal portfolio selection with transaction costs and finite horizons. *The Review of Financial Studies*, **15-3** (2002), 805–835.
- [9] A.W. Lynch and S. Tan: Multiple risky assets, transaction costs, and return predictability: Allocation rules and implications for U.S. investors. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **45-4** (2010), 1015–1053.
- [10] J. Nocedal and S.J. Wright: *Numerical Optimization*, Second Edition (Springer, New York, 2006).
- [11] S.R. Pliska and K. Suzuki: Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs. *Quantitative Finance*, **4** (2004), 223–243.
- [12] 数理システム: NUOPT/DFO 利用ガイド (2011).

付録

A. リバランス目標の確認実験

Leland モデル [7] を始め、比例取引コストの場合には乖離許容境界を最適リバランス目標として設定している。本研究での設定条件である有限期間・離散時間問題における乖離許容境界のリバランス目標としての妥当性について、リスク資産が1個の場合で確認する。リバランス目標 $g_{min}^A(t)$, $g_{max}^A(t)$ を (A.1),(A.2) 式のように設定する。乖離許容境界はそれぞれ $w_{min}^A(t)$, $w_{max}^A(t)$ と記す。

$$g_{min}^A(t) = w_1^* + (1 - \eta)(w_{min}^A(t) - w_1^*) \quad (\text{A.1})$$

$$g_{max}^A(t) = w_1^* + (1 - \eta)(w_{max}^A(t) - w_1^*) \quad (\text{A.2})$$

ここで、 η はリバランス目標がどの程度乖離許容境界の内側に入っているかを表すパラメータであり、 $0 \leq \eta \leq 1$ である。 $\eta = 0$ ならば、乖離許容境界がリバランス目標に、 $\eta = 1$ ならば、政策資産比率がリバランス目標になる。 $\Delta t = 0.05$, $L = 5$ 年の場合の結果を図 20 に示す。リバランス目標 $g_{min}^A(t)$, $g_{max}^A(t)$ は ‘gmin^A(t)’, ‘gmax^A(t)’, 乖離許容境界をリバランス目標としたときの乖離許容境界 $w_{min}(t)$, $w_{max}(t)$ ((2.5), (2.6) 式) は ‘wmin(t)’, ‘wmax(t)’, $w_{min}^A(t)$, $w_{max}^A(t)$ は ‘wmin^A(t)’, ‘wmax^A(t)’ と記載している。また、右図は左図の一部を拡大した図である。リバランス目標を (A.1),(A.2) 式に設定したことにより、乖離許容幅が少しだけ広がり ($w_{min}^A(t) < w_{min}(t)$, $w_{max}^A(t) > w_{max}(t)$)、リバランス目標が少しだけ内側に入る結果 ($\eta = 0.044$) が得られたが、目的関数は 0.0092% の改善に過ぎない。紙面の都合上、分析結果は省略するが、3.3 節で基本分析を行った 16 種類の組み合わせに対する目的関数の改善割合は平均すると 0.0006% であった^{††}。また、 η の平均値は 0.024 である。目的関

^{††}DFO 手法では、あまり高い計算精度を要求できないため、(A.1),(A.2) 式のようにリバランス目標を設定すると、16 ケース中 7 ケースで目的関数が悪くなった。ただし、その最大値も 0.006% である。

数値はほとんど変わらないことが確認できたので、実務的な利用のしやすさを考えると、リバランス目標を乖離許容境界として問題のクラスを限定しても、問題ないだろう。

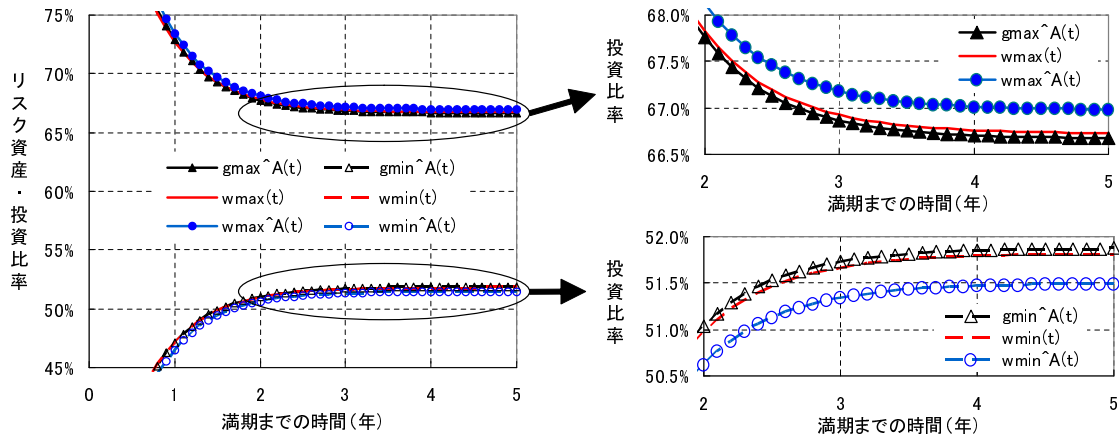


図 20: 乖離許容境界とリバランス目標

B. 予備実験による関数形の決定

2.3 節で提案した関数形を決定した予備実験について説明する。2.4 節に示したアルゴリズムを用いて、 $N = 1$ の場合のいくつかのリバランス戦略に対する目的関数値を比較する。用いるパラメータは 3.1 節の表 2 の値を用いる。予備実験において、固定の乖離許容境界を用いる場合、これらのパラメータで得られた Leland モデルによる解析解を用いる。

リバランスの有無と目的関数の関係を探るために、以下の 2 つの戦略を評価する。すべての時点で解析解 (乖離許容境界) を用いたリバランス戦略を戦略 0 と呼ぶ。

(1) ある期間のみリバランスをしない戦略 (戦略 1)

ある 1 年間 (期間数 = $\frac{1}{\Delta t}$) のみリバランスをしない戦略を想定する。具体的には、 $t \sim t + \frac{1}{\Delta t} - 1$ 時点 ($t = 1, \dots, T - \frac{1}{\Delta t} + 1$) ではリバランスをしないが、その他の時点では解析解 (乖離許容境界) を用いたリバランス戦略を行う。

(2) ある時点以降満期までリバランスをしない戦略 (戦略 2)

同様に、 t 時点以降リバランスをしない戦略を想定する。具体的には、 $1 \sim t - 1$ 時点 ($t = 2, \dots, T$) では、解析解 (乖離許容境界) を用いたリバランス戦略をするが、 $t \sim T$ 時点ではリバランスを行わない。

$\Delta t = 0.1$ の場合で、期間長が 5, 10, 15, 20 年間の 4 種類の結果を図 21 に示す。左図は戦略 1, 右図は戦略 2 である。縦軸は、このリバランス戦略によって得られた目的関数値を戦略 0 の目的関数値で割った値を示す。

戦略 1 ではリバランスをしない 1 年が最終時点に近づくほど、目的関数は小さくなるのが分かる。戦略 2 でもリバランスをしない時点を遅くすればするほど、目的関数は小さくなる傾向がある。戦略 2 では最終時点の手前で目的関数が大きくなるが、それはリバランスしない期間が短くなるためである。以上のことから、最終時点に近づけるほど、乖離許容幅を広くするような関数形を設定した方がよいことが分かる。

さらに、このことを確認するために、以下の 2 種類の時間に依存した乖離許容境界関数を用いた場合の目的関数値について調べる。関数 1 は最終時点に近づくほど、関数 2 は初期時点に近づくほど、乖離許容幅が広がる関数を表す。

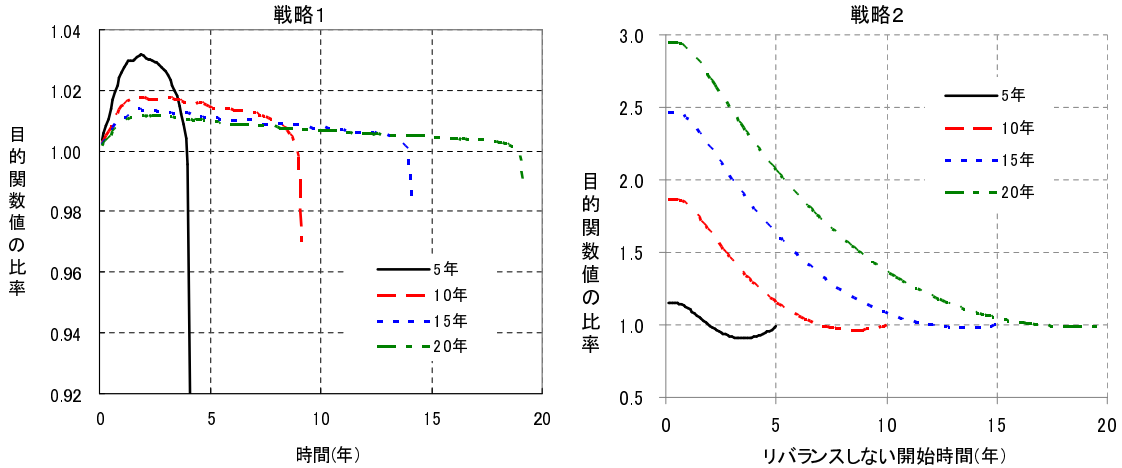


図 21: 2種類の戦略の評価

$$\begin{aligned}
 \text{関数 1 : } & w_{min}(t) = \alpha_{min} \{1 - \gamma e^{-\beta(T-t+1)\Delta t}\}, (t = 1, \dots, T) \\
 & w_{max}(t) = \alpha_{max} \{1 + \gamma e^{-\beta(T-t+1)\Delta t}\}, (t = 1, \dots, T) \\
 \text{関数 2 : } & w_{min}(t) = \alpha_{min} \{1 - \gamma e^{-\beta t \Delta t}\}, (t = 1, \dots, T) \\
 & w_{max}(t) = \alpha_{max} \{1 + \gamma e^{-\beta t \Delta t}\}, (t = 1, \dots, T)
 \end{aligned}$$

それぞれの関数のパラメータが $\beta = 2, \gamma = 0.5$ のときの乖離許容境界を図 22 の左図に示す。そして、 $\gamma = 0.5$ に固定し、 β をパラメトリックに変化させたときの目的関数値を図 22 の右図に示す。予想通り、関数 1 の目的関数の最小値は関数 2 よりも小さく、満期に近づくほど乖離許容幅が広がる関数 1 の形状の方がよいことが分かる。

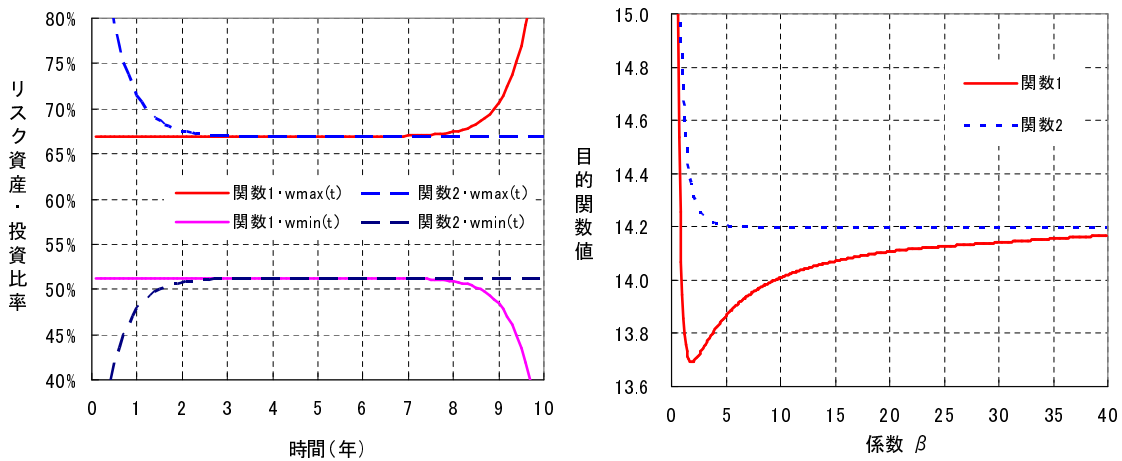


図 22: 乖離許容境界関数の評価

関数 1 のような関数のバリエーションは様々考えられる。ここでは、関数 1 に加えて^{††}、以下のべき関数とノンパラメトリック関数の 3 種類の関数を対象として、3.3 節の基本分析の設定を用いて、 $\Delta t = 0.5$ で期間長が 5 年、10 年の場合の問題を解く。

^{††} $T \rightarrow \infty$ のときに、一定値に収束するいくつかの指数関数に対して最適化計算を行ったが、ほぼ同じ結果が得られたので、比較対象としては示していない。

① べき関数

$$w_{min}(t) = \alpha_{min} \left[1 - \gamma \{(T - t + 1)\Delta t\}^{-\beta} \right], \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$w_{max}(t) = \alpha_{max} \left[1 + \gamma \{(T - t + 1)\Delta t\}^{-\beta} \right], \quad (t = 1, \dots, T)$$

② ノンパラメトリック関数：以下の条件を満たす関数

$$0 \leq w_{min}(1) \leq w_{max}(1) \leq 1$$

$$w_{min}(t) \geq w_{min}(t + 1), \quad (t = 1, \dots, T - 1)$$

$$w_{max}(t) \leq w_{max}(t + 1), \quad (t = 1, \dots, T - 1)$$

図 23 に最適乖離許容境界を示す．左図は 5 年，右図は 10 年の図である．関数 1(指数関数)，べき関数は α_{min} , α_{max} , β , γ ，ノンパラメトリック関数は $w_{min}(t)$, $w_{max}(t)$ ($t = 1, \dots, T$) を決定変数として，DFO 手法を用いて最適解を求めている．

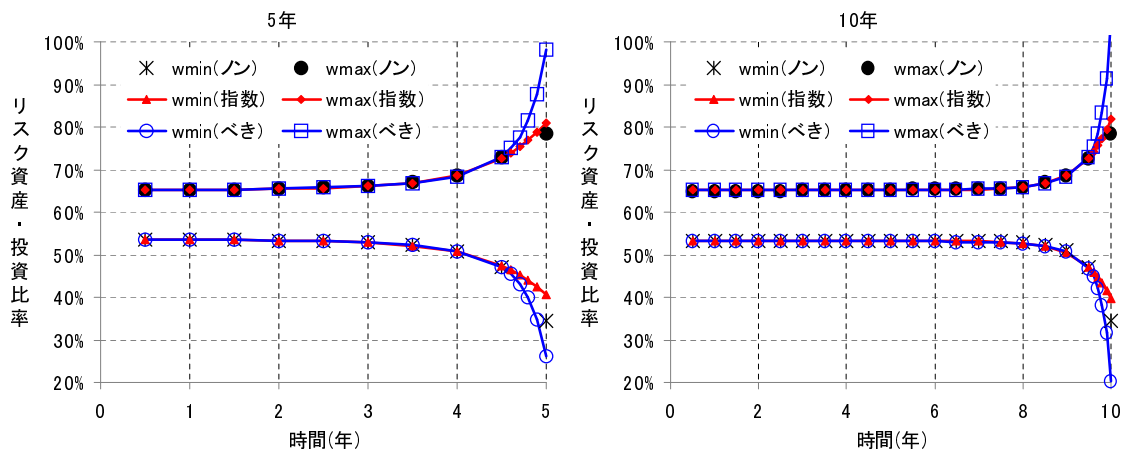


図 23: 最適乖離許容境界の比較

ノンパラメトリック関数は指数関数，べき関数に比べて，目的関数は小さいが，その改善率は 0.03% 程度であり，ほとんど同じである．図 23 を見ても，ほぼ同じである．ノンパラメトリック関数は形状の自由度は高いが，計算時間がかかり，期間数が大きくなると DFO 手法では対応しにくい．また，指数関数，べき関数ともにほとんどの場合，パラメータを変えることによって似た関数の形状を記述できるので，本研究では関数 1 の指数関数を用いる．

ところで， $w_{min}(t)$ と $w_{max}(t)$ に対して異なる β と γ を用いることもできる．実際に，3 節の基本分析の 16 種類の問題に対して計算を行ったが，すべてのケースで目的関数値はほとんど同じであり，その改善率は平均すると 0.003%，最大でも 0.008% の差しかなかった．一方，同じ β と γ を用いると，計算時間は約 60% になり，解の安定性も考えると，変数が少ない方がよいと判断し，乖離許容境界の上下限のいずれに対しても同じ β と γ を用いる．

枇々木 規雄

慶應義塾大学理工学部管理工学科

〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

E-mail: hibiki@ae.keio.ac.jp

ABSTRACT

OPTIMAL ASSET ALLOCATION WITH TRANSACTION COSTS
— DERIVATION OF THE OPTIMAL NO-TRADE REGION
USING DERIVATIVE FREE OPTIMIZATION —

Norio Hibiki
Keio University

Rei Yamamoto
*Mitsubishi UFJ Trust
Investment Technology Institute Co., Ltd.*

Takahito Tanabe
NTT DATA Mathematical Systems, Inc.

Yoshiya Imai

There are many academic studies of optimal asset allocation for determining the boundaries of the no-trade region and the optimal asset rebalancing strategy with transaction costs. These studies are treated as the stochastic control problem in a continuous-time setting. In this paper, we derive the no-trade region in a discrete time and finite horizon setting for the Leland model(1999) with the derivative free optimization which is the non-linear optimization method where the problems are solved without the derivative of the objective function. We describe the return distribution using the Monte Carlo method, and solve the problem minimizing the sum of the transaction costs and tracking errors. Specifically, we derive the optimal solutions which correspond to the parameters of the time-dependent function of the no-trade boundaries. In this type of the problem, the rebalancing rule is that assets are rebalanced when assets exceed the boundary of the no-trade region, while assets are not rebalanced within the no-trade region. Because of the rule, it is difficult to solve the problem using the well-known algorithm of the mathematical programming. Meanwhile, the problem goes well with the DFO method because the number of decision variables is relatively small, and the accurate solutions are not expected severely. In this paper, we test the usefulness of the DFO modeling for the Leland(1999) which formulates the model involving the trade-off between transaction costs and tracking errors. We compare the discrete time and finite horizon model with Leland(1999) which is the continuous time and infinite horizon model, using the same parameters as Leland(1999) for two-asset and three-asset cases. The characteristics of the DFO solutions in the discrete time and finite horizon model are as follows.

- The boundaries get away from the policy asset mix(the no-trade region becomes large) as the time to maturity gets small.
- The boundaries get close to the policy asset mix as the time interval becomes large.

We conduct the sensitivity analysis for some parameters, and clarify the features of the model. Moreover, the computation time can be reduced by about 30% by simplifying the model without the large increase in the objective function value.