

期限前償還リスクの期間構造と金利依存性を考慮した RMBS の価格付け

岸田 則生
株式会社エイファス
(現在 株式会社 AFG)

高山 靖敏
株式会社新生銀行

室町 幸雄
首都大学東京

(受理 2013 年 8 月 14 日; 再受理 2013 年 10 月 24 日)

和文概要 RMBS (Residential Mortgage-Backed Securities, 住宅ローン債権担保証券) は米国のサブプライムローン問題に端を発した世界金融危機以降も金融機関の長期投資の一端を担う重要な金融商品である。RMBS は通常の債券に比べて満期が長く、しかも利払が頻繁であることから、取引時やリスク管理、特に多様な環境下で価格計算を繰り返す必要があるリスク管理の分野において計算時間の短縮化が望まれている。本稿では、プリペイメント率が借入時点からの経過時間に関して期間構造を持ち、かつ将来の金利環境に依存することを考慮したときの RMBS の半解析的な価格を導出する。確率金利モデルとしては、将来の金利が負にならず、しかも現時点の金利期間構造を再現できる CIR++モデルと Quadratic Gaussian++モデルを採用する。また、プリペイメント率の金利感応度の経過時間依存性も考慮する。価格導出の技術的なポイントはフォワード中立化法と Feynman-Kac の定理の利用である。得られた価格はプリペイメント率の金利感応度に応じて 3 通りに分かれるが、どれも計算は容易でそのまま実務に適用可能である。

キーワード: 金融, RMBS(住宅ローン債権担保証券), プリペイメント, 期間構造, 金利依存性, 正金利モデル, ネガティブコンベキシティ

1. はじめに

RMBS (住宅ローン債権担保証券) とは住宅ローン債権から構成されるポートフォリオを裏付資産として発行される証券化商品で、ABS (資産担保証券) の一種である。米国のサブプライムローン問題に端を発する世界金融危機以降、国内外ともに証券化商品市場はひどく低迷しているが、日本証券業協会 [14] によると、国内の RMBS 発行額はここ数年安定的に推移しており、2010 年度には国内証券化商品発行額の約 75% を占めるに至っている。さらにその 90% 超は住宅金融支援機構が発行する債券であり、裏付けとなる住宅ローン (フラット 35) の利用拡大を背景に 2009 年度以降発行額が増大している。特に 2010 年度に住宅金融支援機構は証券化支援事業 (フラット 35) の推進および優良住宅の取得に対する支援 (フラット 35S) に力を入れ、毎月の発行額が 1,500 億円を超えるようになった [6]。この結果 2011 年 3 月 31 日現在での債券発行残高は全体で約 11.9 兆円となり、そのうち貸付債券担保債券が約 9 兆円を占めている [7]。これらの RMBS に対する格付機関の評価は高く、公庫時代に発行された住宅金融公庫債券と住宅金融支援機構債券は (株) 格付投資情報センターから AAA の評価を得ており^{*1}、証券化商品への投資に消極的な機関投資家も RMBS には相当な金額を投資している。

上述のように、RMBS は国内の証券化商品の中で重要な地位を占めており、金融機関にとっては長期投資の一端を担う金融商品となっている。一方、商品特性をみると、国債などの普通の債券とは異なり、RMBS には住宅ローン債務者によるプリペイメント (期限前償

^{*1}(株) 格付投資情報センターの 2011 年 8 月 31 日付のストラクチャードファイナンス格付による。

還) および債務者のデフォルト(債務不履行)という不確定要因が存在し、しかもその発生比率は経済環境の影響を受けるため、通常の債券と同様に扱うことは望ましくない。

このような認識から、従来からRMBSに関して多くの学術的・実務的な研究が行われてきたが、それらは1)プリペイメント率のデータ分析及びモデル化と、2)プリペイメントリスク(およびデフォルトリスク)を考慮したRMBSの価格付けやリスク評価に大別される。1)に関しては、さまざまな分析とそれに基づくプリペイメント率モデルが提案されている。実務ではPSAモデル、またその日本版であるPSJモデル^{*2}のようにプリペイメント率が経過期間の確定的な関数(具体的には直線)で与えられる単純なモデルが有名であるが、他にもさまざまなモデルが提案されており、例えば荒川[1]などがある。2)に関しては、モンテカルロ法、格子法、偏微分方程式などコンピュータを駆使した数値計算により精緻な価格付けを求める研究と、多少の単純化を行うことで価格の半解析解、可能であれば閉じた解を求める研究に分けられる。この分野で閉じた形の価格が求められる理由は、RMBSは通常の債券に比べて満期が長く、利払が頻繁であることから^{*3}、特に、多様な環境下で価格計算を繰り返す必要があるリスク管理の分野において計算時間の短縮化が望まれてきたためである。

本稿のテーマは、前段落の最後で述べたRMBSの価格の半解析解を求めることである。この分野では、例えば、Collin-Dufresne and Harding [3]は短期金利にVasicekモデルを仮定し、プリペイメント率を短期金利の一次関数で表現して、連続的な元利金払を行うRMBSの価格を示す半解析的な式を導出した。ここで半解析的としたのは、価格が時刻 t の確定的な関数の時間積分で表現されているからである^{*4}。Rom-Poulsen [17]は金利とプリペイメント率に多変量Affineモデルまたは多変量Quadratic Gaussianモデルを用いたときにRMBSの価格が満たす連立常微分方程式を導出し、それを数値的に解いてRMBS価格を求めた。Kolbe [12]はプリペイメント率をCIR過程に従う金利の一次関数で表現し、かつキャップとフロアーも設けたモデルを考案し、価格の近似式を導出した。また、Nakamura [13]は信用リスクでいう構造型モデルを用いた価格付けを提案し、RMBSの価格が積分方程式の解として表現されることを示した。山崎[20]は、RMBS価格の算出手法を限定せず、さまざまなプリペイメント率モデルを用いたときのRMBSの価格付けについてまとめ、特に、プリペイメント率の独自の期間構造と金利依存性の両方に着目したモデルについて広く言及した。

本稿では、山崎[20]の方向性に沿い、プリペイメント率が経過時間に関して期間構造を持ち、かつ金利環境に依存することを考慮して、確率金利モデルを用いたときのRMBSの半解析的な価格を導出する。使用する金利過程は、実務での利用に配慮して、将来の短期金利が負値にならず、しかも現在時点の金利期間構造と整合的になるようにBrigo and Mercurio [2]の方法で調整したCIR++モデルとQuadratic Gaussian++(QG++)モデルの2種類である。プリペイメント率は、確率金利に依存する項と独自の期間構造を持つ確率過程の和で表現することで、観測データとの整合性が高まるように配慮する。本論文の主な貢献は、2つの正金利モデル(CIR++モデルとQG++モデル)を用いたときのRMBS価格の半解析解の導出と金利感応度の期間構造の評価であるが、さらに実務の現実に即した応用についても提案する。

本稿の構成は以下である。2節では本稿で用いるRMBSのキャッシュフロー、プリペイメ

^{*2}例えば、日本証券業協会[15]を参照、山岸[19]や勝俣[8]などの関連レポートもある。

^{*3}機構債では満期はおよそ30年または35年、支払は月次である。

^{*4}本稿では、解が確定関数の積分で与えられるものを半解析的、閉じた解を解析的と呼んで区別する。

ント率, 金利のモデルについて述べる. 3 節では使用する確率金利モデルごとに RMBS の無裁定価格の半解析的を求め, 4 節では実務に即したモデルの応用について考察する. 5 節では提案モデルを用いた簡単な数値例を示し, 6 節でまとめる.

2. モデル

本節では, RMBS のキャッシュフローを定式化し, デリバティブの価格付け手法を用いると RMBS 価格がある形の条件付期待値の線形結合で表現できることを示す. 次に, 期限前償還というイベントの発生強度 (ハザード率) であるプリペイメント率 (期限前償還率) を金利と証券発行からの経過時間に依存する形で定式化し, さらに本稿で使用する確率金利モデル CIR++モデルと Quadratic Gaussian++ (QG++) モデルについて述べる.

2.1. RMBS のキャッシュフローと無裁定価格

まず, 山崎 [20] に従って RMBS のキャッシュフローを定式化する. 時刻を $t, t \geq 0$ で表し, RMBS の満期を $T > t$ とする. 以下では, 特に断らない限り t は現在時刻とし, キャッシュフローは将来の元利金支払時点 $t_i > t, i = 1, \dots, m, t_m = T$ 以外では発生しないものとする. また, 期限前償還もデフォルトもないと仮定したときの時刻 t_i における残存元本を $M(t_i)$, 利息額を $I(t_i)$ とし, これらは現時点 t において既知とする. さらに, 実際の残存元本を $M^*(t_i)$, 元本償還額を $P^*(t_i)$, 利息額を $I^*(t_i)$, $S(t_i) = M^*(t_i)/M(t_i)$ を生存率と定義すると, 時刻 t_i におけるキャッシュフロー $CF(t_i)$ は,

$$\begin{aligned} CF(t_i) &= M^*(t_{i-1}) - M^*(t_i) + I^*(t_i) = M(t_{i-1})S(t_{i-1}) - M(t_i)S(t_i) + I(t_i)S(t_{i-1}) \\ &= (M(t_{i-1}) + I(t_i))S(t_{i-1}) - M(t_i)S(t_i) \end{aligned} \quad (2.1)$$

で与えられる*5.

ある十分先の時刻 $T^* \geq T$ までリスク中立確率 \tilde{P} がただ一つ存在すると仮定すると, リスク中立化法より, この RMBS の時刻 t における無裁定価格 $Price(t)$ は,

$$Price(t) = \sum_{i=1}^m \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} CF(t_i) \right] \quad (2.2)$$

で与えられる. ただし, $r(t)$ は時刻 t におけるリスクフリーな瞬間的な短期金利, $\tilde{E}_t[\cdot]$ は \tilde{P} のもとにおける時刻 t の条件付期待値演算子である. 時刻 t において $M(t_i)$ と $I(t_i)$ は既知なので, (2.1) と (2.2) より,

$$\begin{aligned} Price(t) &= \sum_{i=1}^m (M(t_{i-1}) + I(t_i)) \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} S(t_{i-1}) \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^m M(t_i) \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} S(t_i) \right] \end{aligned}$$

となるので, RMBS の価格 $Price(t)$ は関数

$$V(t, t_1, t_2) = \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_2} r(s) ds \right\} S(t_1) \right], \quad t \leq t_1 \leq t_2 \quad (2.3)$$

の線形結合で表現できる.

*5 ここでは $M(t_i)$ や $I(t_i)$ を一般的に扱ったが, 具体的な表現については山崎 [20] を参照されたい.

2.2. プリペイメント率過程と無裁定価格

志立 [18] などでも指摘されているように、プリペイメント（期限前償還）の発生確率は、1) 借入時点からの経過年数、2) 借入金利とその時点における金利の差に依存すると考えられる。そこで本稿では、時刻 t における生存率 $S(t)$ との間に

$$S(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \tilde{h}(s) ds \right\}, \quad 0 \leq t \leq T^*$$

という関係が成り立つ確率過程 $\tilde{h}(t)$ をリスク中立確率 \tilde{P} のもとにおけるプリペイメント率（期限前償還率）と定義し、 $\tilde{h}(t)$ は、 $0 \leq t \leq T^*$ において

$$\tilde{h}(t) = \lambda(t)(L(t) - r(t)) + \tilde{g}(t) \quad (2.4)$$

$$d\tilde{g}(t) = (\psi(t) - b\tilde{g}(t))dt + \eta(t)d\tilde{z}_g(t) \quad (2.5)$$

に従うと仮定する^{*6}。ただし、 $\lambda(t)$ 、 $L(t)$ 、 $\psi(t)$ 、 $\eta(t)$ は時刻 t の確定的な関数、 b は正定数、 $\tilde{z}_g(t)$ は \tilde{P} のもとにおける標準ブラウン運動で、 $\tilde{z}_g(t)$ と $r(t)$ は独立とする。ここで、(2.4) の右辺第 2 項 $\tilde{g}(t)$ はプリペイメント率に固有の経年依存性（期間構造）を表す確率過程である^{*7}。一方、(2.4) の右辺第 1 項はプリペイメント率の金利依存性を表し、 $\lambda(t)$ は金利感応度、 $L(t)$ は金利の影響を考える際の基準金利である。志立 [18] などが指摘した金利感応度の経年変化を考慮するため、これらは時刻 t の確定的な関数としている。本稿では、特に $\lambda(t)$ を期間ごとに一定値をとる区分的定数関数としてモデル化する。すなわち、時刻列 $\{s_i\}_{i=0, \dots, m}$ 、 $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T^*$ 、 λ_i 、 $i = 1, \dots, m$ をそれぞれ定数として、

$$\lambda(t) = \lambda_i, \quad t \in [s_{i-1}, s_i) \quad (2.6)$$

と表現する。 $\{s_i\}_{i=0, \dots, m}$ は金利感応度 $\lambda(t)$ の値が変わる時刻（経過年数）である。

(2.5) より、

$$\tilde{g}(s) = \tilde{g}(t)e^{-b(s-t)} + \int_t^s \psi(u)e^{-b(s-u)}du + \int_t^s \eta(u)e^{-b(s-u)}d\tilde{z}_g(u), \quad 0 \leq t \leq s \leq T$$

なので、 $\tilde{g}(t)$ が与えられたとき、 $\tilde{g}(s)$ は条件付平均 $\mu_g(t, s)$ 、条件付分散 $S_g(t, s)$ の正規分布に従う。ただし、

$$\mu_g(t, s) = \tilde{g}(t)e^{-b(s-t)} + \int_t^s \psi(u)e^{-b(s-u)}du, \quad S_g(t, s) = \int_t^s \eta^2(u)e^{-2b(s-u)}du$$

である。時刻 t の確定関数 $\psi(t)$ と $\eta(t)$ を適切に選択することにより、実績データの分析から得られるプリペイメント率の平均と分散の期間構造を反映したモデルを構築できる。

^{*6}多くの既存研究、例えば山崎 [20] では $\lambda(t)$ 、 $L(t)$ 、 $\psi(t)$ は定数なので、これはその拡張版になっている。

^{*7}(2.5) は金利モデルとして有名な Hull and White モデルと同じ形をしている。Hull and White モデルは観測時の金利期間構造を正確に再現することができるので、ここでも Hull and White モデルを使うことにより、過去の実績データから推定される $\tilde{g}(t)$ の期間構造をモデルに正確に反映できるようにしている。ただし、実務的に有益でない一般化を避けるため、 b は時刻に依存しない定数とした。なお、将来の $\tilde{g}(t)$ は正規分布に従うため、正の確率で負値をとる。この影響については 6 節で簡単に触れる。

このプリペイメント率モデルを用いると、(2.3) で与えられる関数 $V(t, t_1, t_2)$ は、

$$\begin{aligned} V(t, t_1, t_2) &= \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_2} r(s) ds \right\} \exp \left\{ - \int_t^{t_1} \tilde{h}(s) ds \right\} \right] \\ &= \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} \tilde{g}(s) ds \right\} \right] \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_2} r(s) ds \right\} \exp \left\{ - \int_t^{t_1} \lambda(s)(L(s) - r(s)) ds \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる*8。ここで、

$$G(t, s) \equiv \int_t^s \tilde{g}(u) du = \tilde{g}(t) \frac{1 - e^{-b(s-t)}}{b} + \int_t^s \psi(u) \frac{1 - e^{-b(s-u)}}{b} du + \int_t^s \eta(u) \frac{1 - e^{-b(s-u)}}{b} d\tilde{z}_g(u)$$

なので、 $\tilde{g}(t)$ が与えられたときの $G(t, s)$ は条件付平均 $\mu_G(t, s)$ 、条件付分散 $S_G(t, s)$

$$\mu_G(t, s) = \tilde{g}(t) \frac{1 - e^{-b(s-t)}}{b} + \int_t^s \psi(u) \frac{1 - e^{-b(s-u)}}{b} du, \quad S_G(t, s) = \int_t^s \eta^2(u) \left(\frac{1 - e^{-b(s-u)}}{b} \right)^2 du$$

の正規分布に従う。これより、

$$\tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^s \tilde{g}(u) du \right\} \right] = \tilde{E}_t [\exp \{-G(t, s)\}] = \exp \left\{ -\mu_G(t, s) + \frac{1}{2} S_G(t, s) \right\} \quad (2.8)$$

が得られる。また、満期 t_2 のフォワード中立確率 P^{t_2} を考えてフォワード中立化法を使うと、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_2} r(s) ds \right\} \exp \left\{ - \int_t^{t_1} \lambda(s)(L(s) - r(s)) ds \right\} \right] \\ = P(t, t_2) E_t^{t_2} \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} \lambda(s)(L(s) - r(s)) ds \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

と書ける。ここで、 $P(t, T)$ は時刻 t における満期 $T \geq t$ の割引債価格、 $E_t^T[\cdot]$ はフォワード中立確率 P^T のもとにおける時刻 t の条件付期待値演算子である。(2.7)、(2.8)、(2.9) より、

$$V(t, t_1, t_2) = \exp \left\{ -\mu_G(t, t_1) + \frac{1}{2} S_G(t, t_1) \right\} P(t, t_2) E_t^{t_2} \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} \lambda(s)(L(s) - r(s)) ds \right\} \right] \quad (2.10)$$

となるので、関数

$$W(t, t_1, t_2) \equiv E_t^{t_2} \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} \lambda(s)(L(s) - r(s)) ds \right\} \right] \quad (2.11)$$

の解析的表現が得られれば、RMBS の無裁定価格は短時間で計算できる。

*8Kolbe [12] も同様の設定のもとで類似した議論を展開しているが、議論の対象は $t_1 = t_2$ の場合だけであり、RMBS の価格付けに必要な一般形 (2.7) は扱っていない。

2.3. 金利過程

RMBS の価格付けにおける確率金利の影響を解析的に見積もる際には、Vasicek モデルや Hull and White モデルなど正規分布に従う短期金利モデルが用いられることが多い。例えば、山崎 [20] ではプリペイメント率を短期金利の一次関数、金利過程を Vasicek モデルとするモデルについて議論した。しかし、これらのモデルでは将来の短期金利が正規分布に従い、正の確率で負の金利が発生するため理論的にも実務的にも好ましくない。そこで本稿では、将来の短期金利が非負になる Cox, Ingersol and Ross [4] の CIR モデルと Pelsser [16] の Quadratic Gaussian モデルを採用し、さらに価格評価時点における金利期間構造を再現できるようにするために Brigo and Mercurio [2] の手法による拡張を行う。本稿では、これらのモデルをそれぞれ CIR++モデル、Quadratic Gaussian++モデル (QG++モデル) と呼ぶ。

2.3.1. CIR++モデル

リスク中立確率 \tilde{P} のもとで、時刻 t , $0 \leq t \leq T^*$ におけるリスクフリーな瞬間的な短期金利 $r(t)$ が

$$dy(t) = a(\bar{y} - y(t))dt + \sigma\sqrt{y(t)}d\tilde{z}(t), \quad y(0) = y_0 \quad (2.12)$$

$$r(t) = y(t) + \phi(t) \quad (2.13)$$

に従うと仮定する。ただし、 a, σ, \bar{y}, y_0 は正定数、 $\tilde{z}(t)$ は \tilde{P} のもとにおける $\tilde{z}_g(t)$ と独立な標準ブラウン運動で、 $\phi(t)$ は時刻 t の確定的な関数とする。木島 [9] を参考にすると、満期 T の割引債の時刻 t , $t \leq T$ における価格は、

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T \phi(s)ds + A(t, T) + B(t, T)y(t) \right\} \quad (2.14)$$

で与えられる。ただし、

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

$$B(t, T) = - \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(a + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \quad (2.15)$$

$$A(t, T) = \frac{2a\bar{y}}{\sigma^2} \log \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(a + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right] \quad (2.16)$$

である。(2.14) より、割引債の価格過程として

$$d \log P(t, T) = \left\{ \phi(t) + \left(1 - \frac{\sigma^2 B^2(t, T)}{2} \right) y(t) \right\} dt + \sigma B(t, T) \sqrt{y(t)} d\tilde{z}(t) \quad (2.17)$$

が得られる。ここで満期 T のフォワード中立確率を P^T とすると、 P^T のもとにおける標準ブラウン運動 $z^T(t)$ は、 $\log P(t, T)$ の従う確率微分方程式の拡散係数 $\sigma_P(t, T)$ を用いて

$$dz^T(t) = d\tilde{z}(t) - \sigma_P(t, T)dt$$

で与えられるので、(2.17) より、

$$dz^T(t) = d\tilde{z}(t) - \sigma B(t, T) \sqrt{y(t)} dt \quad (2.18)$$

である。(2.12), (2.13), (2.18) より、フォワード中立確率 P^T のもとで $y(t)$, $r(t)$ は

$$dy(t) = [a\bar{y} + (\sigma^2 B(t, T) - a)y(t)]dt + \sigma\sqrt{y(t)}dz^T(t), \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.19)$$

$$r(t) = y(t) + \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.20)$$

に従う。

2.3.2. QG++モデル

本稿では Kijima et al.[11] の設定に従い、リスク中立確率 \tilde{P} のもとで、時刻 $t, 0 \leq t \leq T^*$ におけるリスクフリーな瞬間的な短期金利 $r(t)$ が

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma d\tilde{z}(t), \quad x(0) = 0 \quad (2.21)$$

$$r(t) = (x(t) + \alpha + \beta t)^2 + \phi(t) \quad (2.22)$$

に従うと仮定する。ただし、 a, σ は正定数、 α, β は定数、 $\tilde{z}(t)$ は \tilde{P} のもとにおける $\tilde{z}_g(t)$ と独立な標準ブラウン運動で、 $\phi(t)$ は時刻 t の確定的な関数とする。Kijima et al.[11] によると、満期 T の割引債の時刻 $t, t \leq T$ における価格は、

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T \phi(s) ds + A_Q(t, T) - B_Q(t, T)x(t) - C_Q(t, T)x^2(t) \right\} \quad (2.23)$$

で与えられる。ただし、

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

$$F(t, T) = \frac{2\gamma e^{\gamma(T-t)}}{(\gamma + a)e^{2\gamma(T-t)} + \gamma - a}$$

$$C_Q(t, T) = \frac{e^{2\gamma(T-t)} - 1}{(\gamma + a)e^{2\gamma(T-t)} + \gamma - a}$$

$$B_Q(t, T) = 2F(t, T) \int_t^T \frac{\alpha + \beta s}{F(s, T)} ds = \frac{2B_1(t, T)}{\gamma^2 A_5(t, T)}$$

$$\begin{aligned} A_Q(t, T) &= \int_t^T \left(\frac{1}{2} \sigma^2 B_Q(s, T)^2 - \sigma^2 C_Q(s, T) - (\alpha + \beta s)^2 \right) ds \\ &= -\sigma^2 \left(\frac{A_4(t, T)}{\gamma^5 A_5(t, T)} + A_6(t, T) \right) - \alpha^2(T-t) - \alpha\beta(T^2 - t^2) - \frac{1}{3}\beta^2(T^3 - t^3) \end{aligned}$$

$$\Gamma_a = \gamma - a$$

$$\Gamma_b = \gamma + a$$

$$A_{1a}(t, T) = -e^{\gamma(T-t)} + 4 - e^{-\gamma(T-t)}(3 + 2\gamma(T-t))$$

$$A_{1b}(t, T) = e^{-\gamma(T-t)} - 4 + e^{\gamma(T-t)}(3 - 2\gamma(T-t))$$

$$A_{2a}(t, T) = e^{\gamma(T-t)}(1 - \gamma T) - 2(1 - \gamma(t+T)) + e^{-\gamma(T-t)}(1 - \gamma(2t+T) + \gamma^2(t^2 - T^2))$$

$$A_{2b}(t, T) = e^{-\gamma(T-t)}(1 + \gamma T) - 2(1 + \gamma(t+T)) + e^{\gamma(T-t)}(1 + \gamma(2t+T) + \gamma^2(t^2 - T^2))$$

$$A_{3a}(t, T) = -4\gamma t(1 - \gamma T) - e^{\gamma(T-t)}(1 - \gamma T)^2$$

$$+ e^{-\gamma(T-t)} \left(1 + 2\gamma t - \gamma^2(2t^2 + T^2) + \frac{2}{3}\gamma^3(t^3 - T^3) \right)$$

$$A_{3b}(t, T) = -4\gamma t(1 + \gamma T) + e^{-\gamma(T-t)}(1 + \gamma T)^2$$

$$+ e^{\gamma(T-t)} \left(-1 + 2\gamma t + \gamma^2(2t^2 + T^2) + \frac{2}{3}\gamma^3(t^3 - T^3) \right)$$

$$A_4(t, T) = \Gamma_a(\alpha^2 \gamma^2 A_{1a}(t, T) + 2\alpha\beta\gamma A_{2a}(t, T) + \beta^2 A_{3a}(t, T))$$

$$+ \Gamma_b(\alpha^2 \gamma^2 A_{1b}(t, T) + 2\alpha\beta\gamma A_{2b}(t, T) + \beta^2 A_{3b}(t, T))$$

$$\begin{aligned}
A_5(t, T) &= \Gamma_a e^{-\gamma(T-t)} + \Gamma_b e^{\gamma(T-t)} \\
A_6(t, T) &= -\frac{1}{2}(T-t)(\Gamma_a^{-1} - \Gamma_b^{-1}) + \frac{1}{2\gamma}(\Gamma_a^{-1} + \Gamma_b^{-1}) \log \frac{A_5(t, T)}{2\gamma} \\
B_1(t, T) &= -\alpha\gamma(e^{-\gamma T} - e^{-\gamma t})(\Gamma_a e^{\gamma t} + \Gamma_b e^{\gamma T}) \\
&\quad + \beta(\Gamma_a e^{-\gamma(T-t)}(1-\gamma t) + \Gamma_b e^{\gamma(T-t)}(1+\gamma t) - \Gamma_a(1-\gamma T) - \Gamma_b(1+\gamma T))
\end{aligned}$$

である。また、2.3.1節と同様にして、フォワード中立測度 P^T のもとで $x(t)$, $r(t)$ は

$$dx(t) = \mu_x(t)dt + \sigma dz^T(t), \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad x(0) = 0 \quad (2.24)$$

$$\mu_x(t) = -\sigma^2 B_Q(t, T) - (a + 2\sigma^2 C_Q(t, T))x(t) \quad (2.25)$$

$$r(t) = (x(t) + \alpha + \beta t)^2 + \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.26)$$

に従うことが導出できる。なお、使用する金利モデルによりフォワード中立確率はそれぞれ異なるが、本稿では共通の記号 P^T を用いて表現する。

3. RMBS の価格式

本節では、金利過程に CIR++ モデルまたは QG++ モデルを用いたときの RMBS の価格式、具体的には (2.11) で与えられる関数 $W(t, t_1, t_2)$ の解析的表現を求める。ただし、以下では解の引数から t_1 と t_2 を省略し、区間 $[s_{i-1}, s_i]$ における解を $W(t, y(t); i)$ または $W(t, x(t); i)$ と書く。

3.1. CIR++ モデルにおける価格式

Feynman-Kac の定理を用いると、(2.11), (2.19), (2.20) より、解 $W(t, y(t); i)$ は、時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \dots, m$ において、

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \{a\bar{y} + (\sigma^2 B(t, t_2) - a)y(t)\} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\sigma^2 y(t)}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \lambda_i [L(t) - y(t) - \phi(t)] W \quad (3.1)$$

を満たす。ここで、

$$\log W(t, y(t); i) = C_0(t; i) - C_1(t; i)y(t)$$

とにおいて (3.1) に代入すると、時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$, $s_{i-1} < t_1$ における連立常微分方程式

$$\frac{dC_1(t; i)}{dt} = \frac{\sigma^2}{2} C_1^2(t; i) - (\sigma^2 B(t, t_2) - a)C_1(t; i) + \lambda_i \quad (3.2)$$

$$\frac{dC_0(t; i)}{dt} = a\bar{y}C_1(t; i) + \lambda_i(L(t) - \phi(t)) \quad (3.3)$$

が得られる。一方、 $t = t_1$ を含む区間を示すために $m = \{i \in \mathcal{N} : t_1 \in [s_{i-1}, s_i]\}$ (\mathcal{N} は自然数の集合) を定義すると、(3.1) の境界条件は $W(t_1, y(t_1); m) = 1$ なので、(3.2) と (3.3) に対する境界条件は、

$$C_0(t_1; m) = C_1(t_1; m) = 0 \quad (3.4)$$

で与えられる。

以下では、区間ごとに係数 λ_i が変化する連立常微分方程式 (3.2), (3.3) を境界条件 (3.4) をもとに時間的に後ろから前に向かって解くことを考える。そのために、区間ごとに与えられる境界条件を一般化し、時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$, $s_i \leq t_1$ における境界条件は、 $t \in [s_i, s_{i+1}]$ で既知の関数 $C_0(t; i+1)$, $C_1(t; i+1)$ を用いて、

$$C_0(s_i; i) = C_0(s_i; i+1) \quad (3.5)$$

$$C_1(s_i; i) = C_1(s_i; i+1) \quad (3.6)$$

と表現し、時刻 $t \in [s_{i-1}, t_1]$, $s_{i-1} \leq t_1 < s_i$ における境界条件は (3.4) で表現する。

上述の連立常微分方程式 (3.2), (3.3) は標準的な手法で解くことができ^{*9}、解は

$$H_i \equiv \lambda_i - 1 - \frac{a^2}{2\sigma^2} \quad (3.7)$$

の符号により異なる。結果のみ示すと、時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$ における解は、

$$C_1(t; i) = Y(t; i) + B(t, t_2) - \frac{a}{\sigma^2}$$

$$C_0(t; i) = C_0(s_i; i+1) + Z(t; i) + \frac{a^2 \bar{y}}{\sigma^2} (s_i - t) + A(s_i, t_2) - A(t, t_2) + \lambda_i \int_{s_i}^t (L(v) - \phi(v)) dv$$

で与えられる。ただし、

1. $H_i < 0$ のとき、

$$Y(t; i) = \frac{\gamma'_i}{\sigma^2} \left(\frac{2Q_i e^{\gamma'_i (s_i - t)}}{Q_i e^{\gamma'_i (s_i - t)} - R_i} - 1 \right)$$

$$Z(t; i) = \frac{2a\bar{y}}{\sigma^2} \log \left(\frac{Q_i - R_i}{Q_i e^{\gamma'_i (s_i - t)} - R_i} \right) + \frac{a\bar{y}\gamma'_i}{\sigma^2} (s_i - t)$$

2. $H_i = 0$ のとき、

$$Y(t; i) = \frac{2}{\sigma^2} \times \frac{\sigma^2 C_1(s_i; i+1) + a - \sigma^2 B(s_i, t_2)}{2 + (\sigma^2 C_1(s_i; i+1) + a - \sigma^2 B(s_i, t_2)) (s_i - t)}$$

$$Z(t; i) = \frac{2a\bar{y}}{\sigma^2} \log \left| \frac{2}{2 + (\sigma^2 C_1(s_i; i+1) + a - \sigma^2 B(s_i, t_2)) (s_i - t)} \right|$$

3. $H_i > 0$ のとき、

$$Y(t; i) = \frac{2\gamma''_i}{\sigma^2} \times \frac{(\sigma^2 C_1(s_i; i+1) + a - \sigma^2 B(s_i, t_2)) - 2\gamma''_i \tan(\gamma''_i (s_i - t))}{2\gamma''_i + (\sigma^2 C_1(s_i; i+1) + a - \sigma^2 B(s_i, t_2)) \tan(\gamma''_i (s_i - t))}$$

$$Z(t; i) = \frac{2a\bar{y}}{\sigma^2} \log \left| \frac{2\gamma''_i}{2\gamma''_i \cos(\gamma''_i (s_i - t)) + (\sigma^2 C_1(s_i; i+1) + a - \sigma^2 B(s_i, t_2)) \sin(\gamma''_i (s_i - t))} \right|$$

であり、

$$\gamma'_i = \sigma \sqrt{-2H_i} = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2(1 - \lambda_i)}$$

$$Q_i = \sigma^2 C_1(s_i; i+1) - \sigma^2 B(t_1, t_2) + a + \gamma'_i$$

$$R_i = \sigma^2 C_1(s_i; i+1) - \sigma^2 B(t_1, t_2) + a - \gamma'_i$$

$$\gamma''_i = \frac{\sigma \sqrt{H_i}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\lambda_i - 1}{2} \sigma^2 - \frac{a^2}{4}}$$

である。

^{*9}付録 A に解を得るまでの道筋を簡単に示す。

3.2. QG++モデルにおける価格式

Feynman-Kac の定理を用いると, (2.11), (2.24), (2.26) より, 解 $W(t, x(t); i)$ は, 時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \dots, m$ において,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mu_x(t) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \lambda_i [L(t) - (x(t) + \alpha + \beta t)^2 - \phi(t)] W \quad (3.8)$$

を満たす. ここで,

$$\log W(t, x(t); i) = C_{Q0}(t; i) - C_{Q1}(t; i)x(t) - C_{Q2}(t; i)x^2(t)$$

とにおいて (3.8) に代入すると, 時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$, $s_{i-1} < t_1$ における連立常微分方程式

$$\frac{dC_{Q2}(t; i)}{dt} = 2(a + 2\sigma^2 C_Q(t, t_2))C_{Q2}(t; i) + 2\sigma^2 C_{Q2}^2(t; i) + \lambda_i \quad (3.9)$$

$$\frac{dC_{Q1}(t; i)}{dt} = (a + 2\sigma^2 C_Q(t, t_2) + 2\sigma^2 C_{Q2}(t; i))C_{Q1}(t; i) + 2\sigma^2 B_Q(t, t_2)C_{Q2}(t; i) + 2\lambda_i(\alpha + \beta t) \quad (3.10)$$

$$\frac{dC_{Q0}(t; i)}{dt} = -\sigma^2 B_Q(t, t_2)C_{Q1}(t; i) - \frac{\sigma^2}{2}(C_{Q1}^2(t; i) - 2C_{Q2}(t; i)) + \lambda_i [L(t) - (\alpha + \beta t)^2 - \phi(t)] \quad (3.11)$$

が得られる. 一方, (3.8) の境界条件は $W(t_1, x(t_1); m) = 1$ なので, (3.9)–(3.11) に対する境界条件は,

$$C_{Q0}(t_1; m) = C_{Q1}(t_1; m) = C_{Q2}(t_1; m) = 0 \quad (3.12)$$

で与えられる.

以下でも 3.1 節と同様に, 区間ごとに係数 λ_i が変化する連立常微分方程式 (3.9)–(3.11) を境界条件 (3.12) をもとに時間的に後ろから前に向かって解くことを考える. そのために, 区間ごとに与えられる境界条件を一般化し, 時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$, $s_i \leq t_1$ における境界条件は, $t \in [s_i, s_{i+1}]$ で既知の関数 $C_{Q0}(t; i+1)$, $C_{Q1}(t; i+1)$, $C_{Q2}(t; i+1)$ を用いて,

$$C_{Q0}(s_i; i) = C_{Q0}(s_i; i+1) \quad (3.13)$$

$$C_{Q1}(s_i; i) = C_{Q1}(s_i; i+1) \quad (3.14)$$

$$C_{Q2}(s_i; i) = C_{Q2}(s_i; i+1) \quad (3.15)$$

で表現し, 時刻 $t \in [s_{i-1}, t_1]$, $s_{i-1} \leq t_1 < s_i$ における境界条件は (3.12) で表現する.

上述の連立常微分方程式 (3.9)–(3.11) は 3.1 節の場合と同様にして解くことができ*¹⁰, 解は (3.7) で定義される H_i の符号により異なる. ここでも結果のみ示すと, 時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$ における解は,

$$\begin{aligned} C_{Q2}(t, t_1, t_2) &= Y_Q(t; i) - C_Q(t, t_2) - \frac{a}{2\sigma^2} \\ C_{Q0}(t; i) &= C_{Q0}(s_i; i+1) \\ &+ \int_t^{s_i} \left[\sigma^2 B_Q(s, t_2) C_{Q1}(s; i) + \frac{\sigma^2}{2} (C_{Q1}^2(s; i) - 2C_{Q2}(s; i)) \right] ds \\ &+ \lambda_i \left[\alpha^2 (s_i - t) + \alpha \beta (s_i^2 - t^2) + \frac{1}{3} \beta^2 (s_i^3 - t^3) \right] - \lambda_i \int_t^{s_i} \{L(s) - \phi(s)\} ds \end{aligned}$$

で与えられる. ただし,

*¹⁰ 付録 B に解を得るまでの道筋を簡単に示す.

1. $H_i < 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 Y_Q(t; i) &= \frac{\gamma'_i}{2\sigma^2} \left[\frac{2Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)}}{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} - R_{Q,i}} - 1 \right] \\
 C_{Q1}(t; i) &= \frac{2\gamma'_i(C_{Q1}(s_i; i+1) + B_Q(s_i, t_2))}{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} - R_{Q,i}} e^{\gamma'_i(s_i-t)} - B_Q(t, t_2) \\
 &\quad - \frac{2(\lambda_i - 1)}{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} - R_{Q,i}} \times \left\{ \alpha \frac{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} + R_{Q,i} - (Q_{Q,i} + R_{Q,i})e^{\gamma'_i(s_i-t)}}{\gamma'_i} \right. \\
 &\quad \left. + \beta \frac{t(Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} + R_{Q,i}) - s_i(Q_{Q,i} + R_{Q,i})e^{\gamma'_i(s_i-t)}}{\gamma'_i} \right. \\
 &\quad \left. + \beta \frac{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} - R_{Q,i} - 2\gamma'_i e^{\gamma'_i(s_i-t)}}{\gamma_i'^2} \right\}
 \end{aligned}$$

2. $H_i = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 Y_Q(t; i) &= \frac{C_{Q2}(s_i; i+1) + C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2\sigma^2}}{2\sigma^2 (C_{Q2}(s_i; i+1) + C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2\sigma^2}) (s_i - t) + 1} \\
 C_{Q1}(t; i) &= \frac{1}{2} \frac{C_{Q1}(s_i; i+1) + B_Q(s_i, t_2)}{L_i(s_i - t) + \frac{1}{2}} - B_Q(t, t_2) \\
 &\quad - 2(\lambda_i - 1)(s_i - t) \left[\frac{\alpha}{2} + \beta \frac{s_i + 2t}{6} + \frac{3\alpha + \beta(2s_i + t)}{12(L_i(s_i - t) + \frac{1}{2})} \right]
 \end{aligned}$$

3. $H_i > 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 Y(t; i) &= \frac{\gamma''_i}{\sigma^2} \left[\frac{\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + \sigma^2 C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2} - \gamma''_i \tan(2\gamma''_i(s_i - t))}{\gamma''_i + (\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + \sigma^2 C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2}) \tan(2\gamma''_i(s_i - t))} \right] \\
 C_{Q1}(t; i) &= \left| \frac{\gamma''_i (C_{Q1}(s_i; i+1) + B_Q(s_i, t_2))}{\gamma''_i \cos(2\gamma''_i(s_i - t)) + (\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + \sigma^2 C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2}) \sin(2\gamma''_i(s_i - t))} \right| \\
 &\quad - B_Q(t, t_2) - 2(\lambda_i - 1)\eta_i \int_t^{s_i} (\alpha + \beta v) |\sin(2\gamma''_i(s_i - v) + \zeta_i)| dv \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}
 \gamma'_i &= \sigma \sqrt{-2H_i} = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2(1 - \lambda_i)} \\
 Q_{Q,i} &= 2\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + 2\sigma^2 C_Q(t_1, t_2) + a + \gamma'_i \\
 R_{Q,i} &= 2\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + 2\sigma^2 C_Q(t_1, t_2) + a - \gamma'_i \\
 L_i &= \sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + \sigma^2 C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2} \\
 \gamma''_i &= \frac{\sigma \sqrt{H_i}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\lambda_i - 1}{2} \sigma^2 - \frac{a^2}{4}} \\
 \eta_i &= \frac{\sqrt{(\gamma''_i)^2 + (\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + \sigma^2 C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2})^2}}{|\gamma''_i \cos(2\gamma''_i(s_i - t)) + (\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + \sigma^2 C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2}) \sin(2\gamma''_i(s_i - t))|} \\
 \zeta_i &= \arctan \left(\frac{\gamma''_i}{\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + \sigma^2 C_Q(s_i, t_2) + \frac{a}{2}} \right), \quad 0 \leq \zeta_i \leq \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

である。

注 3.1. (3.16) は最後の積分の積分範囲に依存する. 例えば, 積分範囲で絶対値符号の中が常に非負ならば,

$$\begin{aligned} & \int_t^{s_i} (\alpha + \beta v) |\sin(2\gamma_i''(s_i - v) + \zeta_i)| dv \\ &= \frac{\alpha}{2\gamma_i''} (\cos(\zeta_i) - \cos(2\gamma_i''(s_i - t) + \zeta_i)) + \frac{\beta}{2\gamma_i''} [s_i \cos(\zeta_i) - t \cos(2\gamma_i''(s_i - t) + \zeta_i)] \\ & \quad + \frac{\beta}{(2\gamma_i'')^2} [\sin(\zeta_i) - \sin(2\gamma_i''(s_i - t) + \zeta_i)] \end{aligned}$$

となる.

4. 実務への応用

前節の結果を踏まえて, 本節ではより実務に即した応用について提案する.

4.1. プリペイメント率が長期金利に依存する場合

前節まではプリペイメント率 $\tilde{h}(t)$ が瞬間的な短期金利 $r(t)$ に依存するモデルを考察したが, 実際の期限前償還を引き起こす重要な要因である借換はその時点における借換金利に依存すると考えられるので, $\tilde{h}(t)$ は長期金利の関数として表現するほうが望ましい. そこで本項では, リスク中立確率 \tilde{P} のもとにおけるプリペイメント率 $\tilde{h}(t)$ が時刻 t における期間 τ の長期金利 $R(t, \tau)$ (ただし, 取り扱いを簡単にするためゼロレート^{*11}とする) の一次関数

$$\tilde{h}(t) = \lambda(t)(L(t) - R(t, \tau)) + \tilde{g}(t), \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (4.1)$$

に従うと仮定する.

まず, CIR++モデルを用いた場合を考える. (2.14) より,

$$R(t, \tau) = -\frac{1}{\tau} \log P(t, t + \tau) = -\frac{1}{\tau} \left[-\int_t^{t+\tau} \phi(s) ds + A(t, t + \tau) + B(t, t + \tau)y(t) \right] \quad (4.2)$$

と表現されるので, (2.13) と (4.2) より, (4.1) の右辺第1項は

$$\lambda(t)(L(t) - R(t, \tau)) = -\frac{\lambda(t)B(t, t + \tau)}{\tau} \left[\frac{\int_t^{t+\tau} \phi(s) ds - A(t, t + \tau) - \tau L(t)}{B(t, t + \tau)} + \phi(t) - r(t) \right]$$

と書ける. (2.15) と (2.16) より, $A(t, t + \tau)$ と $B(t, t + \tau)$ は τ のみの関数となるので, τ が具体的に (例えば $\tau = 10$ 年など) 与えられればこれらは定数とみなせる. したがって,

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &\equiv -\frac{\lambda(t)B(t, t + \tau)}{\tau} \\ L'(t) &\equiv \frac{1}{B(t, t + \tau)} \left(\int_t^{t+\tau} \phi(s) ds - A(t, t + \tau) - \tau L(t) \right) + \phi(t) \end{aligned}$$

と定義すると, (2.11) に対応する関数は

$$W(t, t_1, t_2; y(t)) \equiv E^{t_2} \left[\exp \left\{ -\int_t^{t_1} \lambda'(s)(L'(s) - r(s)) ds \right\} \right]$$

^{*11}割引債の最終利回り. ゼロクーポンレートともいう.

と表現できるので、3.1節で得られたすべての結果は $\lambda(t) \rightarrow \lambda'(t)$, $L(t) \rightarrow L'(t)$ と置換することにより活用可能であり、(2.4)の代わりに(4.1)を用いたときのRMBS価格の半解析解が得られる。

QG++モデルでも同様である。(2.4)の代わりに(4.1)を用いると、(2.11)は

$$W(t, t_1, t_2) \equiv E_t^{t_2} \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} \lambda(s)(L(s) - R(s, \tau)) ds \right\} \right] \quad (4.3)$$

に代わる。Feynman-Kacの定理を用いると、(4.3)と(2.24)より、この場合の解 $W(t, x(t); i)$ は、時刻 $t \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \dots, m$ において

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mu_x(t) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \lambda_i [L(t) - R(t, \tau)] W \quad (4.4)$$

を満たす。(2.23)より、

$$R(t, \tau) = \frac{C_Q(t, t+\tau)}{\tau} \left(x(t) + \frac{B_Q(t, t+\tau)}{2C_Q(t, t+\tau)} \right)^2 - \frac{A_Q(t, t+\tau) + \frac{B_Q^2(t, t+\tau)}{4C_Q(t, t+\tau)} - \int_t^{t+\tau} \phi(s) ds}{\tau} \quad (4.5)$$

であり、 τ を具体的に与えれば、 $C_Q(t, t+\tau)$ は定数、 $B_Q(t, t+\tau)$ は t の一次関数、 $A_Q(t, t+\tau)$ は t の関数になる。(4.5)を(4.4)に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \mu_x(t) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\lambda_i C_Q(t, t+\tau)}{\tau} \left[\frac{\tau L(t)}{C_Q(t, t+\tau)} - \left(x(t) + \frac{B_Q(t, t+\tau)}{2C_Q(t, t+\tau)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{C_Q(t, t+\tau)} \left(\int_t^{t+\tau} \phi(s) ds - A_Q(t, t+\tau) - \frac{B_Q^2(t, t+\tau)}{4C_Q(t, t+\tau)} \right) \right] W \end{aligned}$$

と書けるので、

$$\begin{aligned} \lambda_i &\rightarrow \frac{C_Q(t, t+\tau)}{\tau} \lambda_i \\ \alpha + \beta t &\rightarrow \frac{B_Q(t, t+\tau)}{2C_Q(t, t+\tau)} \\ L(t) &\rightarrow \frac{\tau}{C_Q(t, t+\tau)} L(t) \\ \phi(t) &\rightarrow \frac{1}{C_Q(t, t+\tau)} \left(\int_t^{t+\tau} \phi(s) ds - A_Q(t, t+\tau) - \frac{B_Q^2(t, t+\tau)}{4C_Q(t, t+\tau)} \right) \end{aligned}$$

とみなすと^{*12}、3.2節で得られた結果はそのまま活用できて、(2.4)の代わりに(4.1)を用いたときのRMBS価格の半解析解が得られる。

^{*12}具体的には、

$$\alpha \rightarrow \frac{\Gamma_b e^{\gamma\tau} - \Gamma_a e^{-\gamma\tau} - 2a}{\gamma(e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau})} \alpha + \frac{\Gamma_a e^{-\gamma\tau} + \Gamma_b e^{\gamma\tau} - 2\gamma - 2a\gamma\tau}{\gamma^2(e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau})} \beta, \quad \beta \rightarrow \frac{\Gamma_b e^{\gamma\tau} - \Gamma_a e^{-\gamma\tau} - 2a}{\gamma(e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau})} \beta$$

とすればよい。

4.2. デフォルトリスクも考慮する場合

住宅ローン債務者のデフォルトに対する扱いはRMBSの種類により若干異なるので、種類に応じた対応が必要である。例えば、住宅金融支援機構債のようにデフォルト分はRMBSの発行体が補填して償還を行う場合を考えると、過去のデフォルト率に関する実績データが十分に存在するならば、その分析結果をもとにさまざまなモデル化が可能である。もちろん、これまで述べてきたプリペイメント率モデルを形式的にそのままデフォルト率に適用することも可能である。あるいは、デフォルトが結果としてプリペイメントと同じ効果になるのであれば、プリペイメント率とデフォルト率の和をこれまでのプリペイメント率とみなして統合評価することも可能である。

4.3. プリペイメント率の測度変換

通常、プリペイメント率のモデルパラメータの推定は多数銘柄の豊富な観測データをもとに行われ、そこで推定されるのは観測確率 P のもとにおけるプリペイメント率 $h(t)$ であり、個別銘柄特性を反映しないことが多い。これを価格付けに使うためには、観測確率 P からリスク中立確率 \tilde{P} への測度変換と個別銘柄特性がプリペイメント率に及ぼす影響を考えなければならない。前者の影響を信用リスク評価におけるデフォルト発生強度の測度変換と同様に考えると^{*13}、銘柄 j のRMBSに対するこの影響は、可予測な確率過程 $l_j(t)$ を用いて

$$\tilde{h}_j(t) = h(t) + l_j(t)$$

と表現できるが^{*14}、本稿では取り扱いを簡単にするために、 l_j を定数として

$$\tilde{h}_j(t) = h(t) + l_j$$

と表現する。このとき、(2.10)は

$$V(t, t_1, t_2) = \exp\{-(t_1 - t)l_j\} \exp\left\{-\mu_G(t, t_1) + \frac{1}{2}S_G(t, t_1)\right\} P(t, t_2)W(t, t_1, t_2)$$

となり、定数 l_j は銘柄 j の市場価格から決定される。この l_j には測度変換の効果と個別銘柄特性が期間平均された形で反映されることになるが、実務上は各銘柄の理論価格と市場価格の乖離を調整するファクターとみなすこともできる。

5. 数値例

本節では提案モデルの特性を示すため、単純な設定による数値例のみを示す。例えば、本稿のモデルでは金利感応度 $\lambda(t)$ の時間依存性を詳細に表現できるが、ここでは単純な構造を仮定する。したがって、この数値例で使うプリペイメント率の期間構造は、(1) 金利感応度の期間構造 $\lambda(t)$ と、(2) プリペイメント率固有の期間構造 $g(t)$ の二つである。さらに、ここで示す数値例はQG++モデルを用いた場合に限定する。その理由は、最近の日本の観測データを用いて予備的に行ったカリブレーション結果によると、CIR++モデルではデリバティブ（具体的にはスワップション）の理論価格が市場価格にある程度うまくフィットするようなパラメータを見つけることができなかつたからである^{*15}。

^{*13}実際のデフォルト事象の観測データから求めた統計的なデフォルト確率と、市場価格から推定されるデフォルト確率は大きく乖離することが知られている。一般に、使用する確率測度が違えば、事象の発生確率は異なる値をとる。

^{*14}Kijima and Muromachi [10] を参照。

^{*15}もちろん常にこのような結果になるとは限らないが、現時点ではQG++モデルの方が有望である。

はじめに、金利感応度 $\lambda(t)$ が一定の場合を考える。表 1 に MBS の諸元、QG++モデル・パラメータおよびプリペイメントモデル・パラメータを示す。また、現時点におけるゼロレート
の期間構造 (以下イールドカーブと記す) は連続複利 5% で期間によらず一定とした。この
場合、割引債価格は $P(0, T) = \exp(-0.05T)$ である。割引債価格カーブと $(a, \sigma, \alpha, \beta, r(0))$ が
与えられているので、(2.22) の $\phi(t)$ は (2.23) より逆算できる。経年変化過程 (2.5) の $\psi(t)$ は、
モデルによる期待値 $E[g(t)]$ が PSA モデルの CPR (Conditional Prepayment Rate) 曲線を再現する
ように与えた。また、単純化のため、(2.5) で $\eta(t) = \eta$ (定数) とした。

表 1: 価格算出に使用したモデルパラメータ

MBS 諸元		QG++モデル		プリペイメントモデル	
当初元本 (円)	100	a	0.1	λ	4 種類
クーポン率 (%)	4.5	σ	0.05	L	5.0 %
満期 (年)	30	α	0	b	0.734
		β	0	η	0.02
				PSA 倍率	167 %

図 1-図 3 にイールドカーブを平行シフトさせたときの価格、実効デュレーション ED (5.1)、
実効コンベキシティ ECV (5.2) の変化をそれぞれ示す。

$$ED = -\frac{1}{V_0} \frac{V_{+\Delta y} - V_{-\Delta y}}{2\Delta y} \tag{5.1}$$

$$ECV = \frac{1}{V_0} \frac{V_{+\Delta y} - 2V_0 + V_{-\Delta y}}{(\Delta y)^2} \tag{5.2}$$

ここで、 V_0 は金利シフトが無い場合の RMBS 価格、 Δy はイールドカーブの平行シフト幅、
 $V_{\pm\Delta y}$ はイールドカーブを $\pm\Delta y$ だけ平行シフトさせたときの RMBS 価格である。ただし、
 $\Delta y = 0.1\%$ を採用した。

図 1 より、金利感応度 $\lambda(t)$ の値に応じて RMBS 価格カーブの曲率が変化していることが
わかる。この数値例では、 $\lambda(t) = 0$ では価格カーブは凸関数、 $\lambda(t) = 1$ ではほぼフラット、
 $\lambda(t) = 2, 3$ では凹関数となっている。このことを明確に示しているのが図 3 で、金利感応度
 $\lambda(t)$ が 1 以下の小さな値の場合、実効コンベキシティは正であり、負値にはならない。しか
し、 $\lambda(t) = 2, 3$ の場合は、RMBS 価格の特性として期待されるように負値 (ネガティブコン
ベキシティ) となっている。

次に、金利感応度 $\lambda(t)$ に時間依存性を導入した場合、RMBS 価格にどのような影響があ
るかを調べる。まず、計算で使用した $\lambda(t)$ の時間依存性を図 4 に示す。図 4 の「区分的一定」
(期間構造を持たせた場合) は、志立 [18] が得た経過年数 10ヶ月ごとの金利感応度の推定値
をもとに 4 つの時間区間 (0, 30], (30, 100], (100, 200], (200, 360] (単位は月) に分割して、そ
れぞれの区間における平均値を算出し、(200, 360] では (190, 200] の値をそのまま用いたも
のである。一方、「全区間一定」では λ の 30 年間 (RMBS の満期まで) の時間平均値 1.08 を
使用する。その他の計算パラメータは表 1 の値を用いる。図 5 に、「区分的一定」と「全区間
一定」による RMBS 価格の金利シフトによる変化を示す。どちらの価格カーブもネガティ
ブコンベキシティではあるが、期間構造を持たせた場合のほうがより大きな曲率を示してい
る。この結果から、 $\lambda(t)$ の経年変化の効果は決して無視できないことがわかる。

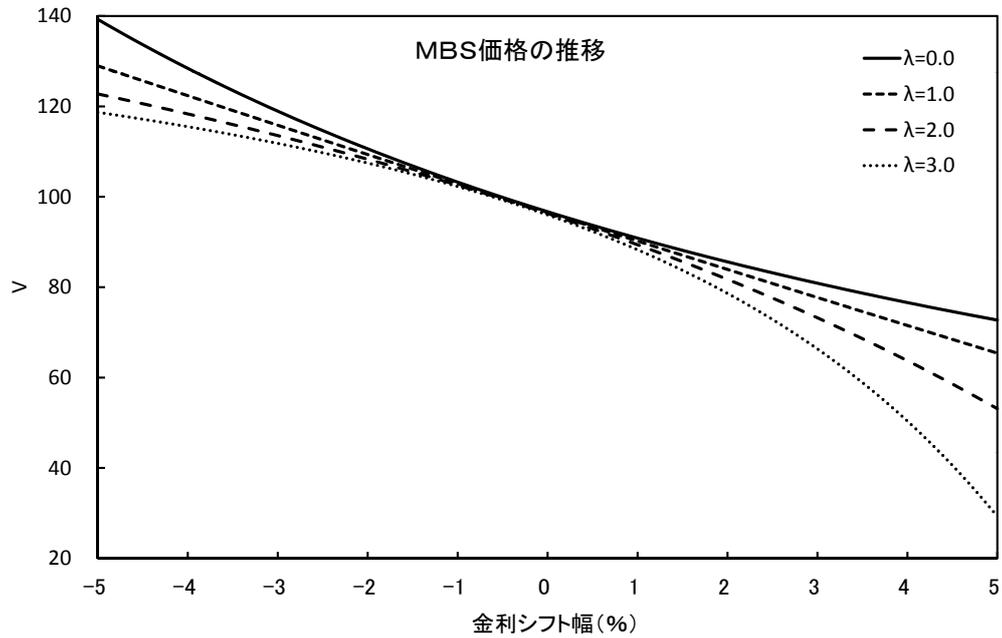


図 1: 金利シフトに対する RMBS 価格の推移

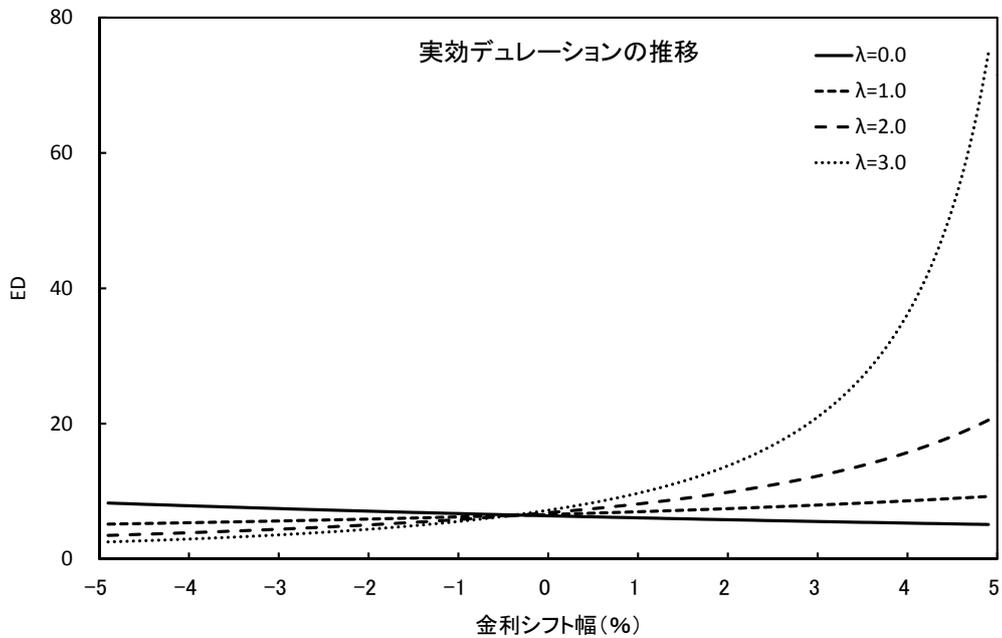


図 2: 金利シフトに対する実効デュレーションの推移

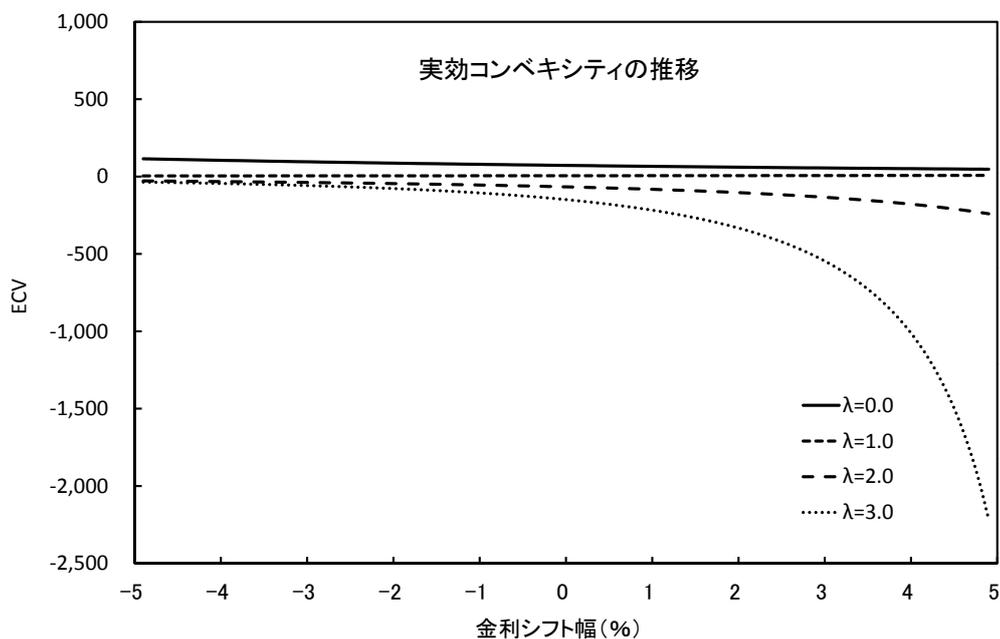


図 3: 金利シフトに対する実効コンベキシティの推移

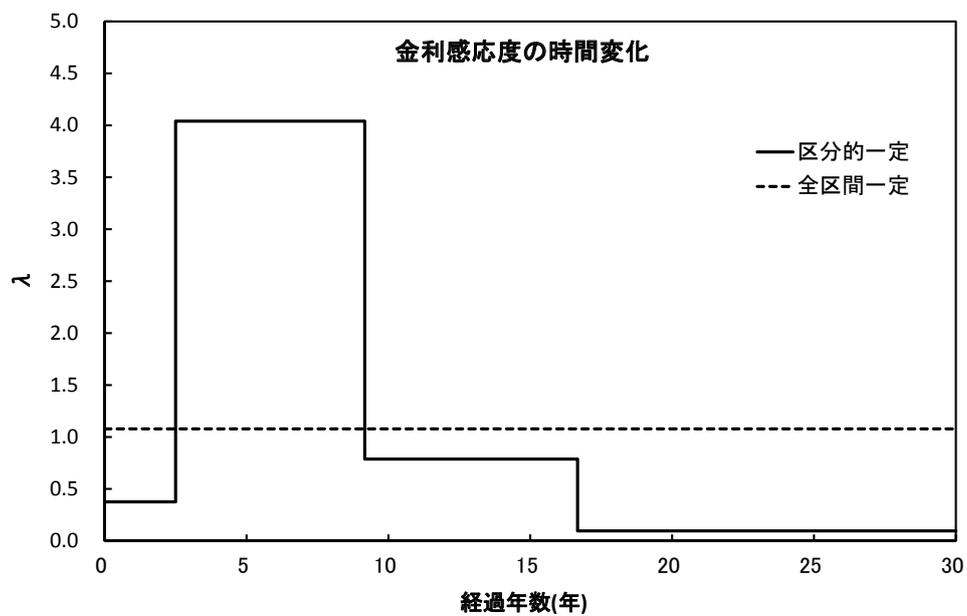


図 4: 金利感応度 λ の経過年数依存性

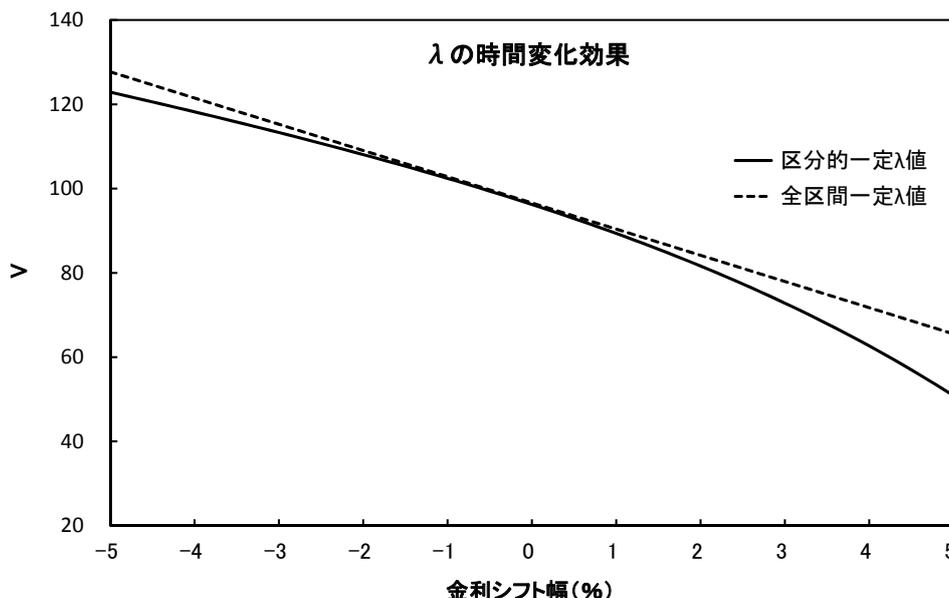


図 5: 金利感応度を経過年数に応じて変化させたときの RMBS 価格の違い

ところで、図1と図5の金利シフトがゼロの時の価格は λ が異なってもほとんど同じである。この事実は金利インセンティブ効果が一見無いように見えるので奇妙なことに思える。しかし、これは借入金利 L とイールドカーブ金利を同じ5%にしたことと、金利モデルのボラティリティが小さいため、 $L(t) - r(t)$ がほとんどゼロ近傍で変化することが原因であろう。

なお、図2を見ると、金利感応度 $\lambda(t) = 3$ の場合、金利シフト幅が4%以上になると実効デュレーションがRMBS満期の30年を超過する。図1でも、金利感応度 $\lambda(t) = 3$ で金利シフト幅が大きくなると、RMBS価格が急激に下落する。これらは定性的に受け入れ難い現象であるが、その原因はモデルにおける負のプリペイメント率の発生にある。 $\lambda(t)$ と金利シフト幅が極端に高くなると、(2.4)より $\tilde{h}(t) < 0$ となる。すると、生存確率 $S(t)$ が時間とともに上昇し、(2.1)より、RMBS購入者がキャッシュを支払うことになってしまうので、RMBS価格は急激に下落し、実効デュレーション（RMBS価格の金利感応度）は急上昇する。このような現象の発生は、本モデルだけでなく既存の解析的モデルに共通の欠点である。

6. おわりに

本稿では、住宅ローンのプリペイメント率が借入時点からの経過時間に関して期間構造を持ち、かつ金利環境に依存することを考慮したときのRMBSの半解析的な価格式を導出した。確率金利モデルには、実務での利用を考慮して、将来の金利が負にならず、しかも現時点の金利期間構造と整合的になるようにBrigo and Mercurio [2]の方法で調整したCIR++モデルとQuadratic Gaussian++モデルを採用した。また、実績データの分析結果を考慮して、プリペイメント率の金利感応度が経過時間により変化する効果も取り込めるようにモデルを構築した。さらに、提案モデルのより実務に即した応用、例えば、プリペイメント率を長期金利の関数として表現する場合などについても考察した。価格式導出における技術的なポイントはフォワード中立化法とFeynman-Kacの定理の利用である。得られた価格式はプリペイメント率の金利感応度の大きさに応じて3通りに分かれたが、どれも計算は容易で、

そのまま実務で使用可能である。CIR++モデルとQG++モデルという2つの金利モデルは将来の金利が負にならないという好ましい性質を持つが、解析的なRMBS価格評価に関する既存論文では利用を避けられてきた。しかし、本稿で容易に計算可能な半解析解が得られたことにより、今後の実務での利用にも理論研究にも大きな進展が期待できる。

しかし、5節の数値例において、金利感応度 $\lambda(t)$ が高く、金利が大きく上昇する場合には負のプリペイメント率が発生するため、RMBS価格が定性的に受け入れ難い振る舞いを示すことが示された。この負のプリペイメント率の発生には、プリペイメント率固有の期間構造を表す確率過程 $\tilde{g}(t)$ をHull and Whiteモデルと同じ形式(2.5)で表現したために、将来の $\tilde{g}(t)$ が負になりうることも影響していると考えられる^{*16}。これらの問題に対する適切な解決方法の提案は今後の重要な課題である。また、実務でこれらのモデルを使用するには金利モデルおよびプリペイメント率モデルのパラメータを観測データから推定(カリブレーション)する必要があるが、その具体的な方法の提案と実証分析結果の提示も今後の課題である。

謝辞

株式会社 アイヴィス東方システムズの黄文峰氏(現在 株式会社 AFG)と趙明剛氏には理論式のチェックおよび数値例の作成でご協力いただいたことに感謝する。また、株式会社 エイファスの田中徹氏(現在 株式会社 AFG)には共同研究プロジェクトの機会を与えていただいたことに感謝する。さらに株式会社 エイファスのおお津昌三氏には共同研究プロジェクトを継続していただいたことに厚く感謝する。また、著者の一人である室町は日本学術振興会より科学研究費補助金基盤研究(A) No.21241040 と (C) No.24510194 の支援を受けたことに感謝する。最後に、有益なコメントを頂いた査読者2名に感謝する。

参考文献

- [1] 荒川研一: プリペイメントモデルの構築. 日本銀行金融機構局金融高度化センターワークショップ「銀行勘定の金利リスク管理の高度化に向けて」資料, (日本銀行, 2009).
- [2] D. Brigo and F. Mercurio: *Interest Rate Models – Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit (2nd ed.)* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006).
- [3] P. Collin-Dufresne and J.P. Harding: A closed form formula for valuing mortgages. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, **19-2** (1999), 133–146.
- [4] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross: A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, **53** (1985), 385–407.
- [5] J. Hull and A. White: Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*, **3** (1990), 573–592.
- [6] 住宅金融支援機構ホームページ, 発行実績.
- [7] 住宅金融支援機構, 平成22年度損益決算書.
- [8] 勝俣基: 標準期限前償還モデル Prepayment Standard Japan Model シーズニング期間の決定方法について. *Japan Fixed Income Research The Yield Book* (日興シテイグループ, 2006).
- [9] 木島正明: 期間構造モデルと金利デリバティブ (朝倉書店, 1999).

^{*16}ただし、数値例のように η が小さく、 b が大きい場合には、 $\tilde{g}(t)$ の影響は軽微である。

- [10] M. Kijima and Y. Muromachi: Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes. *Journal of Risk*, **3-1** (2000), 5–36.
- [11] M. Kijima, K. Tanaka, and T. Wong: Yield spread options under the DLG Model. In F. Mercurio (eds.): *Modelling Interest Rates* (Risk Books, 2009), 43–71.
- [12] A. Kolbe: *Valuation of Mortgage Products with Stochastic Prepayment-Intensity Models* (Doctoral Dissertation, Technische Universität München, 2007).
- [13] N. Nakamura: Valuation of mortgage-backed securities based upon a structural approach. *Asia-Pacific Financial Markets*, **8** (2001), 259–289.
- [14] 日本証券業協会: わが国の証券化市場の現状と課題 —市場活性化の観点から— (2011).
- [15] 日本証券業協会: PSJ(Prepayment Standard Japan) モデルに関する説明会資料 (2006).
- [16] A. Pelsser: A tractable yield-curve model that guarantees positive interest rates. *Review of Derivatives Research*, **1** (1997), 269–284.
- [17] N. Rom-Poulsen: Semi-analytical MBS pricing. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, **34** (2007), 463–498.
- [18] 志立正弘: 金利低下時における住宅ローン期限前返済率の変動特性について—ローン設定からの経過月数との関連性に着目して—. ニッセイ基礎研究所報, **32** (2004), 48–77.
- [19] 山岸吉輝: 住宅ローン担保証券の標準期限前償還モデル (PSJ モデル), (野村証券金融経済研究所, 2006).
- [20] 山岸吉輝: 住宅ローン債権担保証券のプライシング手法について: 期限前償還リスクを持つ金融商品の価格の算出. 金融研究, **24**, 別冊 2 (2005), 57–113.

A. CIR++モデルにおける連立常微分方程式の解

まず, $A(t, T)$, $B(t, T)$ は

$$\frac{dB(t, T)}{dt} = aB(t, T) - \frac{\sigma^2 B^2(t, T)}{2} + 1 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dA(t, T)}{dt} = -a\bar{y}B(t, T) \quad (\text{A.2})$$

の解である. (A.1) を用いると, (3.2) は,

$$\frac{dY(t; i)}{dt} = \frac{\sigma^2}{2} Y^2(t; i) + \lambda_i - 1 - \frac{a^2}{2\sigma^2}, \quad t \in [s_{i-1}, s_i] \quad (\text{A.3})$$

となる. ただし,

$$Y(t; i) = C_1(t; i) - B(t, t_2) + \frac{a}{\sigma^2} \quad (\text{A.4})$$

とした. (A.3) の解 $Y(t; i)$ は,

$$H_i = \lambda_i - 1 - \frac{a^2}{2\sigma^2} \quad (\text{A.5})$$

の符号により異なる.

$H_i < 0$ のとき,

$$\begin{aligned}\gamma'_i &= \sigma\sqrt{-2H_i} = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2(1 - \lambda_i)} \\ Q_i &= \sigma^2 C_1(s_i; i+1) - \sigma^2 B(t_1, t_2) + a + \gamma'_i \\ R_i &= \sigma^2 C_1(s_i; i+1) - \sigma^2 B(t_1, t_2) + a - \gamma'_i\end{aligned}$$

とおくと, 境界条件が (3.5)–(3.6) で与えられる (A.3) の解は,

$$Y(t; i) = \frac{\gamma'_i}{\sigma^2} \left(\frac{2Q_i e^{\gamma'_i(s_i-t)}}{Q_i e^{\gamma'_i(s_i-t)} - R_i} - 1 \right) \quad (\text{A.6})$$

となるので^{*17}, (A.4) より $C_1(t; i)$ が得られる. 次に, (A.2) を用いると, (3.3) は,

$$\frac{dC_0(t; i)}{dt} = a\bar{y}Y(t; i) + a\bar{y}B(t, t_2) - \frac{a^2\bar{y}}{\sigma^2} + \lambda_i(L(t) - \phi(t)) \quad (\text{A.7})$$

となるので, 境界条件 $C_0(s_i; i) = C_0(s_i; i+1)$ を考慮して (A.7) を積分すると,

$$\begin{aligned}C_0(t; i) &= C_0(s_i; i+1) + \int_{s_i}^t \left[a\bar{y}Y(v; i) + a\bar{y}B(v, t_2) - \frac{a^2\bar{y}}{\sigma^2} + \lambda_i(L(v) - \phi(v)) \right] dv \\ &= C_0(s_i; i+1) + \frac{2a\bar{y}}{\sigma^2} \log \left(\frac{Q_i - R_i}{Q_i e^{\gamma'_i(s_i-t)} - R_i} \right) + \frac{a\bar{y}(\gamma'_i + a)}{\sigma^2} (s_i - t) \\ &\quad + A(s_i, t_2) - A(t, t_2) + \lambda_i \int_{s_i}^t (L(v) - \phi(v)) dv\end{aligned}$$

が得られる. 詳細は省略するが, $H_i = 0$ のときと $H_i > 0$ のときの解も同様にして得られる.

B. QG++モデルにおける連立常微分方程式の解

まず, $A_Q(t, T)$, $B_Q(t, T)$, $C_Q(t, T)$ は

$$\begin{aligned}\frac{dC_Q(t, T)}{dt} &= 2aC_Q(t, T) + 2\sigma^2 C_Q^2(t, T) - 1 \\ \frac{dB_Q(t, T)}{dt} &= aB_Q(t, T) + 2\sigma^2 B_Q(t, T)C_Q(t, T) - 2(\alpha + \beta t) \\ \frac{dA_Q(t, T)}{dt} &= -\frac{1}{2}\sigma^2 B_Q^2(t, T) + \sigma^2 C_Q(t, T) + (\alpha + \beta t)^2\end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

の解である. (B.1) を用いると, (3.9) は,

$$\frac{dY_Q(t; i)}{dt} = 2\sigma^2 Y_Q^2(t; i) + \lambda_i - 1 - \frac{a^2}{2\sigma^2}, \quad t \in [s_{i-1}, s_i] \quad (\text{B.2})$$

となる. ただし,

$$Y_Q(t; i) = C_{Q2}(t; i) + C_Q(t, t_2) + \frac{a}{2\sigma^2} \quad (\text{B.3})$$

^{*17}境界条件を考えなければ (A.3) は 2つの解を持つ. しかし, (A.3) より, $t \in [s_{i-1}, s_i]$ では $\sigma^2 Y(t; i) - \gamma'_i$ と $\sigma^2 Y(t; i) + \gamma'_i$ はそれぞれ符号を変えないという性質を持つ. そのため, $t = s_i$ における境界条件を考慮すると, 解は (A.6) のみに限定される. QG++モデルで $H_i < 0$ の場合でも同様であり, (B.2) の解は (B.4) のみに限定される.

とした. (B.2) の解 $Y_Q(t; i)$ もまた (A.5) で定義される H_i の符号により異なる.

$H_i < 0$ のとき, 境界条件が (3.13)–(3.15) で与えられる (B.2) の解は,

$$Y_Q(t; i) = \frac{\gamma'_i}{2\sigma^2} \left[\frac{2Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)}}{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} - R_{Q,i}} - 1 \right] \quad (\text{B.4})$$

となるので, (B.3) より $C_{Q2}(t; i)$ が得られる. ただし,

$$\begin{aligned} Q_{Q,i} &= 2\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + 2\sigma^2 C_Q(t_1, t_2) + a + \gamma'_i \\ R_{Q,i} &= 2\sigma^2 C_{Q2}(s_i; i+1) + 2\sigma^2 C_Q(t_1, t_2) + a - \gamma'_i \end{aligned}$$

である. 次に, (3.10) は

$$\begin{aligned} \frac{dC_{Q1}(t; i)}{dt} &= 2\sigma^2 Y_Q(t; i) C_{Q1}(t; i) + j(t; i) \\ j(t; i) &= 2\sigma^2 B_Q(t, t_2) C_{Q2}(t; i) + 2\lambda_i(\alpha + \beta t) \end{aligned}$$

という線形常微分方程式なので定数変化法で解けて, その解は,

$$\begin{aligned} C_{Q1}(t; i) &= C_{Q1}(t; i+1) - \int_t^{s_i} j(u; i) \exp \left\{ -2\sigma^2 \int_t^u Y_Q(v; i) dv \right\} du \\ &= C_{Q1}(t; i+1) + \frac{2\gamma'_i(C_{Q1}(s_i; i) + B_Q(s_i, t_2))}{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} - R_{Q,i}} e^{\gamma'_i(s_i-t)} - B_Q(t, t_2) \\ &\quad - \frac{2(\lambda_i - 1)}{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} - R_{Q,i}} \left\{ \alpha \frac{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} + R_{Q,i} - (Q_{Q,i} + R_{Q,i})e^{\gamma'_i(s_i-t)}}{\gamma'_i} \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{t(Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} + R_{Q,i}) - s_i(Q_{Q,i} + R_{Q,i})e^{\gamma'_i(s_i-t)}}{\gamma'_i} \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{Q_{Q,i}e^{2\gamma'_i(s_i-t)} - R_{Q,i} - 2\gamma'_i e^{\gamma'_i(s_i-t)}}{\gamma_i'^2} \right\} \end{aligned}$$

で与えられる. $C_{Q0}(t; i)$ は, (3.11) の積分

$$\begin{aligned} C_{Q0}(t; i) &= C_{Q0}(s_i; i+1) + \int_t^{s_i} \left[\sigma^2 B_Q(s, t_2) C_{Q1}(s; i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2} (C_{Q1}^2(s; i) - 2C_{Q2}(s; i)) - \lambda_i \{ L(s) - (\alpha + \beta s)^2 - \phi(s) \} \right] ds \end{aligned}$$

に $C_{Q2}(t, t_1, t_2)$ と $C_{Q1}(t, t_1, t_2)$ の解析表現を代入して計算すれば得られる. 詳細は省略するが, $H_i = 0$ のときと $H_i > 0$ のときの解も同様にして得られる.

室町幸雄
 首都大学東京
 大学院社会科学研究所
 〒 192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1
 E-mail: muromachi-yukio@tmu.ac.jp

ABSTRACT

**PRICING RESIDENTIAL MORTGAGE-BACKED SECURITIES WITH
THE TERM STRUCTURE AND THE INTEREST-RATE SENSITIVITY OF
PREPAYMENT RISK**

Norio Kishida Yasutoshi Takayama Yukio Muromachi
AFAS, Inc. Shinsei Bank, Limited Tokyo Metropolitan University
(Axiom Financial Group, Inc.)

After the latest world-wide financial crisis, Residential Mortgage-Backed Securities (RMBS) become more and more important in financial instruments for long-term investment. Since RMBS have longer maturities and more frequent payoffs than the ordinary bonds, it is desired to evaluate their values quickly in business transactions, and especially in risk managements where valuations are repeated under various kinds of economic conditions. In this article, we derive semi-analytical pricing formulas of RMBS where prepayment rates have a term structure and a dependence on the interest rates. As an stochastic interest rate model, we adopt CIR++ model or Quadratic Gaussian++ model because their future interest rates become positive and these models can perfectly fit the initial term structure of the market rates. Moreover, we consider the time-dependence of the interest rate sensitivities of prepayment rates. The technical key points are the forward-neutral pricing method and the Feynman-Kac theorem. The obtained pricing formulas have three different expressions, and the interest-rate sensitivity of prepayment rates determines which one is used among the three expressions. All formulas can be calculated so quickly that they would be useful in practice.