日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 56, 2013, pp. 1–14

緩和除数方式の比例性と歴史上の5方式との関係について

一森 哲男
大阪工業大学

(受理 2012 年 6 月 22 日; 再受理 2012 年 12 月 13 日)

和文概要　この論文は議員定数配分問題を扱う．すなわち，人口に比例して議席を配分するテーマを扱う．本論文の目的を具体的に言えば，著者が最近提案した配分方式である緩和除数方式が比例方式であることを証明し，歴史上の五つの議席配分方式（Adams 方式，Dean 方式，Hill 方式，Webster 方式，Jefferson 方式）との関連性を明らかにすることである．妥当な配分方式はすべて比例方式なので，当然，緩和除数方式も比例方式であるべきである．これら 5 方式の内，2 方式しか緩和除数方式ではないが，5 方式全体との関係を俯瞰することは重要である．

キーワード: 離散最適化，議員定数配分，除数方式，一人一票

1. はじめに

議員定数配分問題は，人口や得票に比例して議席を配分する問題である．この問題はどこの国にも存在する普遍的な問題で，我が国でも定数是正や一票の格差の問題として，しばしば，メディアに取り上げられている．ヨーロッパで良く使われる比例代表制では，政党の得票に比例して政党間で議席を配分している．アメリカのような連邦制では，州の人口に比例して州間で議席を配分している．政党の得票を州の人口と読み替え，政党間を州間と読み替えれば，本質的には，両者は同じことを表している．しばしば，両者は組合せて利用される．我が国の衆議院の定数の一部 180 議席は 11 ブロック（選挙区）の人口に比例して，ブロック間で配分され，さらに，その各ブロック内では，そのブロックに与えられた議席を比例代表制により政党間で配分している．ここでは問題の記述を統一化するため，アメリカの下院議員の州間での議席配分を対象にして議論する．

人口に比例して議席を配分することは単純なようであるが，それは意外と難しい．例えば，2010 年度人口で，California 州はアメリカの総人口の 12.078%の人口を有する．議席総数 435 の 12.078%は 52.54 議席になる．53 議席を配分すれば，同州の一票の価値は理想値より大きくなり，52 議席を配分すれば逆に一票の価値は理想値より小さくなる．つまり，どちらにしても，配分値を人口に完全に比例させることは不可能である．また，人口の少ない州では配分議席数が 1 になるか 2 になるかで，一票の価値に大きな差を生じる．例えば，Rhode Island 州の場合，州の人口に完全に比例した議席数は 1.485 であり，配分議席数が 1 になるか 2 になるかは一票の価値の格差に大きな影響を与える．そのため，人口に比例して議席を配分することは難しく，アメリカでは 200 年以上にわたり激しい論争が続いている [1]．また，わが国でも，一票の格差の是正を求めた訴訟が絶え間なく続いている．

議席配分の歴史において，Huntington [3] の功績は非常に大きく，過去に考案された Adams，Dean，Hill，Webster（別名，Sainte-Laguë），Jefferson（別名，D'Hondt）の 5 方式のみが

彼の「一対比較の理論」より導かれ，Hill 方式の他の 4 方式に対する優位性を述べた．さらに，これらの 5 方式が Alabama パラドックスを避けることも示した．Alabama パラドックスとは議席の総数が 1 増加すると，州に配分される議席が減る現象のことで，1880 年当時に使われていた配分方式（最大剰余法）を用いると，議席総数 299 では Alabama 州に 8 議席が配分されたのに，300 議席にすると 7 議席しか配分されなかった歴史的事実のことである．また，5 方式は上記の順に人口の少ない州に有利ということから，人口の多い州と少ない州への偏りに関して，真ん中の Hill 方式が中立，すなわち，偏りが最小と主張した．以下では，人口の多い州を「大州」，人口の少ない州を「小州」と呼ぶ．また，単に,「配分方式の偏り」と言えば，配分方式の大州と小州への偏りを意味する．彼の理論は 1929 年当時の一流の数学者たち（下院議長の要請を受け，全米科学アカデミーにより指名された）により認められ，やがて，配分方式が法的に Webster 方式から Hill 方式に変わった*．そのため，これらの歴史上の 5 方式は特別なものと考えらえてきた．

しかしながら，Balinski and Young [1] によれば，これらは単に無数にある除数方式の一部分でしかない．除数方式という配分方式は原始的で，非常に古くから存在する配分方式である．この方式では，ある一定の人口に対して 1 議席を配分することが基本となる．例えば，30 万人に対して 1 議席を配分するのであれば，2010 年度人口が約 480 万人の Alabama 州には，480 を 30 で除することにより 16 議席が配分される．一方，人口が約 72 万人の Alaska 州では 72 を 30 で割ると，商が 2 となり 12 が余る．同州に 2 議席が配分されるが，余りの 12 万人に対して，追加の 1 議席を与えるべきかどうかは判断が難しい．Adams 方式では，すべての余りに追加の 1 議席を与え，Jefferson 方式は余りをすべて無視する．Webster 方式では，30 万人の半分の 15 万人より大きい余りに 1 議席を追加する．このように，どのような大きさの余りに 1 議席を追加するかにより，さまざまな除数方式が考えられる．

このため，Balinski and Young は 5 方式から偏りを最小にする方式を探すのではなく，無数の除数方式から探すべきと主張した．探すべき範囲を除数方式に限定する理由は，除数方式のみが人口パラドックスを避けるからである．多くの国では西暦の数字の末尾が 0 の年に国勢調査が行われているが，アメリカではその国勢調査により定まった人口に応じて，議席の再配分が行われている．つまり，10 年ごとに議席配分をし直している．人口パラドックスとは連続する 2 回の国勢調査で，人口の増加率の小さい州が増加率の大きい州から議席を奪う現象のことである．探すべき範囲を除数方式に限定するもうひとつの理由は，除数方式は Alabama パラドックスも避けるからである．Balinski and Young は除数方式の中から，偏りが最小の配分方式として Webster 方式を選び出しているものの，この点に関してはかなりの反対意見があり [2]，必ずしも，完全に彼らの主張が認められているわけではない．実際，1990 年度の国勢調査結果に基づき，現行配分方式，つまり，Hill 方式による議席配分の違憲性を問う訴訟が 2 件起き，その訴訟の一つは上告され，最高裁でも審理された．その裁判の判決では，彼らの主張とは異なり，Webster 方式の Hill 方式に対する優位性は認められなかった†．

このような状況に鑑み，つぎのことを考えた．Jefferson 方式は除数方式であるものの，明らかに大州に有利となる配分を与え，好ましい配分方式とは言えない．さらに，Adams 方式も除数方式ではあるが，これは逆に，小州に極めて有利な配分を与えるので，これも好ましい配分方式とは言えない．一方，現在使用されている Hill 方式は Huntington [3] による

*1948 年にも再度同じことが行われた．このときも，Hill 方式が支持された．
†アメリカ合衆国判例集第 503 巻 442–466 ページ，1992 年.

支持などから，明らかに好ましい配分方式である．また，Hill 方式の使用前に使われていた Webster 方式も Willcox [9] および Balinski and Young [1] の支持を考えれば，好ましい配分方式である．このような理由から，著者は除数方式全体を二つのグループに分けることを提案した [5]．二つのグループとは緩和除数方式とそれ以外である．緩和除数方式は論文 [5] で最初に定義されている．本論文では定義 2.2 で同方式を定めている．これは簡単に言えば，次のようになる：除数方式を離散最適化問題として表現し，州への配分議席数の整数制約を連続緩和したとき，州への配分数と人口が完全に比例するとき，その除数方式を緩和除数方式と呼んでいる．緩和除数方式は Hill 方式と Webster 方式を含むが，他の 3 方式は含まない．緩和除数方式は一つのパラメータでその構成要素の配分方式をすべて特徴づけることができるので，人口に対する偏りを最小にする配分方式を見つけることを容易にすると期待される．

論文 [5] では議席の総数が増加するとすべての緩和除数方式の偏りがなくなることが示されているが，緩和除数方式が比例性をもつことは示されていない．Balinski and Young [1] によれば，仮に，議席配分に偏りがなくても，その配分方式が比例方式でなければ，配分方式としての妥当性に欠ける．比例方式は定義 2.1 で定められているが，例で説明すれば，つぎのようになる：例えば，小選挙区制で選ばれる衆議院議員 300 名の議席は 47 都道府県の人口に比例して配分されているが，ある配分方式を使った結果，すべての都道府県の配分議席数が偶数になったとする．もし，半分の 150 議席を以前と同じ配分方式で 47 都道府県に配分したとき，配分結果が一意に決まり，各都道府県の配分議席数が丁度以前の半分になっているとき，その使用した配分方式は比例方式と言われる．そこで，本論文では，緩和除数方式が比例方式であることを 2 節で示す．さらに，3 節では，緩和除数方式でない Jefferson, Adams，Dean 方式がいかなる位置を占めているかなどを含み，歴史上の 5 方式と緩和除数方式全体の位置関係を明らかにする．

2. 緩和除数方式の比例性

この節では緩和除数方式が比例方式であることを証明する．最初の 2.1 節では，緩和除数方式の定義を与える．2.2 節では，そのつぎの 2.3 節の比例性の証明の準備として，パラメータを二つ持つ Stolarsky 平均の定義を与え，その性質を調べる．最後の 2.3 節では，緩和除数方式の比例性の証明を与える．

2.1. 緩和除数方式の定義

州の数を $s \geq 2$，議席総数を $h \geq 0$，人口ベクトルを $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_s)$，議席配分を $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ とする．州の集合を $S = \{1, \ldots, s\}$ とする．人口は正の整数で議席は非負の整数とする．すなわち，$p_i \in \mathbb{Z}_+ \equiv \{1, 2, 3, \ldots\}$ $(i \in S)$，$a_i \in \mathbb{Z}_0 \equiv \{0, 1, 2, \ldots\}$ $(i \in S)$ とする．丸め関数を $d(a)$ $(a \in \mathbb{Z}_0)$ とする．丸め関数 $d(a)$ は a に関して狭義増加で，$a \leq d(a) \leq a+1$ を満たす．さらに，$d(b) = b$ かつ $d(c) = c+1$ を満たす整数のペア (b, c) は存在しない．ここで，$b \in \mathbb{Z}_+$，$c \in \mathbb{Z}_0$ である．歴史上の 5 方式の丸め関数 $d(a)$ を表 1 に示す．

z を正の実数とし，$[z]$ を次のルールに基づき定まる整数とする．

1. $z < d(0)$ ならば $[z] = 0$ とする．
2. $d(a) < z < d(a+1)$ となる $a \in \mathbb{Z}_0$ が存在すれば，$[z] = a + 1$ とする．
3. $z = d(a)$ となる $a \in \mathbb{Z}_0$ が存在すれば，$[z] = a$ または $[z] = a + 1$ とする．

人口ベクトル $\boldsymbol{p}$ と議席総数 h を持つ問題に，丸め関数 $d(a)$ に基づく除数方式 M を用いたと

表 1: 歴史上の 5 方式の丸め関数 $d(a)$ $(a \in \mathbb{Z}_0)$

配分方式の名前	$d(a)$	a と $a+1$ の平均名
Adams	a	
Dean	$\dfrac{2a(a+1)}{2a+1}$	調和平均
Hill	$\sqrt{a(a+1)}$	幾何平均
Webster	$a+\frac{1}{2}$	算術平均
Jefferson	$a+1$	

きの配分の集合 $M(\boldsymbol{p},h)$ は

$$\left\{\boldsymbol{a} \;\middle|\; a_i = \left[\frac{p_i}{x}\right], x>0 \text{ は実数で，} \sum_{i\in S}\left[\frac{p_i}{x}\right] = h \text{ を満たすように選ぶ}\right\}$$

に等しく[‡]，さらに，

$$\left\{\boldsymbol{a} \;\middle|\; \max_{i\in S_+}\frac{d(a_i-1)}{p_i} \le \min_{j\in S}\frac{d(a_j)}{p_j},\ \ a(S)=h, a_i\in\mathbb{Z}_0\ (i\in S)\right\}$$

に等しい [1]．定義：$S_+ \equiv \{i \mid a_i \ge 1, i\in S\}$ および $a(S) \equiv \sum_{i=1}^{s} a_i$ とする[§]．

定義 2.1. ある有理数 $0<\lambda<1$ の値を固定する．$a(S)=h$ となる議席配分 $\boldsymbol{a}$ に対して，$b_i=\lambda a_i$ $(i\in S)$ がすべて非負の整数と仮定する．このとき，

$$\boldsymbol{a}\in M(\boldsymbol{p},h) \Longrightarrow \{\boldsymbol{b}\} = M(\boldsymbol{p},\lambda h)$$

となるならば，この除数方式 M は比例方式と言われる．

定義 2.2. 丸め関数 $d(a)$ を以下のように定義するとき，この除数方式は緩和除数方式と呼ばれる [5]．$-\infty<\theta<+\infty$ はパラメータであり，下付きの添え字として丸め関数に明示する[¶]．$a\in\mathbb{Z}_+$ に対して，丸め関数 $d_\theta(a)$ を

$$d_\theta(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{(a+1)^{a+1}}{a^a} & \theta=1 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{\log\frac{a+1}{a}} & \theta=0 \text{ のとき} \\ \left(\dfrac{(a+1)^\theta - a^\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}} & \theta\ne 1,0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.1}$$

と定義し，$d_\theta(0)$ を

$$d_\theta(0) = \begin{cases} 0 & \theta\le 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.37 & \theta=1 \text{ のとき} \\ \left(\dfrac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}} & \text{上記以外のとき} \end{cases} \tag{2.2}$$

と定義する．

[‡]ここの $x>0$ は除数と呼ばれる．Hill 方式などのように，$d(0)=0$ ならば $h\ge s$ が必要である．
[§]明らかに，S_+ の非空性を保証するには $h\ge 1$ が必要である．
[¶]論文 [5] では θ の代わりに $n+1$ を用いている．

2.2. Stolarsky 平均とその性質

ここでは，緩和除数方式の比例性を証明するために必要な事柄を簡潔に述べる．正の実数の集合 $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x > 0\}$ と実数の集合 $\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ を定義する．

定義 2.3. 二つの実数パラメータ $\theta, \omega \in \mathbb{R}$ を用いて，異なる正の 2 数 $x \neq y \in \mathbb{R}_+$ の平均

$$u(x, y; \theta, \omega) = \begin{cases} \left(\frac{\omega(x^\theta - y^\theta)}{\theta(x^\omega - y^\omega)}\right)^{\frac{1}{\theta-\omega}} & \theta\omega(\theta-\omega) \neq 0 \text{ のとき} \\ \left(\frac{x^\theta - y^\theta}{\theta(\log x - \log y)}\right)^{\frac{1}{\theta}} & \theta \neq 0,\, \omega = 0 \text{ のとき} \\ \left(\frac{x^\omega - y^\omega}{\omega(\log x - \log y)}\right)^{\frac{1}{\omega}} & \theta = 0,\, \omega \neq 0 \text{ のとき} \\ \exp\left(\frac{x^\theta \log x - y^\theta \log y}{x^\theta - y^\theta} - \frac{1}{\theta}\right) & \theta = \omega \neq 0 \text{ のとき} \\ \sqrt{xy} & \theta = \omega = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.3}$$

を定義する．これは二つのパラメータを持つ Stolarsky 平均と呼ばれる．

明らかに，$u(x, y; \theta, \omega)$ は x, y および θ, ω に関して対称である．$u(x, y; \theta, \omega)$ は正の x と y の平均なので，任意の $\theta, \omega \in \mathbb{R}$ に対して

$$\min\{x, y\} < u(x, y; \theta, \omega) < \max\{x, y\} \tag{2.4}$$

となる [6].

定義 2.4. 正の $x \in \mathbb{R}_+$ と実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，

$$u(x, \theta) = u(x+1, x; \theta, 1) \tag{2.5}$$

を定義する．

補題 2.1. $a \in \mathbb{Z}_0$ に対して

$$d_\theta(a) = u(a, \theta)$$

となる．ただし，

$$u(0, \theta) = \lim_{x \to +0} u(x, \theta)$$

とする．

証明 $a \in \mathbb{Z}_+$ に対しては，定義式 (2.1) と (2.3) を比較すれば明らかである．よって，$a = 0$ の場合のみを考える．$\theta > 0$ でかつ $\theta \neq 1$ ならば，定義式 (2.3) の 1 番目より

$$u(0, \theta) = \lim_{x \to +0} \left(\frac{(x+1)^\theta - x^\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}$$

より，$d_\theta(0) = u(0, \theta)$ となる．

つぎに，$\theta < 0$ の場合を考える．同じく，定義式 (2.3) の 1 番目を利用するが，$\alpha = -\theta > 0$ とおくと，

$$\begin{aligned} \left(\frac{(x+1)^\theta - x^\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}} &= \left(\frac{(x+1)^{-\alpha} - x^{-\alpha}}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{-\alpha-1}} \\ &= \left(\frac{-\alpha}{(x+1)^{-\alpha} - x^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\ &= \left(\frac{\alpha x^\alpha (x+1)^\alpha}{(x+1)^\alpha - x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$u(0,\theta)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\alpha x^{\alpha}(x+1)^{\alpha}}{(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}=0$$

となり，$d_\theta(0)=u(0,\theta)$ となる．

$\theta=1$ ならば，定義式 (2.3) の 4 番目より

$$u(0,1)=\lim_{x\to+0}\exp\left(\frac{(x+1)\log(x+1)-x\log x}{(x+1)-x}-1\right)$$

となるが，$\lim_{x\to+0}x\log x=0$ なので，$u(0,1)=1/\mathrm{e}$ となり，$d_1(0)=u(0,1)$ が得られる．

$\theta=0$ ならば，定義式 (2.3) の 3 番目より

$$u(0,0)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\log\frac{x+1}{x}}=0$$

となり，$d_0(0)=u(0,0)$ が得られる． □

補題 2.2. $u(x,\theta)$ の x に関する導関数を $u_x(x,\theta)$ とすると，

$$\frac{u_x(x,\theta)}{u(x,\theta)}=\frac{1}{u(x+1,x;\theta,\theta-1)},\qquad x\in\mathbb{R}_+,\ \theta\in\mathbb{R}$$

となる．

証明 $\theta\neq1,0$ とする．このとき，定義式 (2.3), (2.5) より

$$u(x,\theta)=\left(\frac{(x+1)^{\theta}-x^{\theta}}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}\tag{2.6}$$

となる．両辺の対数を取って，x で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{u_x(x,\theta)}{u(x,\theta)}&=\frac{\theta}{\theta-1}\times\frac{(x+1)^{\theta-1}-x^{\theta-1}}{(x+1)^{\theta}-x^{\theta}}\\&=\frac{1}{\frac{\theta-1}{\theta}\frac{(x+1)^{\theta}-x^{\theta}}{(x+1)^{\theta-1}-x^{\theta-1}}}\end{aligned}$$

となるが，

$$u(x+1,x;\theta,\theta-1)=\left(\frac{(\theta-1)\big((x+1)^{\theta}-x^{\theta}\big)}{\theta\big((x+1)^{\theta-1}-x^{\theta-1}\big)}\right)^{\frac{1}{\theta-(\theta-1)}}$$

に注意すると，

$$\frac{u_x(x,\theta)}{u(x,\theta)}=\frac{1}{u(x+1,x;\theta,\theta-1)}$$

が得られる．

つぎに，$\theta=1$ の場合を考える．定義式 (2.3), (2.5) より

$$\begin{aligned}u(x,1)&=\exp\left(\frac{(x+1)\log(x+1)-x\log x}{(x+1)-x}-1\right)\\&=\exp\left((x+1)\log(x+1)-x\log x-1\right),\end{aligned}$$

すなわち，

$$\log u(x,1) = (x+1)\log(x+1) - x\log x - 1$$

となる．つぎに，x で微分すると

$$\frac{u_x(x,1)}{u(x,1)} = \log(x+1) + 1 - \log x - 1 = \log\frac{x+1}{x}$$

が得られ，

$$u(x+1,x;1,0) = \frac{(x+1)-x}{\log(x+1)-\log x} = \frac{1}{\log\frac{x+1}{x}}$$

に注意すると，

$$\frac{u_x(x,1)}{u(x,1)} = \frac{1}{u(x+1,x;1,0)}$$

が得られる．

最後に，$\theta = 0$ の場合を考える．定義式 (2.3), (2.5) より

$$u(x,0) = \frac{1}{\log\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{\log(x+1)-\log x},$$

すなわち，

$$\log(x+1) - \log x = \frac{1}{u(x,0)}$$

となるが，x で微分すると

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{u_x(x,0)}{(u(x,0))^2}$$

となる．これを書き換えると

$$\frac{u_x(x,0)}{u(x,0)} = -\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)u(x,0) = \frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{(-1)(\log(x+1)-\log x)}$$

が得られる．一方，

$$u(x+1,x;0,-1) = \left[\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{(-1)(\log(x+1)-\log x)}\right]^{-1}$$

に注意すると，

$$\frac{u_x(x,1)}{u(x,1)} = \frac{1}{u(x+1,x;1,0)}$$

が得られる． □

補題 2.3. 正の定数 $c > 0$ を固定する．正の実数 $1/c < x \in \mathbb{R}_+$ と実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$y(x) = \frac{u(cx-1,\theta)}{u(x,\theta)} \tag{2.7}$$

を定義すると，$y(x)$ は狭義増加関数となる．

証明　等式 (2.7) の対数を取り x で微分し，さらに，補題 2.2 を用いると，

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{c}{u(cx, cx-1; \theta, \theta-1)} - \frac{1}{u(x+1, x; \theta, \theta-1)}$$

が得られる．

$u(cx, cx-1; \theta, \theta-1)$ は $cx-1$ と cx の平均なので，式 (2.4) より

$$x - \frac{1}{c} < \frac{u(cx, cx-1; \theta, \theta-1)}{c} < x$$

となる．また，$u(x+1, x; \theta, \theta-1)$ は x と $x+1$ の平均なので，

$$0 < x - \frac{1}{c} < \frac{u(cx, cx-1; \theta, \theta-1)}{c} < x < u(x+1, x; \theta, \theta-1)$$

の関係が成り立つ．よって，$y'(x)/y(x) > 0$ となる．さらに，式 (2.7) の分子に関して，$u(cx-1, \theta) > cx-1 > 0$ に注意すると，$y(x) > 0$ である．すなわち，$y'(x) > 0$ となり，$y(x)$ は狭義増加関数となる．□

2.3. 緩和除数方式の比例性の証明

定理 2.1. 緩和除数方式は比例方式である．

証明　除数方式 M は一様性を持つことに注意する．一様性とは，州全体 S にわたる議席配分 $\boldsymbol{a}$ は，任意の 2 州 i と j だけで $a_i + a_j$ 議席を配分し直しても，この 2 州のどちらにとっても，配分 (a_i, a_j) よりも良い結果を得ることはできないという性質である．すなわち，

$$\boldsymbol{a} \in M(\boldsymbol{p}, h) \Longrightarrow (a_i, a_j) \in M((p_i, p_j), a_i + a_j) \qquad \forall\, i \neq j \in S$$

となる性質である（詳しくは [1] 参照）．

ある有理数 $0 < \lambda < 1$ が存在し，$a(S) = h$ となる議席配分 $\boldsymbol{a}$ に対して，$b_i = \lambda a_i \;\; (i \in S)$ がすべて非負の整数と仮定する．このとき，除数方式 M の一様性から，比例性を示すには，任意の 2 州 i と j に対して，

$$(a_i, a_j) \in M((p_i, p_j), a_i + a_j) \Longrightarrow \{(b_i, b_j)\} = M((p_i, p_j), b_i + b_j) \tag{2.8}$$

を証明すれば十分である．

以下では，州 i を州 1 とし，州 j を州 2 とする．b_1, b_2 の値に応じて場合分けを行うが，最初に $b_1 \geq 1, b_2 \geq 1$ の場合を考え，他の場合は証明の最後で議論する．さらに，λ は定数で

$$\lambda a_1 = b_1, \quad \lambda a_2 = b_2, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{2.9}$$

を満たすと仮定していることに注意する．

除数方式 M は人口ベクトル $\boldsymbol{p}$ を $\mu\boldsymbol{p}$ $(\mu > 0)$ に変更しても，配分は変化しない性質を持っている．すなわち，

$$M(\boldsymbol{p}, h) = M(\mu\boldsymbol{p}, h) \qquad \forall\, \mu > 0$$

となる．ここで，$\mu > 0$ は実数である．これを除数方式の同次性 [1] と呼んでいる[‖]．この同次性より，以下の証明では人口は正の実数と仮定する．

‖ 厳密には [1] では，同次性（μ を有理数に限定）と完備性（μ を実数に拡大）と二段階に分けて記述している．

つぎに，$p_1 > 0, p_2 > 0$ 平面（正の実平面）を考える．いま，$b_1 \geq 1, b_2 \geq 1$，および，式 (2.9) を仮定していることから，$a_1 > b_1 \geq 1, a_2 > b_2 \geq 1$，言い換えれば，$a_1 \geq 2, a_2 \geq 2, b_1 \geq 1, b_2 \geq 1$ に注意する．つぎの二つの（空でない）4 角形 $S(a_1, a_2)$ と $S(b_1, b_2)$ を

$$
\begin{aligned}
S(a_1, a_2) &= \{(p_1, p_2) \mid d(a_1 - 1) \leq p_1 \leq d(a_1), d(a_2 - 1) \leq p_2 \leq d(a_2)\}, \\
S(b_1, b_2) &= \{(p_1, p_2) \mid d(b_1 - 1) \leq p_1 \leq d(b_1), d(b_2 - 1) \leq p_2 \leq d(b_2)\}
\end{aligned}
$$

と定義する．このとき，丸め関数の定義より，上記定義 2 式から，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
(p_1, p_2) \in S(a_1, a_2) &\Longrightarrow (a_1, a_2) \in M((p_1, p_2), a_1 + a_2) \\
\text{点 } (p_1, p_2) \text{ が } S(b_1, b_2) \text{ の内点} &\Longrightarrow \{(b_1, b_2)\} = M((p_1, p_2), b_1 + b_2)
\end{aligned}
$$

の関係が導かれる．4 角形 $S(a_1, a_2)$ を $0 < \lambda < 1$ 倍して，これを縮小すると，その領域

$$
\lambda S(a_1, a_2) = \{(p_1, p_2) \mid \lambda d(a_1 - 1) \leq p_1 \leq \lambda d(a_1), \lambda d(a_2 - 1) \leq p_2 \leq \lambda d(a_2)\}
$$

は再び 4 角形となるが，その縮小された 4 角形 $\lambda S(a_1, a_2)$ が別の 4 角形 $S(b_1, b_2)$ に完全に含まれることが，式 (2.8) の関係が成り立つための必要十分条件である．言い換えれば，つぎの条件式

$$
d(b_1 - 1) < \lambda d(a_1 - 1),\ \lambda d(a_1) < d(b_1),\ d(b_2 - 1) < \lambda d(a_2 - 1),\ \lambda d(a_2) < d(b_2)
$$

が成り立てばよい．これらの 2 番目と 3 番目の不等式，および，1 番目と 4 番目の不等式から定数 λ を消去すると，式 (2.8) の関係が成り立つための必要十分条件は

$$
\frac{d(b_2 - 1)}{d(b_1)} < \frac{d(a_2 - 1)}{d(a_1)}, \quad \frac{d(b_1 - 1)}{d(b_2)} < \frac{d(a_1 - 1)}{d(a_2)} \tag{2.10}
$$

となる．

さて，補題 2.3 より，$1/c < x < x'$ とすると，

$$
\frac{u(cx - 1, \theta)}{u(x, \theta)} < \frac{u(cx' - 1)}{u(x', \theta)}
$$

となる．つぎに，$c = b_2/b_1$ とおく．いま，$b_1 \geq 1, b_2 \geq 1$ なので，$c > 0$ となる．十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$x = b_1 + \varepsilon$，$x' = a_1$ とおくと，($c = a_2/a_1$ および $x' = a_1 > b_1 + \varepsilon = x$ に注意する）

$$
\frac{u(b_2 + (b_2/b_1)\varepsilon - 1, \theta)}{u(b_1 + \varepsilon, \theta)} < \frac{u(a_2 - 1, \theta)}{u(a_1, \theta)}
$$

となる．補題 2.3 の中で定義された関数 $y(x)$ $(x > 1/c)$ の狭義増加性より，また，$u(x, \theta)$ の $x \geq 0$ に関する連続性より，$\varepsilon \to 0$ のとき

$$
\frac{u(b_2 - 1, \theta)}{u(b_1, \theta)} < \frac{u(a_2 - 1, \theta)}{u(a_1, \theta)}
$$

の関係が得られる．同様に，$c = b_1/b_2$ と置くことにより

$$
\frac{u(b_1 - 1, \theta)}{u(b_2, \theta)} < \frac{u(a_1 - 1, \theta)}{u(a_2, \theta)}
$$

の関係が得られる．補題 2.1 より，2 本の不等式 (2.10) が成り立つことが分かる．

つぎに，$b_1 \geq 1, b_2 = 0$ の場合を考える．このとき，定数 λ の定義式 (2.9) より，$a_1 > b_1 \geq 1$ かつ $a_2 = b_2 = 0$ であることに注意する．さらに，$d(0) > 0$ となっていることにも注意する．($d(0) = 0$ ならば決して $(a_1, 0)$，$a_1 \geq 2$ という配分は実現しない．) つぎの二つの（空でない）4 角形 $S(a_1, 0)$ と $S(b_1, 0)$ を

$$S(a_1, 0) = \{(p_1, p_2) \mid d(a_1 - 1) \leq p_1 \leq d(a_1), 0 \leq p_2 \leq d(0)\},$$
$$S(b_1, 0) = \{(p_1, p_2) \mid d(b_1 - 1) \leq p_1 \leq d(b_1), 0 \leq p_2 \leq d(0)\}$$

と定義する．さらに，4 角形 $S(a_1, 0)$ の底辺 B を

$$B = \{(p_1, 0) \mid d(a_1 - 1) \leq p_1 \leq d(a_1)\}$$

と定義する．このとき，丸め関数の定義より，

$$(p_1, p_2) \in S(a_1, 0) \backslash B \Longrightarrow (a_1, 0) \in M((p_1, p_2), a_1)$$
$$(p_1, p_2) \text{ が } S(b_1, 0) \text{ の内点} \Longrightarrow \{(b_1, 0)\} = M((p_1, p_2), b_1)$$

の関係が導かれる．4 角形 $S(a_1, 0)$ を $0 < \lambda = b_1/a_1 < 1$ 倍して，これを縮小すると，その領域

$$\lambda S(a_1, 0) = \{(p_1, p_2) \mid \lambda d(a_1 - 1) \leq p_1 \leq \lambda d(a_1), 0 \leq p_2 \leq \lambda d(0)\}$$

は再び 4 角形となるが，その縮小された 4 角形 $\lambda S(a_1, 0)$ から，その底辺を除いた領域が別の 4 角形 $S(b_1, 0)$ に完全に含まれることが，式 (2.8) の関係が成り立つための必要十分条件である．言い換えれば，つぎの条件式

$$d(b_1 - 1) < \lambda d(a_1 - 1),\ \lambda d(a_1) < d(b_1)$$

が成り立てばよい．これらの不等式から定数 λ を消去すると，式 (2.8) の関係が成り立つための必要十分条件は

$$\frac{d(b_1 - 1)}{d(b_1)} < \frac{d(a_1 - 1)}{d(a_1)} \tag{2.11}$$

となる．補題 2.3 において，$c = 1$ とおいて，以前と同様にすれば，不等式 (2.11) が得られる．

$b_1 = 0, b_2 \geq 1$ の場合は，上記と同様にして証明できる．また，$b_1 = b_2 = 0$ の場合は，$a_1 = a_2 = 0$ なので，明らかに式 (2.8) の関係が成り立つ． □

3．緩和除数方式と歴史上の 5 方式の関係

命題 3.1． 緩和除数方式は $\theta = -1$ のとき Hill 方式であり，$\theta = 2$ のとき Webster 方式である．

証明 $\theta = -1$ を $d_\theta(a)$ の定義式 (2.1) に代入すると $d_{-1}(a) = \sqrt{a(a+1)}$ が得られる．すなわち，Hill 方式の丸め関数である．同様に，$\theta = 2$ を $d_\theta(a)$ の定義式に代入すると $d_2(a) = a + \frac{1}{2}$ が得られる．すなわち，Webster 方式の丸め関数である． □

Jefferson 方式と Adams 方式は緩和除数方式ではないが，緩和除数方式はパラメータ θ の極限ではそれぞれの方式に収束する．

命題 3.2. $\theta \to +\infty$ の極限において，緩和除数方式は Jefferson 方式に一致し，$\theta \to -\infty$ では Adams 方式に一致する．

証明 $\theta \to +\infty$ を考える．その定義式 (2.1)，(2.2) より $a \in \mathbb{Z}_0$ のとき，対数を取ることにより

$$\log d_\theta(a) = \frac{\log((a+1)^\theta - a^\theta)}{\theta - 1} - \frac{\log \theta}{\theta - 1} \tag{3.1}$$

が導かれる．いま，式 (3.1) の第 1 項の分子は

$$\log((a+1)^\theta - a^\theta) = \log\left[(a+1)^\theta \left\{1 - \left(\frac{a}{a+1}\right)^\theta\right\}\right]$$

なので，$a \in \mathbb{Z}_+$ ならば (3.1) 式の第 1 項の分母と分子は $\theta \to +\infty$ ではどちらも $+\infty$ になる．ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \to +\infty} \frac{\log((a+1)^\theta - a^\theta)}{\theta - 1} &= \lim_{\theta \to +\infty} \frac{(a+1)^\theta \log(a+1) - a^\theta \log a}{(a+1)^\theta - a^\theta} \\ &= \lim_{\theta \to +\infty} \frac{\log(a+1) - (\frac{a}{a+1})^\theta \log a}{1 - (\frac{a}{a+1})^\theta} \\ &= \log(a+1)\end{aligned}$$

となる．一方，第 2 項は

$$\lim_{\theta \to +\infty} \frac{\log \theta}{\theta - 1} = \lim_{\theta \to +\infty} \frac{1}{\theta} = 0$$

となる．故に，式 (3.1) より，$\log d(a) = \log(a+1)$，すなわち，$d(a) = a+1 \ \ (a \in \mathbb{Z}_+)$ が得られる．式 (3.1) に $a = 0$ を代入し，極限をとると，$\log d(0) = 0$，すなわち，$d(0) = 1$ が得られる．よって，Jefferson 方式の丸め関数が得られた．同様にして，$\theta \to -\infty$ で $d(a) \to a$ が導かれる．すなわち，Adams 方式が得られる． □

命題 3.3. $\theta = -4$ の緩和除数方式と Dean 方式は以下の意味で実用上等しい．(i) 両者の丸め関数の差は $1 \leq a \leq 20$ のとき小さい．(ii) 丸め関数の 5 乗の相対差は $a \geq 1$ のとき減少する．

証明 $\theta = -4$ を式 (2.1) に代入し，$d_{-4}(a) \geq 0$ の 5 乗を考える．さらに，Dean 方式の丸め関数 $d_{\mathrm{D}}(a) = 2a(a+1)/(2a+1) \geq 0$，すなわち，連続する 2 整数 a と $a+1$ の調和平均の 5 乗を考え，両者の絶対差を求めると，

$$(d_{-4}(a))^5 - \left(\frac{2a(a+1)}{2a+1}\right)^5 = \frac{4a^4(a+1)^4}{(2a+1)^5(2a^2+2a+1)} \tag{3.2}$$

が得られる．よって，$a \in \mathbb{Z}_+$ に対し，$d_{-4}(a) > d_{\mathrm{D}}(a)$ となる．もちろん，$a = 0$ ならば，両方の丸め関数は 0 に等しく，両者に差はない．

さらに，それぞれの丸め関数の 5 乗の相対差を求めると，

$$\frac{(d_{-4}(a))^5 - \left(\frac{2a(a+1)}{2a+1}\right)^5}{\left(\frac{2a(a+1)}{2a+1}\right)^5} = \frac{1}{8a(a+1)(2a^2+2a+1)}$$

となり，$a \geq 1$ が増加すると，二つの丸め関数の 5 乗の相対差が減少し，二つの丸め関数が近づく．

一方，$1 \leq a \leq 20$ の範囲で，両方の丸め関数値を計算してみると，表 2 のようになり，両者は実質上等しいことが確認できる． □

表 2: $d_{-4}(a)$ と Dean 方式の丸め関数の値，および，両者の差

a	$d_{-4}(a)$	$\frac{2a(a+1)}{2a+1}$	絶対差	a	$d_{-4}(a)$	$\frac{2a(a+1)}{2a+1}$	絶対差
1	1.3367	1.3333	0.0033	11	11.4783	11.4783	0.0000
2	2.4008	2.4000	0.0008	12	12.4800	12.4800	0.0000
3	3.4289	3.4286	0.0003	13	13.4815	13.4815	0.0000
4	4.4446	4.4444	0.0001	14	14.4828	14.4828	0.0000
5	5.4546	5.4545	0.0001	15	15.4839	15.4839	0.0000
6	6.4616	6.4615	0.0000	16	16.4849	16.4848	0.0000
7	7.4667	7.4667	0.0000	17	17.4857	17.4857	0.0000
8	8.4706	8.4706	0.0000	18	18.4865	18.4865	0.0000
9	9.4737	9.4737	0.0000	19	19.4872	19.4872	0.0000
10	10.4762	10.4762	0.0000	20	20.4878	20.4878	0.0000

最後に，θ 軸上で，いくつかの配分方式の位置関係を考え，その結果を表 3 にまとめる．命題 3.2 より，Jefferson 方式は $\theta \to +\infty$ の無限遠に位置し，Adams 方式は $\theta \to -\infty$ の無限遠に位置する．前者は大州に大きな偏りを与え，後者は小州に大きな偏りを与える．命題 3.3 より，Dean 方式は $\theta \approx -4$ の位置に存在する．これも Adams 方式ほど極端ではないが小州に偏りを与える．一方，命題 3.1 より，Webster 方式は $\theta = 2$ の位置にあり，Hill 方式は $\theta = -1$ の位置にある．偏りはどちらも甲乙付け難く，偏りは非常に小さい．また，パラメータ θ の増加に対して，小州への偏りは減少し，大州への偏りは増加するので [5]，θ の値が -1 から 2 あたりに，偏りを最小にする値が存在しそうである．そこで，著者は最適な θ の値の近くにあると推察される，$\theta = 3, 2, 1, 0, -1$ に対応する配分方式を新 5 方式として提案した [4]．“1/3” 方式は [4]，Theil 方式は [7]，Theil and Schrage 方式は [8] で提案されている．新 5 方式は Webster 方式と Hill 方式を含み，かなり妥当な配分方式のクラスと思われる．論文 [5] のシミュレーションの結果では Webster 方式の偏りが，新 5 方式の中で，最小となっている（論文 [5] の図 1 参照）．ただし，理論的には未解決問題である．

参考文献

[1] M. L. Balinski and H. P. Young: *Fair Representation* (Yale University Press, New Haven, 1982).

[2] L. R. Ernst: Apportionment methods for the House of Representatives and the court challenges. *Management Science*, **40** (1994), 1207–1227.

[3] E. V. Huntington: The apportionment of representatives in Congress. *Transactions of the American Mathematical Society*, **30** (1928), 85–110.

[4] T. Ichimori: New apportionment methods and their quota property. *JSIAM Letters*, **2** (2010), 33–36.

[5] T. Ichimori: Relaxed divisor methods and their seat biases. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **55** (2012), 63–72.

[6] K. B. Stolarsky: Generalizations of the logarithmic mean. *Mathematics Magazine*, **48** (1975), 87–92.

表 3: θ の値と配分方式の関係

θ	配分方式の名前	緩和除数方式か否か	偏り
$\to +\infty$	Jefferson	非緩和除数方式	大州に大きな偏り
$\vdots$			
3	1/3	緩和除数方式	
2	Webster	緩和除数方式	僅かな偏り
1	Theil	緩和除数方式	
0	Theil and Schrage	緩和除数方式	
-1	Hill	緩和除数方式	僅かな偏り
$\vdots$			
≈ -4	Dean	非緩和除数方式	小州に偏り
$\vdots$			
$\to -\infty$	Adams	非緩和除数方式	小州に大きな偏り

[7] H. Theil: The desired political entropy. *American Political Science Review*, **63** (1969), 521–525.

[8] H. Theil and L. Schrage: The apportionment problem and the European Parliament. *European Economic Reviews*, **9** (1977), 247–263.

[9] W. F. Willcox: The apportionment of representatives. *American Economic Review*, Supplement **6** (1916), 3–16.

一森哲男
大阪工業大学
情報科学部情報システム学科
〒 573-0196 大阪府枚方市北山一丁目 79-1
E-mail: ichimori@is.oit.ac.jp

ABSTRACT

ON THE PROPORTIONALITY OF THE RELAXED DIVISOR METHOD AND THE RELATIONSHIP BETWEEN THE FIVE HISTORICAL METHODS AND THE RELAXED DIVISOR METHODS

Tetsuo Ichimori
Osaka Institute of Technology

This paper treats the apportionment problem where seats in a legislature are distributed based proportionally on the population of electoral districts. The purpose of this paper is to establish that the relaxed divisor method is proportional which has been recently proposed by the author in this journal. Another purpose is to compare the five historical methods derived by Huntington's pairwise comparison tests to all the relaxed divisor methods where the five historical methods are those of Adams, Dean, Hill, Webster and Jefferson.