

## 実質次元減少法による QMC を用いたポートフォリオのリスク指標の推定

鈴木 悠也                      今井 潤一  
慶應義塾大学

(受理 2012 年 5 月 18 日; 再受理 2012 年 8 月 28 日)

**和文概要** 本論文ではポートフォリオのリスク指標の効率的な推定方法を提案する。まずポートフォリオのモデリングにおいて、異なる種類のリスクは異なるパラメータを持つ分布に従う可能性を考慮すべきという問題意識に基づき、新たな分布として群別 GH 分布を提唱する。また、提唱した分布を用いたモデルの下でのポートフォリオ全体の損失分布をシミュレーションにより推定する。この際、損失分布から定まる、バリュアットリスク、及び期待ショートフォールと呼ばれるリスク指標を計算する。リスク指標の推定において、その計算精度の効率化は重要な問題であるため、本論文では準モンテカルロ法における実質次元減少法を適用する。これは元々デリバティブの価格評価において提唱された方法であるが、リスク指標の推定という問題に対しても、他のシミュレーション方法に比べて精度のよい結果が得られることを示す。

**キーワード:** リスク管理, ポートフォリオ, バリュアットリスク, 期待ショートフォール, 準モンテカルロ, GH 分布

### 1. イントロダクション

ロングタームキャピタルマネジメント社 (LTCM) の破綻や、リーマンブラザーズ社の破綻にみられる金融危機から、将来の不確実性 (リスク) とどう向き合っていくのかということがよりいっそう重要な問題であると認識されてきている。この問題を扱うためにリスク管理が必要であり、リスク管理のためには、まずそのリスクの計量化が必要とされる。例えば、保険会社は保険金の支払い義務に備え、運用資産と商品のリスクエクスポージャーを計測しなくてはならない。また、金融機関はバッファとして保有すべき資本額を決定するために、監督機関は金融機関のリスクエクスポージャーを計測する必要がある。

本論文では、ポートフォリオのリスク指標の効率的な計測を目的とする。ポートフォリオのリスク計測は、ほとんどの経済主体が資産として何らかの形でポートフォリオを有していることを鑑みれば、リスク管理の問題として汎用的かつ重要な問題であることが認められるだろう。ポートフォリオのリスクの計測のためには、損失分布から定まる統計量をリスク指標として用いることが多い。その理由として、Embrechts et al. [8] は、“損失分布は総じてポートフォリオの正確な状況を表してくれるという視点には次のように推奨できる点が多い。”とした上で、“損失分布の概念は、単一の証券だけからなるポートフォリオから金融機関の全体ポートフォリオまで、全てのレベルの総計について意味を持つ”こと、“正しく推定されれば、損失分布はネットティングと分散効果を反映する”こと、“損失分布は全てのポートフォリオについて相互比較を行うことができる”ことなどを挙げている。具体的なリスク指標で実際に用いられているものとして最も有名なリスク指標がバリュアットリスク (VaR) であり、これはバーゼル委員会による規制の枠組みの中でも取り入れられている。また、VaR に代わるリスク指標として注目を集めているものとして、期待ショートフォール

があり、本論文ではこの2つの指標の推定を行う。

ポートフォリオのモデリングにおいては、資産価格が何らかの確率変数の関数として表され、その確率変数は資産のリスクファクターと呼ばれる。最も単純で良く知られているポートフォリオのモデルは RiskMetrics [19] によるもので、これは、リスクファクターが多次元正規分布に従い、ポートフォリオの価値はリスクファクターの線形和で表わされるというモデルである。このモデルの利点はその単純さにあり、正規分布の扱いやすさなどの観点からも実務界で広く受け入れられてきた。ただし、リスクファクターが正規分布に従うという仮定に対して、実証分析による反例が数多く挙げられている。早期の研究では Mandelbrot [14] がこれについて言及している。また、リスク管理に関する論文では、Frey and McNeil [9] が正規分布を仮定したモデルと彼らの提唱する極値理論を応用したモデルの比較を行い、正規分布の非適合性を示している。

本論文ではリスクファクターを記述するために Generalized Hyperbolic 分布 (GH 分布) と呼ばれる分布を拡張したモデルを提案する。GH 分布を初めに導入したのは Barndorff-Nielsen [3] であり、Normal Inverse Gaussian 分布 (NIG 分布) や双曲型分布など様々な分布をサブクラスとして持つ。また GH 分布は、分布の形状を設定できるパラメータの数が多く、柔軟性が高いため、様々な金融資産の収益率への当てはまりが良いことが知られており、そのため金融の分野で応用が盛んである。Eberlein and Keller [7] は株価の収益率のデータに対してこの分布を用い、正規分布の仮定よりも比較してあてはまりが良いことを示している。

Daul et al. [6] は、異なるリスクファクターに対してそれが従う確率分布に拡張性を持たせる目的で群別  $t$  コピュラを提唱している。また Glasserman et al. [10] では、各リスクファクターが、Daul et al. [6] の群別  $t$  コピュラを構築する上で現れる群別  $t$  分布に依存している場合の、デリバティブまで含めたポートフォリオの VaR の計算を行っている。本論文では、株価や金利といった異なる種類のリスクファクターに対しては異なるパラメータを持たせつつも依存構造を持たせるという目的のもとで、群別  $t$  分布を GH 分布に拡張して用いるモデルを提案する。GH 分布をベースとしてモデルを構築することにより、群別  $t$  分布を含む、より柔軟性の高いモデリングが可能となる。

ポートフォリオのモデルが定義された後、リスク指標の推定は、正規分布の仮定など解析的なアプローチが可能な場合を除いて、シミュレーションによって行われる。このシミュレーションの方法によってリスク指標の推定精度は変わってくる。シミュレーションはおもにモンテカルロ法 (MC) と呼ばれる乱数を用いた方法により行われることが多いが、計算時間がかかる上に計算精度が良くないことが知られている。この問題を解決するための MC の分散減少法として、インポートランスサンプリング法や、アンティセティックモンテカルロ法などが知られている。一方、この MC で用いられる乱数の代わりにローディスクレパンシー列 (LD 列) と呼ばれる点列を用いる準モンテカルロ法 (QMC) によっても精度を改善できることが知られている。さらに、QMC において更なる推定精度の向上を図るために、実質次元減少法という、問題に適した LD 列の当てはめを行う方法がいくつか提案されている。デリバティブの価格評価において、Caffisch and Moskowitz [5] はブラウニアンブリッジを利用した方法を、Acworth et al. [1] は分散共分散行列の主成分を利用した方法を提唱している。Imai and Tan [11] は新しい実質次元減少法として Linear Transformation (LT) を、Imai and Tan [12] でその方法を拡張した Generalized Linear Transformation (GLT) を提唱し、その問題に適した直交行列を用いて LD 列を変換することにより精度の良い計算が行え

ることを示している。

ポートフォリオのリスク指標に関しては、VaR が劣加法性を満たさないなどの理論上の問題点を持つことから、Artzner et al. [2] の提唱する統合的なリスク指標としての性質を有する期待ショートフォールの概念が提案されている。山井・吉羽 [21] は期待ショートフォールの計算を MC により行い、裾の厚い分布に対して期待ショートフォールの推定値の標準誤差が、VaR の推定値のそれよりもとても大きく、MC による推定が実用に向かない場合があることを示している。Kreinin et al. [13] は、単純な QMC による、RiskMetrics [19] の仮定の下での VaR の計算を行っている。しかし、QMC はリスク管理の分野においては、まだ用いられている例が少ない。そのため本論文では QMC 及び、GLT を用いて効率的なリスク指標の計算手法を提案する。

以上の現状を踏まえ、まとめると、本論文では異なる種類の資産に対して異なる形状のリスクファクターを設定する。そのために、群別 GH 分布という広い分布のクラスを提唱する。次に、群別 GH 分布を用いたポートフォリオのモデリングをする。このモデリングは、十分な拡張性を持つ柔軟性の高いモデリングを目的としている。このモデルのもとで、まだリスク管理の分野においては用いられていない GLT を適用し、ポートフォリオのリスク指標の推定を行う。この結果として、GLT では MC や QMC に比べて十分に精度の良い計算結果が得られることが示される。

本論文の構成は以下のとおりである。まずセクション 2 でポートフォリオのモデリングを行い、リスク指標の概説をする。セクション 3 で本論文における QMC の概説、及び QMC と GLT のアルゴリズムの説明を行う。セクション 4 では数値計算例により GLT によって精度の良い推定ができることを示し、セクション 5 で結論を述べる。

## 2. ポートフォリオのモデルとリスク指標

本セクションでは、ポートフォリオのモデリングとリスク指標の概説を行う。2.1 節で多次元 GH 分布の定義を行う。次に 2.2 節において本論文のモデルで用いる各リスクファクターを記述するための群別 GH 分布を定義する。その後、2.3 節において本論文におけるポートフォリオのモデリングを行い、ポートフォリオの損失を定義する。2.4 節では、本論文で推定するリスク指標について概説する。

### 2.1. 多次元 GH 分布

本節では、多次元 GH 分布の定義を行う。以下では起こりうるすべての結果の標本集合  $\Omega$ 、 $\Omega$  の部分集合族からなる  $\sigma$ -加法族  $\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{F}$  上の確率測度  $P$  からなる確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  が与えられているものとして議論を行う。

GH 分布は Generalized Inverse Gaussian 分布 (GIG 分布) に従う混合変数による正規平均分散混合として定義される。GIG 分布は 3 つのパラメータ  $\lambda, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$  によって記述される分布である。1 変量の GIG 分布と GH 分布に関しては増田 [15] に詳しい記述がある。正規平均分散混合は以下で定義される。

定義 2.1.  $W$  を正の実数上に分布する確率変数とし、 $Z$  を  $W$  と独立で分散共分散行列  $\Lambda$  を持ち、平均 0 の  $d$  次元正規確率変数とし、これを  $Z \sim N_d(0, \Lambda)$  と書く。このとき、 $\beta, \mu \in \mathbb{R}^d$  に対し

$$X = \mu + W\beta + \sqrt{W}Z, \quad (2.1)$$

で定義される新しい確率変数  $X$  は、混合変数  $W$  による正規平均分散混合と呼ぶ。

$W$  はしばしば混合分布 (mixing distribution) とも呼ばれる。(2.1) 式の  $W$  をパラメータ  $\lambda, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$  を持つ GIG 分布に従う確率変数, 以下  $W \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$  と表記, とおくことにより GH 分布が次のように定義される.

**定義 2.2.**  $W \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$ ,  $Z \sim N_d(0, \Lambda)$ ,  $W$  と  $Z$  が独立のとき,  $\beta, \mu \in \mathbb{R}^d$  に対して, 混合変数  $W$  による正規平均分散混合  $X$  の分布が多次元 GH 分布であり,  $X \sim GH_d(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, \Lambda)$  と表記する. ただし,  $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + \beta^T \Lambda \beta}$  で,  $\beta^T$  は  $\beta$  の転置を表わす.

多次元 GH 分布の性質を以下で簡単に述べる. 確率密度関数を  $p_{GH_d}$  とおくと,  $p_{GH_d}$  は以下の式で与えられる.

$$p_{GH_d}(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu, \Lambda) = \frac{e^{(\beta^T(x-\mu))} (A/\delta)^\lambda K_{\lambda-d/2}(2\alpha B(x))}{(\det \Lambda)^{1/2} (2\pi)^{d/2} K_\lambda(\delta A) (B(x)/\alpha)^{d/2-\lambda}}.$$

ここで,  $\det \Lambda$  は  $\Lambda$  の行列式,

$$A := \sqrt{\alpha^2 - \beta^T \Lambda \beta},$$

$$B(x) := \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^T \Lambda^{-1} (x - \mu)},$$

であり  $K_\lambda(\cdot)$  は指数  $\lambda$  を持つ修正された第三種のベッセル関数である. 各々のパラメータは

$$\lambda > 0 \text{ のとき, } \quad \delta \geq 0, \alpha > 0, \alpha^2 > \beta^T \Lambda \beta,$$

$$\lambda = 0 \text{ のとき, } \quad \delta > 0, \alpha > 0, \alpha^2 > \beta^T \Lambda \beta,$$

$$\lambda < 0 \text{ のとき, } \quad \delta > 0, \alpha \geq 0, \alpha^2 \geq \beta^T \Lambda \beta,$$

を満たす.  $\lambda$  は分布族を決定するパラメータであり,  $\lambda = -0.5$  のときは NIG 分布,  $\lambda = 1$  のときは双曲分布など,  $\lambda$  の値によって名前の付いている分布もある.  $\alpha$  は尖度と裾の厚さを,  $\beta$  は非対称性を,  $\delta$  は尺度を,  $\mu$  は位置を表すパラメータと解釈できる. また, 期待値は,

$$E[X] = \mu + \delta \frac{K_{\lambda+1}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^T \Lambda \beta})}{K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^T \Lambda \beta})} \beta^T \Lambda^{1/2} (\alpha^2 - \beta^T \Lambda \beta)^{-1/2} \Lambda^{1/2},$$

で与えられる.

## 2.2. 群別 GH 分布

本節では, 本論文で提唱する群別 GH 分布の定義を行う. 群別 GH 分布とは, Daul et al. [6] の群別  $t$  コピュラを構築する上で登場する群別  $t$  分布を GH 分布に拡張したものであり, (2.1) 式の  $W$  のパラメータが群ごとに異なるものである. 群別 GH 分布を定義するために, まず共単調の定義を行う. 本来, 共単調の定義はコピュラを用いて行われるが, 本論文ではその定義と同値な命題により定義を行う. 共単調のコピュラを用いた定義, 及び定義の同値性については Embrechts et al. [8] を参照されたい.

**定義 2.3.** 確率変数  $X_1, \dots, X_d$  が共単調であるとは, ある確率変数  $Z$  と単調増加関数  $v_1, \dots, v_d$  が存在して,

$$(X_1, \dots, X_d) =^d (v_1(Z), \dots, v_d(Z)), \quad (2.2)$$

となることである. ここで  $=^d$  は分布として等しいことを表す.

次に, 多次元 GH 分布の定義を行う.

定義 2.4.  $\{1, \dots, d\}$  を大きさが  $s_1, s_2, \dots, s_m$  である部分集合に分割する.  $W_i \sim GIG_i(\lambda_i, \delta_i, \gamma_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $Z \sim N_d(0, \Lambda)$ , 各  $W_i$  は互いに共単調で,  $Z$  とは独立のとき,  $\beta, \mu \in R^d$  に対し,

$$\begin{aligned} X &= (X_1, \dots, X_{s_1}, X_{s_1+1}, \dots, X_{s_1+s_2}, \dots, X_d) \\ &= (\mu_1 + W_1\beta_1 + \sqrt{W_1}Z_1, \dots, \mu_{s_1} + W_1\beta_{s_1} + \sqrt{W_1}Z_{s_1}, \mu_{s_1+1} + W_2\beta_{s_1+1} + \sqrt{W_2}Z_{s_1+1}, \\ &\quad \dots, \mu_{s_1+s_2} + W_2\beta_{s_1+s_2} + \sqrt{W_2}Z_{s_1+s_2}, \dots, \mu_d + W_m\beta_d + \sqrt{W_m}Z_d), \end{aligned}$$

としたときの,  $X$  の分布を群別 GH 分布と定義する.

GIG 分布から受け継いだパラメータを群ごとに変更することにより, 異なるリスクファクターに対して, 異なる分布族や非対称性を持たせることができる. 群を 1 つとすることで多次元 GH 分布となる.

### 2.3. ポートフォリオ

本節では, 本論文でのポートフォリオのモデリングを行い, ポートフォリオの損失を記述する. まず群別 GH 分布を用いて, 本論文におけるポートフォリオの損失を定義する. また, 現時点を 0 とし, リスク計測期間  $t$  を固定する. 株と金利のリスクファクターで群を二つに分ける. 株の銘柄数を  $s_1$ , 割引債の満期の種類を  $s_2$  とし,  $s_1 + s_2 = d$  とする. つまり, 定義 2.4 のリスクファクターのベクトル  $X$  が

$$\begin{aligned} X &= (X_1, \dots, X_{s_1}, X_{s_1+1}, \dots, X_d) \\ &= (\mu_1 + W_1\beta_1 + \sqrt{W_1}Z_1, \dots, \mu_{s_1} + W_1\beta_{s_1} + \sqrt{W_1}Z_{s_1}, \mu_{s_1+1} + W_2\beta_{s_1+1} + \sqrt{W_2}Z_{s_1+1}, \\ &\quad \dots, \mu_d + W_2\beta_d + \sqrt{W_2}Z_d). \end{aligned}$$

となっている場合を考える. ある株  $i$  ( $1 \leq i \leq s_1$ ) の時点  $t$  での株価を  $S_i \exp(X_i)$  とし, 満期が  $t < t_j$  の時点  $t$  での割引債  $j$  ( $s_1 + 1 \leq j \leq d$ ) の価格は, デフォルトのない単一の金利を想定し, すべての利回りをリスクファクターとして扱い,  $\exp((t - t_j)X_j)$  とする. 各資産の損失を, 現時点での価値からリスク計測期間後の価値を引いたものと定義すると, ポートフォリオ全体の損失は次の式に従う.

$$L(X) = -\left(\sum_{i=1}^{s_1} p_i S_i (\exp(X_i) - 1) + \sum_{j=s_1+1}^d p_j (\exp((t - t_j)X_j) - 1)\right). \quad (2.3)$$

ただし,  $p_i$  は資産  $i$  のポジションである.

### 2.4. リスク指標

本節では, 本論文で取り扱うリスク指標のバリューアットリスク (VaR) と期待ショートフォール (ES) の定義, 及び整合性の観点からその性質について述べる. まず, VaR の定義を行う.

定義 2.5. ある  $p \in (0, 1)$  が与えられたとき, ポートフォリオに対する信頼水準  $p$  の  $VaR_p$  は,

$$VaR_p = \inf\{l \in R : P(L > l) \leq 1 - p\},$$

である.

次に, 期待ショートフォールの定義を行う.

定義 2.6. ポートフォリオの損失  $L$  が  $E(|L|) < \infty$  を満たし、分布関数  $F_L$  を持つとき  $F_L$  の分位関数  $q_u(F_L)$  を用いて、信頼水準  $p \in (0, 1)$  の期待ショートフォール  $ES_p$  は

$$ES_p = \frac{1}{1-p} \int_p^1 q_u(F_L) du,$$

である。

Artzner et al. [2] は整合的なリスク指標が満たすべき性質としていくつかの性質を提唱している。リスク指標に関する議論では、これらの性質が重要な役割を果たすため、以下でこれらの性質の定義を述べる。

定義 2.7. あるリスク指標  $\rho$  がすべての  $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$  に対して、 $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$  を満たしているとき、 $\rho$  は劣加法性を満たしているという。ここで  $\mathcal{M}$  は  $\rho$  の定義域である。

定義 2.8. あるリスク指標  $\rho$  がすべての  $L \in \mathcal{M}$  と  $l \in \mathbb{R}$  に対して、 $\rho(L + l) = \rho(L) + l$  を満たしているとき、 $\rho$  は平行移動不変性を満たしているという。ここで  $\mathcal{M}$  は  $\rho$  の定義域である。

定義 2.9. あるリスク指標  $\rho$  がすべての  $L \in \mathcal{M}$  と  $\lambda > 0$  に対して、 $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$  を満たしているとき、 $\rho$  は正の同時性を満たしているという。ここで  $\mathcal{M}$  は  $\rho$  の定義域である。

定義 2.10.  $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$  が確率 1 で  $L_1 \leq L_2$  を満たすならば、 $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$  が成り立つとき、 $\rho$  は単調性を満たしているという。ここで  $\mathcal{M}$  は  $\rho$  の定義域である。

以上の全ての性質を満たすリスク指標は整合的リスク指標と呼ばれる。VaR はバーゼルの枠組みに取り入れられているなど、実務において最も知られているリスク指標だが整合的リスク指標ではない。VaR の満たしていない性質は劣加法性である。これは、分散投資によるリスクの軽減が VaR というリスク指標の計算においては必ずしも反映されないことを示している。これに対して、期待ショートフォールはすべての性質を満たしているため、VaR に代わる新たな基準となりうる。しかし山井・吉羽 [21] では期待ショートフォールの MC による計算精度は、VaR に比べてかなり悪くなりうることを示されている。

### 3. 実質次元減少法

本セクションでは、3.1 節において QMC について述べた後、QMC によるサンプリングの方法を述べる。3.2 節において Imai and Tan [12] の提唱する Generalized Linear Transformation (GLT) の、この問題へ応用した場合の説明を行う。

#### 3.1. QMC

本節では、QMC について概説し、その特徴を述べた後で、アルゴリズムを述べる。QMC は MC における乱数によるサンプリングを、LD 列によるサンプリングにしたシミュレーション方法ととらえることができる。LD 列は決定論的に生成される一様に散らばった点列のことであり、Niederreiter [16] には LD 列の性質が詳しく述べられているので参照されたい。乱数の代わりに LD 列を用いることで、MC よりも精度の良い計算結果が得られる場合が多く知られている。乱数と LD 列を比較するために、 $(0, 1)^2$  上に一様な独立乱数を散布した図を図 1 に、LD 列の 1 次元目と 2 次元目の散布図を図 2 に示す。

乱数によるサンプリングでは、生成される乱数の偏り、例えば図 1 に示されるような疎密の部分によって精度が悪くなる。これを、図 2 で見られるような一様性の高い LD 列を用いることで解消するのである。

ここで QMC の特徴を挙げる。

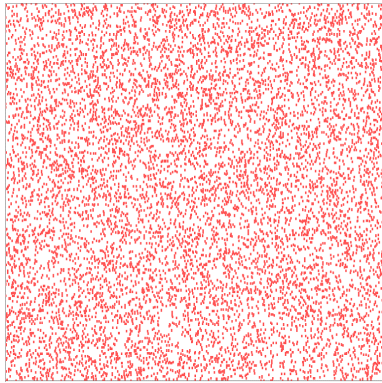


図 1: 乱数 (48bit 線形合同法)

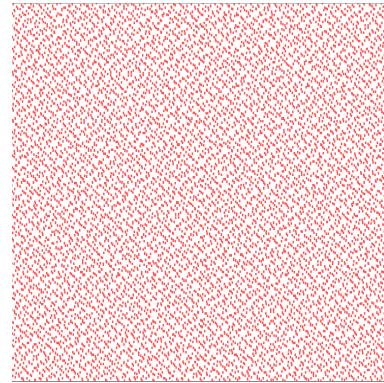


図 2: LD 列 (ソボル列)

- 乱数はその一つ一つが互いに独立であるため，MC では用いる乱数の順番等に注意する必要がないが，LD 列はその次元ごとに生成される要素に関連がないと仮定してサンプリングを行う．そのため，用いる問題によって LD 列の順番などを注意する必要がある．
- LD 列は決定論的に生成されるために，そのままではシミュレーションによる推定値の誤差を測ることが困難である．これを解決するために LD 列の一様性を残したまま乱列化するという Randomized QMC が知られている．この方法は例えば Owen [17] によって提唱され，その他にも様々な乱列化手法が提案されている．本論文でも LD 列を乱列化して用いることで，MC との比較を行う．
- QMC の実用においては，サンプリングする回数が有限であることから，その一様性と次元ごとの関連性が問題となり，高次元では強い関連をもってしまう場合がある．このために，低次元の LD 列を最大限に活かして効率的にサンプリングする方法が実質次元減少法である．
- 実質次元減少法としては，セクション 1 で挙げたように，Caffisch and Moskowitz [5] のブラウニアンブリッジや Imai and Tan [11] の LT などがあるが，これらはデリバティブの価格評価において発達してきた．本論文で適用する Imai and Tan [12] の GLT もデリバティブの価格評価のために開発されたものであるが，そのアルゴリズムの特性上，他の問題に応用することも可能である．

LD 列を用いて群別 GH 分布を発生させる場合，次のアルゴリズムを用いる．

### アルゴリズム 3.1.

1.  $(U_0, U_1, \dots, U_d) = U \in (0, 1)^{d+1}$  を LD 列とし要素  $U_0$  を混合変数のために割り当てる．
2. 群の数  $2$  つの GIG 分布の累積分布関数の逆関数  $GIG_1^{-1}(\cdot)$ ,  $GIG_2^{-1}(\cdot)$  を数値的に用意する．これに関しては，[12] を参照．
3.  $W_1 = GIG_1^{-1}(U_0)$ ,  $W_2 = GIG_2^{-1}(U_0)$  とする．これにより，(2.2) 式から  $W_1, W_2$  が共単調になる．
4.  $(U_1, U_2, \dots, U_d)$  から  $Z = (Z_1, \dots, Z_d) = \Lambda^{1/2}(\Phi^{-1}(U_1), \dots, \Phi^{-1}(U_d))$  により  $Z \sim N_d(0, \Lambda)$  を発生させる．ここで  $\Phi(\cdot)$  は標準正規分布の累積分布関数， $\Lambda^{1/2}$  は  $\Lambda$  のコレスキー分解である．
5.  $X = (\mu_1 + W_1\beta_1 + \sqrt{W_1}Z_1, \dots, \mu_{s_1} + W_1\beta_{s_1} + \sqrt{W_1}Z_{s_1}, \mu_{s_1+1} + W_2\beta_{s_1+1} + \sqrt{W_2}Z_{s_1+1}, \dots,$

$\mu_d + W_2\beta_d + \sqrt{W_2}Z_d$ ) とする .

このあとに (2.3) 式により  $L(X)$  を計算し , それを繰り返すことで損失のサンプリングが行われる .

### 3.2. GLT

GLT は LD 列を用いたサンプリングの際に , 低次元の LD 列がその問題の目的変数 , 例えばデリバティブの価格評価においてはペイオフ , 本論文ではポートフォリオ全体の損失に最も大きな分散を与えるように LD 列を直交行列によって変換する方法である . ここでいう分散とは , Analysis of Variance (ANOVA) Decomposition と呼ばれる , 関数の直交分解における用語であり , 詳細は Wang and Fang [20] を参照されたい . 直交行列による変換の理論的根拠は ,  $A$  が直交行列 ,  $\varepsilon \sim N_d(0, I)$  であるときに  $A\varepsilon \sim N_d(0, I)$  となることに基づいており , GLT では問題に適した直交行列  $A$  を用いて , 通常の QMC なら  $\varepsilon$  から発生させるサンプルを ,  $A\varepsilon$  から発生させる方法であると解釈できる . GLT のアルゴリズムは次のように記述できる .

#### アルゴリズム 3.2.

1.  $(U_1, U_2, \dots, U_{d+1}) = U \in (0, 1)^{d+1}$  を LD 列とし ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d+1}) = (\Phi^{-1}(U_1), \dots, \Phi^{-1}(U_d))$  として ,  $\varepsilon \sim N_{d+1}(0, I)$  を発生させる .
2.  $d+1$  次元直交行列  $A$  によって  $\varepsilon' = A\varepsilon$  とする .
3.  $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{d+1})$  を  $U' = (U'_1, \dots, U'_{d+1}) = (\Phi(\varepsilon'_1), \dots, \Phi(\varepsilon'_{d+1}))$  によって変換する .
4. 群の数だけ GIG 分布の累積分布関数の逆関数  $GIG_1^{-1}(\cdot)$  ,  $GIG_2^{-1}(\cdot)$  を数値的に用意する .
5.  $W_1 = GIG_1^{-1}(U'_0)$  ,  $W_2 = GIG_2^{-1}(U'_0)$  とする . これにより , (2.2) 式から  $W_1, W_2$  が共単調になる .
6.  $(U'_1, U'_2, \dots, U'_d)$  から  $Z = (Z_1, \dots, Z_d) = \Lambda^{1/2}(\Phi^{-1}(U'_1), \dots, \Phi^{-1}(U'_d))$  により  $Z \sim N_d(0, \Lambda)$  を発生させる . ここで  $\Phi(\cdot)$  は標準正規分布の累積分布関数である
7.  $X = (\mu_1 + W_1\beta_1 + \sqrt{W_1}Z_1, \dots, \mu_{s_1} + W_1\beta_{s_1} + \sqrt{W_1}Z_{s_1}, \mu_{s_1+1} + W_2\beta_{s_1+1} + \sqrt{W_2}Z_{s_1+1}, \dots, \mu_d + W_2\beta_d + \sqrt{W_2}Z_d)$  とする .

アルゴリズム 3.1 との大きな違いは ,  $U'$  を  $U$  の代わりに用いている点である . ここで行列  $A$  は問題によって適したものをを用いる必要があり , GLT ではこの  $A$  を決めるために  $\bar{\varepsilon}_k = (\bar{\varepsilon}_{k_1}, \dots, \bar{\varepsilon}_{k_{k-1}}, \bar{\varepsilon}_{k_k}, \dots, \bar{\varepsilon}_{k_{d+1}}) = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  として

$$\begin{aligned} & \max_{A,k} \left( \frac{\partial L(A\varepsilon)}{\partial \varepsilon_k} \Big|_{\varepsilon = \bar{\varepsilon}_k} \right)^2 \\ & \text{subject to } \|A_{\cdot k}\| = 1 \text{ and } \langle A_{\cdot k}, A_{\cdot j} \rangle = 0 \quad (j = 1, \dots, k-1) \\ & \quad \quad \quad (k = 1, \dots, d+1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

を解くことで  $A$  を得る . ここで  $A_{\cdot k}$  は行列  $A$  の  $k$  列目の列ベクトルである . (3.1) の最大化問題は以下のように解かれる .



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(X)}{\partial \varepsilon_k} &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial L(X)}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial \varepsilon_k} \\
 &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial L(X)}{\partial X_i} \left( \left( \sum_{j=1}^d \frac{\partial X_i}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial \varepsilon_k} \right) + \sum_{n=1}^2 \frac{\partial X_i}{\partial W_n} \frac{\partial W_n}{\partial \varepsilon_k} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{s_1} \frac{\partial L(X)}{\partial X_i} \left( \sqrt{W_1} (\Lambda_i^{1/2} A'_{i,k}) + \beta_i + \frac{1}{2\sqrt{W_1}} (\Lambda_i^{1/2} Z) (GIG_1^{-1})'(U'_0) \phi(\varepsilon'_0)(a_{0k}) \right) + \\
 &\quad \sum_{i=s_1+1}^d \frac{\partial L(X)}{\partial X_i} \left( \sqrt{W_2} (\Lambda_i^{1/2} A'_{i,k}) + \beta_i + \frac{1}{2\sqrt{W_2}} (\Lambda_i^{1/2} Z) (GIG_2^{-1})'(U'_0) \phi(\varepsilon'_0)(a_{0k}) \right) \\
 &= \langle A_{i,k}, b \rangle,
 \end{aligned}$$

ここで、 $A'$  は  $A$  の 1 行目と 1 列目を除いた  $d \times d$  行列、 $(GIG_1^{-1})'(\cdot)$  及び  $(GIG_2^{-1})'(\cdot)$  は  $W_1, W_2$  それぞれの逆分布関数の微分、 $\phi(\cdot)$  は標準正規分布の確率密度関数、ベクトル  $b$  の要素  $b_j$  は行列  $A$  の各成分  $a_{jk}$  の係数を表す。 $\hat{b} = b|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}}$  をグラム・シュミット法により、それまでの  $A_{1,1}, \dots, A_{k-1,k-1}$  と直交するようにし、ノルムを 1 に基準化すれば、求めるべき  $A_{i,k}$  が得られる。

GLT の、直交変換を利用してリスク要因の主要成分に着目するというアイデアは、多次元空間に散らばるデータの中から、主要な直交軸を選択する主成分分析のそれと非常に似ている考え方ともいえる。主成分分析を用いた主要なリスクファクターの選択は、金利リスクの評価手法などではすでに知られた技術である。ただし、重要な違いとして、主成分分析がデータが与えられたもとの統計的な解析手法であるのに対し、GLT は、モデルが与えられたもとの効率的な計算方法である点が上げられる。また、主成分分析では、主要なファクターのみを抽出して、通常、それ以外のファクターを無視するのに対して、GLT の手法は主要なファクターに注目して計算精度の向上を目指しているが、残りのファクターを無視しているわけではない。そのため主成分分析で問題となる打ち切りの誤差、推定値の不偏性は、GLT では問題にならない。このことは、主成分などを考慮しない単純な MC 法による推定値と、GLT の推定値が必ず一致する保証があることに対応している。さらに、GLT はリスクの分布の正規性を想定していない点も主成分分析とは異なっているといえよう。

#### 4. 数値実験

本セクションでは、4.1 節で MC, QMC, GLT を使った QMC (以下 GLT) の 3 つの手法により計算された VaR を、4.2 節で期待ショートフォールについてそれぞれ比較する。3.1 節で述べたように、QMC および GLT は MC との標準誤差の比較のために乱列化した LD 列を用いている。この数値実験において、言語は JAVA を使用し、SSJ ライブラリ<sup>\*</sup>、および JMSL ライブラリ<sup>†</sup>を利用している。乱数としては 48bit 線形合同法によるもの、LD 列としては SSJ ライブラリのソボル列を使用し、この乱列化では addRandomShift 関数、及び

<sup>\*</sup>Stochastic Simulation in JAVA, <http://www.iro.umontreal.ca/~simardr/ssj/indexe.html> から入手可能なフリーライブラリ

<sup>†</sup>商用の数値解析ライブラリ、詳細は <http://www.roguewave.jp/products/imsl/jmsl/jmsl.html> を参照

leftMatrixScramble 関数を使用している．また，GLT による最適化はどれも 3 次元まで行い，残りの次元に関しては  $i$  行  $j$  列の要素に対して  $i = j$  ならば 1， $i \neq j$  ならば 0，つまり，

$$A' = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & & 0 \\ & & & 0 & 0 & & \vdots \\ & & & 0 & 0 & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & 1 & 0 & \cdots & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & \vdots & 0 & & \\ & & & \vdots & & & 0 \\ & & & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

とした上で QR 分解を行い，この分解  $A' = QR$  による直交行列  $Q$  を GLT アルゴリズムにおける直交行列  $A$  として用いている．また，本論文におけるベースとなるパラメータは Prause [18] から  $\lambda_1 = -1.79$ ， $\alpha_1 = 21.3$ ， $\beta_1 = (2.67, \dots, 2.67)$ ， $\delta_1 = 0.0153$ ， $\mu_1 = (-0.000004, \dots, -0.000004)$ ， $\lambda_2 = -1.0024$ ， $\alpha_2 = 39.6$ ， $\beta_2 = (4.14, \dots, 4.14)$ ， $\delta_2 = 0.0118$ ， $\mu_2 = (-0.000158, \dots, -0.000158)$  を用いる．各資産のポジションはすべて均等に  $p_i = 1$ ， $S_i = 1$  ( $i = 1, \dots, s_1$ ) とし， $p_j \exp(t - t_j) = 1$  ( $j = s_1 + 1, \dots, d$ ) としている．行列  $\Lambda$  に関しては， $i$  行  $j$  列の要素に対して  $i = j$  ならば 1， $i \neq j$  ならば  $\frac{1}{i+j}$ ，つまり，

$$\Lambda = (\Lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \frac{1}{i+j} \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{i+j} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とし，以上のベースとなるパラメータセットをパラメータセット 1 と呼ぶことにし，他のパラメータは同様にして，分布の裾を厚くするために  $\alpha_1 = 2.8$ ， $\beta_1 = (0.1, \dots, 0.1)$ ， $\alpha_2 = 5.0$ ， $\beta_2 = (0.2, \dots, 0.2)$  としたものをパラメータセット 2 と呼ぶ．

#### 4.1. VaR の推定

本節では VaR の推定を行う．MC，QMC，GLT それぞれの手法による推定精度を比較する．すべての手法において，10,000 回のサンプリングで一つの推定値を取得し，それを 100 回繰り返し，推定値の標準誤差を計算する．それぞれの計算手法により計算された VaR の結果を表 1 に示す． $d$  は総資産数に対応し，その半分の資産を株，もう半分を割引債としている．信頼水準  $p$  は  $p = 0.95, 0.99, 0.999$  の 3 パターンに関してシミュレーションを行っている．シミュレーションにおける VaR の計算では，10,000 回のサンプリングの後，大きい順に並び替え，例えば  $p = 0.95$  では上から 5%，つまり上から 500 個目のデータを 95% VaR として計算している．

表 1 から，どの次元数の問題においても，GLT，QMC，MC の順で標準誤差が小さくなっていることが分かる．QMC と MC では大きな差が見られず， $p = 0.99$  ではほとんど差がなくなっている．したがって，GLT は単純な MC や QMC と比較して，より高い精度の VaR の値を推定できることが確認できる．相対的には  $p = 0.95$  では GLT の標準誤差は QMC の約 20% 程度， $p = 0.99$  では 30% 程度に，信頼水準の高い  $p = 0.999$  でも 40% ~ 50% に減少

表 1: パラメータセット 1 による VaR (標準誤差)

	MC		QMC		GLT	
$p = 0.95$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.2104	3.50E-03	0.2102	2.55E-03	0.2106	3.95E-04
$d=140$	0.2390	4.52E-03	0.2391	3.06E-03	0.2385	8.63E-04
$d=180$	0.2603	4.57E-03	0.2610	4.18E-03	0.2607	8.21E-04
$d=220$	0.2785	5.29E-03	0.2788	4.02E-03	0.2790	7.79E-04
$d=260$	0.2945	5.80E-03	0.2949	4.16E-03	0.2949	8.89E-04
$d=300$	0.3083	6.04E-03	0.3091	4.45E-03	0.3085	1.03E-03
$p = 0.99$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.3622	0.0101	0.3630	8.32E-03	0.3632	2.93E-03
$d=140$	0.4107	0.0111	0.4091	9.63E-03	0.4096	2.78E-03
$d=180$	0.4456	0.0122	0.4455	0.0105	0.4461	3.10E-03
$d=220$	0.4780	0.0107	0.4781	0.0110	0.4764	3.02E-03
$d=260$	0.5033	0.0141	0.5046	0.0110	0.5033	3.43E-03
$d=300$	0.5263	0.0128	0.5239	0.0127	0.5269	3.73E-03
$p = 0.999$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.6664	0.0433	0.6737	0.0410	0.6673	0.0190
$d=140$	0.7466	0.0462	0.7489	0.0375	0.7507	0.0223
$d=180$	0.8166	0.0584	0.8113	0.0507	0.8159	0.0238
$d=220$	0.8715	0.0509	0.8641	0.0517	0.8648	0.0226
$d=260$	0.9082	0.0561	0.9225	0.0593	0.9095	0.0244
$d=300$	0.9446	0.0553	0.9476	0.0547	0.9488	0.0253

している。また、GLTの有効性が次元数にかかわらず確認できることから、信頼水準が大きくなると精度が落ちる原因は、MCやQMCといったシミュレーション手法そのものに要因があると推測できる。

次に、裾を厚くした場合についても計算するため、パラメータセット2を用いて同様のシミュレーションを行う。この結果が表2である。裾の厚い場合でもGLTによる標準誤差はMCやQMCに対して、パラメータセット1と同程度の減少を見せている。また、裾の厚さと各推定方法の精度の関係を見るために、パラメータセット1で $d = 200$ ,  $p = 0.99$ を固定する代わりに $(\alpha_1, \alpha_2)$ をいくつかの値に変更し、数値実験を行う。この結果が表3である。表3の結果より、どの裾の厚さにおいても、GLTの標準誤差はMCの30%程度に抑えられていることが分かる。

#### 4.2. 期待ショートフォールの推定

本節では期待ショートフォールに関する数値実験を行い、MC、QMC、GLTそれぞれの手法による推定精度を比較する。こちらでも、すべての手法において、10,000回のサンプリングで一つの推定値を取得し、それを100回繰り返し、推定値の標準誤差を計算する。それぞれの計算手法により計算された期待ショートフォールの結果を表4に示す。シミュレーションにおける期待ショートフォールの計算では、10,000回のサンプリングの後、大きい順に並び

表 2: パラメータセット 2 による VaR (標準誤差)

	MC		QMC		GLT	
$p = 0.95$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.2949	5.14E-03	0.2950	4.29E-03	0.2957	1.54E-03
$d=140$	0.3465	7.02E-03	0.3450	4.46E-03	0.3459	1.41E-03
$d=180$	0.3899	6.65E-03	0.3897	5.27E-03	0.3895	1.68E-03
$d=220$	0.4277	8.37E-03	0.4281	5.17E-03	0.4281	1.68E-03
$d=260$	0.4631	9.737E-3	0.4625	6.05E-03	0.4626	1.82E-03
$d=300$	0.4956	0.0107	0.4954	7.32E-03	0.4945	2.19E-03
$p = 0.99$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.5659	0.0230	0.5686	0.0139	0.5694	7.39E-03
$d=140$	0.6607	0.0213	0.6629	0.0175	0.6602	7.91E-03
$d=180$	0.7324	0.0269	0.7381	0.0194	0.7370	8.13E-03
$d=220$	0.8053	0.0283	0.8058	0.0232	0.8053	9.25E-03
$d=260$	0.8698	0.0305	0.8647	0.0276	0.8651	0.0119
$d=300$	0.9176	0.0285	0.9191	0.0234	0.9171	0.0110
$p=0.999$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.7143	0.0507	0.7213	0.0511	0.7155	0.0236
$d=140$	0.7847	0.0544	0.7903	0.0565	0.7868	0.0279
$d=180$	0.8379	0.0552	0.8470	0.0495	0.8399	0.0261
$d=220$	0.8843	0.0542	0.8811	0.0468	0.8820	0.0263
$d=260$	0.9197	0.0671	0.9188	0.0530	0.9191	0.0307
$d=300$	0.9501	0.0665	0.9580	0.0594	0.9556	0.0265

表 3: 裾の厚さを变化させた VaR (標準誤差)

	MC		QMC		GLT	
$(\alpha_1, \alpha_2)$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
(21.3,39.6)	0.4868	0.0122	0.4866	0.0126	0.4861	3.43E-03
(15,30)	0.4941	0.0144	0.4913	0.0133	0.4917	3.96E-03
(10,20)	0.4952	0.0134	0.4938	0.0127	0.4938	4.08E-03
(5,10)	0.4971	0.0152	0.4961	0.0122	0.4939	4.34E-03
(2.8,5)	0.4906	0.0143	0.4910	0.0132	0.4922	4.11E-03

替え, 例えば  $p = 0.95$  では上から 500 個のデータの平均を 95%期待ショートフォールとして計算している.

期待ショートフォールに関しても, GLT の標準誤差が最も小さく,  $p = 0.95, 0.99$  のどちらに関しても GLT の標準誤差は QMC の 10% ~ 20%程度に,  $p = 0.999$  では 30% ~ 50%程度に減少しており, VaR の場合よりも大きな改善がなされている.

VaR のケースと同様に, パラメータセット 2 を用いて同様のシミュレーションを行う. その結果が表 5 である. 裾の厚い場合でも GLT による標準誤差は MC や QMC に対して, 同

表 4: パラメータセット 1 による期待ショートフォール (標準誤差)

	MC		QMC		GLT	
$p = 0.95$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.306	6.20E-03	0.306	3.50E-03	0.306	4.54E-04
$d=140$	0.345	7.43E-03	0.347	5.43E-03	0.346	6.13E-04
$d=180$	0.377	7.75E-03	0.377	6.12E-03	0.377	5.76E-04
$d=220$	0.402	7.98E-03	0.402	5.67E-03	0.403	6.38E-04
$d=260$	0.425	9.49E-03	0.424	7.50E-03	0.425	9.43E-04
$d=300$	0.444	8.38E-03	0.443	6.58E-03	0.444	7.02E-04
$p = 0.99$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.4652	0.0160	0.4690	0.0138	0.4683	2.63E-03
$d=140$	0.5260	0.0166	0.5232	0.0150	0.5250	2.51E-03
$d=180$	0.5683	0.0194	0.5691	0.0173	0.5696	2.92E-03
$d=220$	0.6059	0.0196	0.6072	0.0169	0.6062	3.00E-03
$d=260$	0.6370	0.0224	0.6404	0.0160	0.6370	2.82E-03
$d=300$	0.6641	0.0199	0.6624	0.0209	0.6654	2.99E-03
$p=0.999$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.7323	0.0632	0.7434	0.0639	0.7396	0.0294
$d=140$	0.8134	0.0638	0.8161	0.0594	0.8283	0.0275
$d=180$	0.9007	0.0782	0.8815	0.0788	0.8919	0.0264
$d=220$	0.9421	0.0760	0.9391	0.0741	0.9490	0.0266
$d=260$	0.9822	0.0796	1.0058	0.0828	0.9932	0.0290
$d=300$	1.0228	0.0746	1.0266	0.0669	1.0319	0.0339

程度に減少している。また VaR の時と同様に、裾の厚さと各推定方法の精度の関係を見るために、パラメータセット 1 で  $d = 200, p = 0.99$  を固定する代わりに  $(\alpha_1, \alpha_2)$  をいくつかの値に変更し、数値実験を行う。この結果が表 6 である。どの裾の厚さにおいても、GLT の標準誤差は MC の 10% ~ 20% 程度に抑えられており、VaR の時よりも精度が良い。

また、山井・吉羽 [21] で指摘されたような、期待ショートフォールの MC による推定の困難さは際立って観測されなかった。これは、山井・吉羽 [21] ではリスクファクターを、コーシー分布に近い、裾が極めて厚い分布を想定しているが、本論文で用いた群別 GH 分布では正規分布よりも裾は厚いものの、コーシー分布ほどは厚くないからであると考えられる。

## 5. 結論

本論文では、ポートフォリオのリスク指標の精度の良い推定を目的とし、シミュレーション手法として GLT を用いた。これはデリバティブの価格評価に対する方法として Imai and Tan [12] が提唱したものであり、リスク管理の分野において QMC を用いた論文は少なく Kreinin et al. [13] に限られるため、本論文で QMC 及び GLT を適用した。また、ポートフォリオのモデリングにおいて、群別 GH 分布という広い分布を提唱し、異なる資産に対して異なる形状の分布のリスクファクターを用いることが可能なモデリングを行った。この結果、VaR では、 $p = 0.95$  の信頼水準に対して GLT の標準誤差は QMC の約 20% 程度、 $p = 0.99$

表 5: パラメータセット 2 による期待ショートフォール (標準誤差)

	MC		QMC		GLT	
$p = 0.95$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.4750	0.0107	0.4760	9.34E-03	0.4770	1.86E-03
$d=140$	0.5531	0.0152	0.5521	9.94E-03	0.5536	2.01E-03
$d=180$	0.6176	0.0160	0.6191	0.0132	0.6175	1.87E-03
$d=220$	0.6764	0.0185	0.6741	0.0133	0.6741	2.51E-03
$d=260$	0.7246	0.0199	0.7257	0.0156	0.7239	2.32E-03
$d=300$	0.7722	0.0207	0.7694	0.0141	0.7701	2.70E-03
$p = 0.99$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.8286	0.0461	0.8293	0.0345	0.8312	8.02E-03
$d=140$	0.9497	0.0429	0.9523	0.0472	0.9543	9.82E-03
$d=180$	1.0457	0.0506	1.0575	0.0383	1.0571	9.07E-03
$d=220$	1.1409	0.0517	1.1465	0.0472	1.1416	1.00E-02
$d=260$	1.2198	0.0571	1.2219	0.0537	1.2186	0.0116
$d=300$	1.2915	0.0563	1.2851	0.0461	1.2899	0.0135
$p=0.999$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
$d=100$	0.7904	0.0683	0.7936	0.0746	0.7972	0.0369
$d=140$	0.8586	0.0779	0.8645	0.0750	0.8701	0.0341
$d=180$	0.9154	0.0805	0.9164	0.0721	0.9247	0.0348
$d=220$	0.9654	0.0824	0.9654	0.0717	0.9631	0.0355
$d=260$	1.0116	0.0990	0.9924	0.0828	1.0010	0.0335
$d=300$	1.0244	0.0840	1.0374	0.0791	1.0407	0.0340

表 6: 裾の厚さを変化させた期待ショートフォール (標準誤差)

	MC		QMC		GLT	
$(\alpha_1, \alpha_2)$	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
(21.3, 39.6)	0.6294	0.0195	0.6270	0.0195	0.6293	2.98E-03
(15, 30)	0.6394	0.0194	0.6357	0.0209	0.6384	2.78E-03
(10, 20)	0.6434	0.0217	0.64141	0.0204	0.6436	3.54E-03
(5, 10)	0.6473	0.0214	0.6440	0.0196	0.6427	3.77E-03
(2.8, 5)	0.6373	0.0230	0.6388	0.0199	0.6411	4.44E-03

の信頼水準では 30%程度に、 $p = 0.999$  では 40% ~ 50% に減少し、期待ショートフォールでは  $p = 0.95, 0.99$  のどちらの信頼水準に対しても、GLT の標準誤差は QMC の 10% ~ 20% 程度に、 $p = 0.999$  では 30% ~ 50% 程度に減少した。また分布の裾が厚くなるようなパラメータセットでも同様の結果が得られ、GH 分布の仮定の下では山井・吉羽 [21] で指摘されたような期待ショートフォールの推定の困難さは観測されなかった。

今後の課題としては、Glasserman et al. [10] のようにポートフォリオの中身にデリバティブを含めた場合にも拡張することや、債券のデフォルトを考慮することが考えられる。これ

らは群別 GH 分布を用いたままポートフォリオの枠組みを変えることで達成されうる。最後に、本章で提案した群別 GH 分布が実務上有効なリスクモデルであるかどうかの確認は、データによる実証分析によって統計的に検証されることが望まれる。ただし、本研究で提案した GLT は非常に汎用的なシミュレーション手法であるため、群別 GH を超える、より複雑、より一般的な多次元分布においても適用できる可能性あり、その検証は今後の課題である。

#### 謝辞

本研究の第 2 著者は学術研究費助成基金助成金 (基盤研究 (C)24510200) を受けています。また、貴重なアドバイスを頂いた二名の査読者の方に感謝いたします。

#### 参考文献

- [1] P. Acworth, M. Broadie, and P. Glasserman: A comparison of some Monte Carlo techniques for option pricing. In H. Niederreiter, P. Hellekalek, G. Larcher, and P. Zinterhof (eds.): *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods* (Springer, New York, 1997).
- [2] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9** (1999), 203–228.
- [3] O. Barndorff-Nielsen: Exponentially decreasing distribution for the logarithm of particle size. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci.*, **353** (1977), 401–419.
- [4] M. Bibby and M. Sorensen: Hyperbolic Processes in Finance. *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, North Holland, 2001.
- [5] R. Caffisch and B. Moskowitz: Smoothness and dimension reduction in Quasi-Monte Carlo methods. *Math. Comput. Modelling*, **23** (1996), 37–54.
- [6] S. Daul, E. De Giorgi, F. Lindskog, and A.J. McNeil: The grouped t-copula with an application to credit risk, *Risk*, **16** (2003), 73–76.
- [7] E. Eberlein and U. Keller: Hyperbolic distributions in finance, *Bernoulli*, **1** (1995), 281–299.
- [8] P. Embrechts, R. Frey, and A.J. McNeil: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools* (Princeton University Press, 2005).
- [9] R. Frey and A.J. McNeil: Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, **7** (2000), 271–300.
- [10] P. Glasserman, P. Heidelberger, and P. Shahabuddin: Portfolio value-at-risk with heavy-tailed risk factors, *Mathematical Finance*, **12** (2002), 239–269.
- [11] J. Imai and K.S. Tan: A general dimension reduction technique for derivative pricing. *J. Comput. Finance*, **10** (2006), 129–155.
- [12] J. Imai and K.S. Tan: An accelerating quasi-Monte Carlo method for option pricing under the generalized hyperbolic Le'vy process, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31** (2009), 2282–2302.
- [13] A. Kreinin, L. Merkoulouvitich, D. Rosen and M. Zerbs: Measuring portfolio risk using quasi Monte Carlo methods. *Algo Research Quarterly*, **1** (1998), 17–26.

- [14] B. Mandelbrot: The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, **36** (1963), 394–419.
- [15] 増田弘毅: GIG 分布と GH 分布に関する解析, *統計数理*, **50** (2002), 165–199.
- [16] H. Niederreiter: *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods* (SIAM, Philadelphia, 1992).
- [17] A.B. Owen: Randomly permuted (t, m, s)-nets and (t, s)-sequences. In H. Niederreiter and P.J.-S. Shiue (eds.): *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing* (Springer-Verlag, Berlin, 1995), 299–317.
- [18] K. Prause: The generalized hyperbolic model: estimation, financial derivatives, and risk measures, PhD thesis, University of Freiburg, 1999.
- [19] RiskMetricsTM: Technical Document, Fourth Edition, 1996.
- [20] X. Wang and K. T. Fang: The effective dimension and quasi-Monte Carlo. *J. Complexity*, **19** (2003), 101–124.
- [21] 山井康浩・吉羽要直: 期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測 具体的な計算例による考察, 日本銀行金融研究所, *金融研究*, **12** (2001), 53–94.

今井潤一

慶應義塾大学大学院理工学研究科

〒 223-0061 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1

E-mail: jimai@ae.keio.ac.jp



## ABSTRACT

ESTIMATING PORTFOLIO'S RISK MEASURES  
WITH DIMENSION REDUCTION TECHNIQUE

Yuya Suzuki Junichi Imai  
*Keio University*

This paper proposes an efficient quasi-Monte Carlo method to compute risk measures of a portfolio that is used for risk management. To evaluate the risk in the portfolio it is necessary to take different types of risk into consideration, such as market risk and interest rate risk. To that end, we introduce grouped generalized hyperbolic distribution. This distribution has two distinctive features. First, the marginal distribution is sufficiently flexible to describe a semi-heavy tail indicating that it can capture a potential extreme value. Second, the distribution can model quite different shapes of distributions for different types of risk with non-linear dependence structure by introducing the concept of group. These two features are crucial for the quantitative risk management. In this paper, we show that the proposed distribution can consider the features with a simple yet sufficiently flexible manner. We then develop an efficient quasi-Monte Carlo procedure to evaluate risk measures by employing a dimension reduction method, which is originally proposed for valuing financial options. In our numerical experiences, we compute two well-known risk measures; Value-at-Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES), in the presence of both market and interest rate risk, and demonstrate that the proposed method can enhance the numerical efficiency of the simulation in calculating these risk measures.