

手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの賭けにおける すべての勝者の獲得賞金の総和最大化とその試行回数との関係

中西 真悟
大阪工業大学

(受理 2010 年 11 月 2 日; 再受理 2011 年 8 月 30 日)

和文概要 本研究では、独立試行によるコイン投げの繰返しゲームに、手数料を得るゲーミング企業の収益と、多数のプレイヤーのうち、勝者の獲得賞金や、敗者の損失の傾向を考察している。特に、勝者の獲得賞金総額の最大化の特性を、試行回数との関係として取扱っている。その結果、勝者の満足を考慮したゲームの停止試行回数を、決定する意思決定基準モデルを提案するために、べき乗回帰分析を用いている。また、勝者のリスク回避と敗者のリスク愛好的傾向について、べき関数の視覚化の視点から鏡映効果のモデル化を試みている。

キーワード: 意思決定, コイン投げ, サイコロ投げ, 手数料, べき乗回帰分析, 鏡映効果

1. 緒論

ゲーミングとは、一つに、軍事やビジネス状況において何かを教えたり、問題解決を促したりするために開発されたゲームを実施することを意味する [8]。OR 学会誌 [20] でも、かつて同様の意義で特集が組まれたことがあり、今日までにその発展が実社会に活かされている。

一方で、ゲーミングはギャンブリングと同義語として用いられることもある [17]。遙か昔に、ギャンブリングを賭け [30, 35] という意味で用いたころから、時代を得ながらカジノを中心としてゲーミング企業という言葉を使う慣習になったようである。すなわち、賭博業を意味するギャンブリング産業という呼び方は、家族連れのテーマパークとして変身をとげたラスベガスなどのリゾート地において、ゲーミング産業という呼び方に変わってきたように、ゲーミングを用いることが一般的である。また、アメリカのいくつかの大学でも、観光学科にゲーミング・マネジメントという単位修得科目を設置している [17]。したがって、本研究では後者のゲーミングをギャンブリングと同義語として用いている。ギャンブリングを意味する実用的な研究の中には、最近では、パリミュチュアル方式の口に対して、期待賞金額の基準のもとで最適な賭けを導き出す研究 [1] もなされている。このような実例を含め、本研究ではギャンブリングでの実践成果の数理的特徴を調べるため、コイン投げの繰返しゲームを通じて基礎的な研究を目的としている。このため、原始的なギャンブリングで胴元が存在したように、論文中では胴元をゲーミング企業と呼ぶことにする。このゲーミング企業は収益を追求するが、プレイヤーの一定の満足が得られなければ、ゲームを開催しているマーケットを失う [17]。このため、本研究では、これまであまりゲーミングの中で取扱われていなかった手数料に着目し、プレイヤーの満足とゲーミング企業の収益について取扱っている。具体的には、本研究では手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームの勝者の獲得賞金の特徴について取扱っている。このとき、本研究で取扱う勝者の意味は、コイン投げを

繰返し試行した結果，元本割れをしなかったプレイヤーを勝者と定義する．逆に，元本割れをしたプレイヤーを敗者と記述を区別する．

ここで，コイン投げの傾向について，ゲーミングに限定せずにこれまでの研究動向を大別すると，

- (1) 確率過程として取扱う研究 [3, 18, 23, 25]，
- (2) コイン投げの平均の挙動を取扱っている研究 [2, 3, 26–28]，
- (3) コイン投げの乱数発生について取扱っている研究 [15, 16, 21]，
- (4) コイン投げの特徴を数理的もしくは物理学的に取扱っている研究 [4, 7, 10, 32]，
- (5) コインをゲームに応用している研究 [11, 24]

のような研究動向がわかる．特に，本研究で重要な (1) については，確率過程をランダム・ウォークとして取扱い，試行回数が大きい場合には，正規分布における挙動との関連が注目され，ファイナンスをはじめ，多くの分野でその説明に活用されている [3, 14]．

一方，効用関数や価値関数の分析について，意思決定の側面から研究もなされてきた [5, 13, 28, 29]．プレイヤーは獲得賞金の規模ではなく，本来は期待効用の最大化，価値関数の感応度最大化をもとに行動するが，プレイヤーを勧誘するマーケティング戦略ではなく，ゲーミング企業はプレイヤーのゲーム試行の結果，獲得賞金の総和が最大になるように検討することも重要である．そこで，賭けによる獲得賞金の総和の関係を直接示す価値を期待結果として，本研究では取扱うことにする．このため，心理的側面からの様々な研究がなされてきた近年の傾向 [28] と違い，数理的にモデル構築を展開する．

ところで，実際に多くのプレイヤーがそれぞれ独立にコイン投げを繰返し，ゲームを試行するとき，ゲームを運営するゲーミング企業は，コイン投げというゲームを開催するマーケットを有しているので，参加しているプレイヤーから各1回の試行に対する手数料を得ることができる．このため，ゲーミング企業はマーケットにおいてプレイヤー数が大きく，かつ，プレイヤーが繰返しコイン投げを続けてくれているうちは，収益を得続けることができる．したがって，ゲーミング企業の最適戦略はゲームを止めないことになる [30]．

しかしながら，プレイヤーはコイン投げを繰返して，ゲームの勝敗成績による利得もしくは損失の傾向と，ゲーミング企業に支払う手数料の大きさの影響で，コイン投げを繰返す行為が続かなくなり，マーケットから退出することも考えなければならない．また，一般には，マーケットとしてコイン投げを繰返し行う場合には，手数料がいくらで，いつ，何人のプレイヤーが同時にそれぞれコイン投げを試行しているか，プレイヤーの人数と時刻におけるその変動も考慮する必要がある．

そこで，本研究では，手数料の大きさにより，プレイヤーが何回まで続けてコイン投げを繰返すかの特徴を調べるために，プレイヤーの人数が一定のもとで，プレイヤーが一定回数までコイン投げを繰返し続けるものとしてマーケットからの退出を認めない制約を与えておくことにする．また，各プレイヤーは独立にそれぞれコイン投げを繰返し続けるもの (i.i.d. [5]) として，ゲーム理論 [34] で取扱うようなプレイヤー間の取引や協力を排除してモデルの単純化を行ったもとで，ゲーミングのいくつかの特徴を調べている．すなわち，次章のとおり前提条件を設定し，ゲーミングの特徴としてプレイヤーのうち勝者に限定したプレイヤーの総獲得賞金の総和の最大値と，ゲーミング企業が設定する手数料の傾向について，数理的現象をべき乗回帰分析を用いて調べている．

その結果に基づいて，ゲーミング企業が勝者の獲得賞金の期待利得の最大化を考慮したゲームの試行回数を，決定するための意思決定の基準について考察している．得られた基準

から、不確実な状況下において勝者のリスク回避的な特徴と、敗者のリスク愛好的な特徴を手数料による費用の関係として考察している。これを、期待利得に関する 2 組のべき関数 [28, 31] として、鏡映効果 [6] の視覚化を試みている。さらに、得られたゲームの停止試行回数において、ゲーミング企業の期待収益と、勝者のみの獲得賞金の期待利得は均衡していることを導出している。

2. 手数料を考慮したコイン投げおよびサイコロ投げの賭けの前提条件

一般にゲーミングにおいて、各プレイヤーが支払う金額よりも得られる期待値は低い。にもかかわらず、宝くじ、競馬、競輪、競艇、パチンコやカジノなどに多くのプレイヤーが参加しマーケットが成立する。すなわち、マーケットに参加する多くのプレイヤーは負けるにもかかわらず、リスクに対して愛好的になる傾向がある。これには、期待値が低くなる要因が考えられる。そこで、本研究では

- (A) コイン投げの勝ち負けの確率が $1/2$ の場合 (二項モデル) ,
- (B) コイン投げの勝つ確率が負ける確率より若干小さい場合 (二項モデル) ,
- (C) サイコロ投げで出る目の確率がそれぞれ $1/6$ の場合 (多項モデル)

の 3 つのケースで考察する。このとき、既に期待値が小さくなるのは、(B) のケースのみであるが、手数料を設定すると、3 つの条件は期待値以下になる。すなわち、(A)(B)(C) には、ゲーミング企業の手数料、(B) には勝者の数が敗者の数よりも小数になるゲームの構造や仕組みによる費用が加わる。

以下、コイン投げとサイコロ投げの賭けについて、本研究で仮定する前提条件をそれぞれ記述する。このとき、コイン投げで、(A) は勝敗の確率が等確率の場合として、(B) は勝つ確率が負ける確率よりも若干小さい場合として、後ほど定義するモデルの妥当性を数値実験で取扱うために設定している。(C) は (A) の勝敗の多項に分岐する場合の例題としてコイン投げの繰返しゲームと同様に有効かを調べるために設定している。

2.1. 勝敗の確率が等確率のコイン投げの前提条件

まず、(A) についてのコイン投げである。

- (A.1) 手数料のみの条件下で、コインの表の出る確率は $p_1 = 1/2$ の場合について取扱う。
- (A.2) 一人のプレイヤーは 1 回のゲーム試行に手数料 α 円を支払い、表が出た場合には 1 円の賞金を得て、裏が出れば 1 円を支払う。このため、ゲーミング企業は 1 回のゲーム試行で手数料 α 円だけ無条件に収益を得る。
- (A.3) 一人のプレイヤーは N 回のゲームを独立試行で続ける。途中でゲームを終了してマーケットから退出することはできない。
- (A.4) (A.1)(A.2)(A.3) のもとで、同時に m 人のプレイヤーが、互いに独立にゲームを N 回だけ繰返す。

2.2. 勝つ確率が負ける確率より若干小さいコイン投げの前提条件

続いて、(B) についてのコイン投げである。

- (B.1) コインの表の確率は $1/2$ よりも若干小さい条件下 $p_1 < p_2 (= 1 - p_1)$ で、手数料 α_0 円とゲームの仕組みによる費用 $\alpha_1 (= p_2 - p_1 = 1 - 2p_1)$ 円も含めた場合について取扱う。これらを併せた費用を、単に手数料 $\alpha (= \alpha_0 + \alpha_1)$ 円と呼ぶことにする。
- (B.2) 一人のプレイヤーは 1 回のゲーム試行に手数料 $\alpha (= \alpha_0 + \alpha_1)$ 円を支払い、表が出た場合には 1 円の賞金を得て、裏が出れば 1 円を支払う。このため、ゲーミング企業は

1 回のゲーム試行で手数料 α 円だけ無条件に収益を得る .

- (B.3) 一人のプレイヤーは N 回のゲームを独立試行で続ける . 途中でゲームを終了してマーケットから退出することはできない .
- (B.4) (B.1)(B.2)(B.3) のもとで , 同時に m 人のプレイヤーが , 互いに独立にゲームを N 回だけ繰返す .

2.3. サイコロ投げの前提条件

次にサイコロ投げである .

- (C.1) 手数料のみの条件下で , サイコロの目の出る確率はそれぞれ $1/6$ の場合について取扱う .
- (C.2) 一人のプレイヤーは 1 回のゲーム試行に手数料 α 円を支払い , サイコロを試行して出た目の数から , サイコロの目の期待値 3.5 を引いた値だけ賞金を得る . このため , ゲーミング企業は 1 回のゲーム試行で手数料 α 円だけ無条件に収益を得る .
- (C.3) 一人のプレイヤーは N 回のゲームを独立試行で続ける . 途中でゲームを終了してマーケットから退出することはできない .
- (C.4) (C.1)(C.2)(C.3) のもとで , 同時に m 人のプレイヤーが , 互いに独立にゲームを N 回だけ繰返す .

以上の三つの条件を設定し , 後ほど記述するモデルの有効性を数値実験を通じて考察する . 次章では基本原理について (A) を中心にモデルを説明する .

3. 一人のプレイヤーの利得モデル

まず , 一人のプレイヤーのコイン投げのモデルを設定する .

3.1. 一人のプレイヤーが 1 回ゲームを試行するモデル

1 回のゲームを試行するとき , n 個 (コイン投げでは $n = 2$, サイコロ投げでは $n = 6$) の獲得賞金 c_i ($i = 1, \dots, n$) を想定し , 試行回数が τ 番目における 1 回のゲームの一人のプレイヤーの獲得賞金は

$$c(\tau) = \sum_{i=1}^n c_i X_i(\tau), \quad \sum_{i=1}^n X_i(\tau) = 1, \quad X_i(\tau) = \begin{cases} 1 & (\text{選択される}), \\ 0 & (\text{選択されない}) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n; \tau = 1, \dots, N) \quad (3.1)$$

で表される [19] . ここに , $X_i(\tau) = 1$ は , i 番目の事象が選択され , それ以外の $X_j(\tau)$ ($i \neq j$) はすべて 0 とみなされることにより , 賞金 c_i を獲得するモデルである . たとえば , コイン投げでは 1 回の試行で 1 円だけ取得か , もしくは 1 円を支払うコイン投げ [5, 14] を想定すると , 基本的に 2 項モデルとして表現できる . これに対して前提条件 (A)(B) にもとづき , c_i ($i = 1, 2$) には α だけゲーミング企業が取得する手数料が減算される . すなわち

$$\begin{cases} c_1 = 1 - \alpha & (\text{表}), \\ c_2 = -1 - \alpha & (\text{裏}) \end{cases} \quad (3.2)$$

と見積もることができる．また，サイコロ投げでは，前提条件 (C) にもとづき

$$\begin{cases} c_1 = 1 - 3.5 - \alpha & (1 \text{ の目}), \\ c_2 = 2 - 3.5 - \alpha & (2 \text{ の目}), \\ c_3 = 3 - 3.5 - \alpha & (3 \text{ の目}), \\ c_4 = 4 - 3.5 - \alpha & (4 \text{ の目}), \\ c_5 = 5 - 3.5 - \alpha & (5 \text{ の目}), \\ c_6 = 6 - 3.5 - \alpha & (6 \text{ の目}) \end{cases} \quad (3.3)$$

の賞金のいずれかが一回のサイコロ投げのゲーム試行で得られるものとする．

このとき，1 回の試行における期待利得は手数料だけ少なくなり，式 (3.1) の期待値は

$$E(c(\tau)) = \sum_{i=1}^n c_i p_i = -\alpha, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

$$(i = 1, \dots, n; \tau = 1, \dots, N) \quad (3.4)$$

と表記できる [19]．また，その分散は

$$V(c(\tau)) = \sum_{i=1}^n c_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n c_i p_i \right)^2 = v$$

$$(i = 1, \dots, n; \tau = 1, \dots, N) \quad (3.5)$$

と同様に表記できる [19]．次節では，繰返し試行のモデルを記述する．

3.2. 一人のプレイヤーが N 回独立にゲームを試行するモデル

式 (3.1) をもとに，試行回数 N までゲームを独立試行するとき，一人のプレイヤーの獲得賞金は

$$X(N) = \sum_{\tau=1}^N c(\tau) = \sum_{\tau=1}^N \sum_{i=1}^n c_i X_i(\tau), \quad \sum_{i=1}^n X_i(\tau) = 1,$$

$$X_i(\tau) = \begin{cases} 1 & (\text{選択される}), \\ 0 & (\text{選択されない}) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n; \tau = 1, \dots, N) \quad (3.6)$$

である [19]．本節のようにゲームを独立に試行し続けるとき，常に式 (3.1) を N 回加算した期待利得を獲得することから，試行回数 N までの $X(N)$ の期待利得は

$$E(X(N)) = \left(\sum_{i=1}^n c_i p_i \right) N = -\alpha N \quad (3.7)$$

と表される [19]．このとき，1 回の試行で α だけゲーミング企業の収益となり， $-\alpha N$ ということはそれだけゲーミング企業に手数料を支払っていることになる．したがって，ゲーミング企業はプレイヤーにゲームを試行させ続けたいと考えている．また，このときの $X(N)$ の分散は，独立試行なので

$$V(X(N)) = E((X(N) - E(X(N)))^2) = \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n c_i p_i \right)^2 \right) N = vN \quad (3.8)$$

と同様に数学的期待値として表される [19]．この分散に従い，コインの繰返しゲームに不確実性が存在する．次節では，この繰返し試行列を確率過程のランダム・ウォークとして，モデルの正規近似について記述する．

3.3. N 回独立試行におけるモデルの正規近似

ここで，一度，基本原理を再考するために，前提条件 (A) について，手数料がない特別の場合のコイン投げのランダム・ウォークに関する二項分布から，正規分布に近似できる方法について記述する [18, 23, 33] .

まず，手数料 $\alpha = 0$ となるコイン投げを独立に繰返し試行するランダム・ウォーク $X(\tau)$ ($= 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) は確率変数である．確率過程では，確率分布が試行回数を時間に捕らえ N に依存するため，ランダム・ウォークの確率関数は，時刻 N までの間に合計 N 回だけ正か負へ移動している．このとき，正への移動回数を N_+ とし，負への移動回数を N_- とすると

$$N_+ + N_- = N, \quad N_+ - N_- = X(N) \quad (3.9)$$

が成立する．ここで $X(N)$ は正への移動と負への移動の回数の差だけで決まり，正，負の順序には依存しない． N 回の移動のうち，正への移動が N_+ 回である確率は二項分布 $B(N, 1/2)$ に従うので

$${}_N C_{N_+} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{N!}{N_+!(N - N_+)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad (3.10)$$

与えられる．変数 N_+, N_- と変数 $N, X(N)$ との関係は式 (3.9) で決まるので，これを逆に解いた

$$N_+ = \frac{N + X(N)}{2}, \quad N_- = \frac{N - X(N)}{2} \quad (3.11)$$

を式 (3.10) に代入するとき，試行回数 N にゲームの獲得賞金 $X(N)$ となる確率 $P(X(N), N)$ が得られる．すなわち

$$P(X(N), N) = \frac{N!}{\left(\frac{N+X(N)}{2}\right)! \left(\frac{N-X(N)}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad (3.12)$$

と記述できる．

ところで，式 (3.12) には少し注意が必要である．すなわち， $X(N)$ の取得値は N の値が偶数と奇数に応じて，偶数か奇数に限られる：

$$\begin{cases} N \text{ が偶数のとき, } X(N) = 0, \pm 2, \dots, \pm N, \\ N \text{ が奇数のとき, } X(N) = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm N. \end{cases} \quad (3.13)$$

これは，式 (3.11) で， N_+ のとる値が $N_+ = 1, 2, \dots, N$ であることを考慮している．

時刻 N における獲得賞金 $X(N)$ は式 (3.12) の分布に従う確率変数である．ここで， $X(N)$ の平均と分散を求める． N_+ が二項分布 $B(N, 1/2)$ に従うことを利用して

$$E(N_+) = N \cdot \frac{1}{2} = \frac{N}{2}, \quad V(N_+) = N \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{N}{4} \quad (3.14)$$

と計算できる．したがって，式 (3.11) から $N_+ = (N + X(N))/2$ を用いるとき

$$\begin{aligned} E(X(N)) &= E(2N_+ - N) = 2 \cdot \frac{N}{2} - N = 0, \\ V(X(N)) &= E(X(N)^2) = E((2N_+ - N)^2) = 4 \cdot \frac{N}{4} = N \end{aligned} \quad (3.15)$$

と計算される．すなわち，ランダム・ウォークでは平均は 0，分散は N である．
ここで， N が大きいときには正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{x^2}{2N}} \quad (3.16)$$

に従うことが予想される．これを示すためにスターリングの公式 [33]

$$\ln N! \cong \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln N - N + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \quad (3.17)$$

を用いるとき，式 (3.12) について両辺の対数をとると

$$\begin{aligned} \ln P(X(N), N) &= \ln \frac{N!}{\left(\frac{N+X(N)}{2}\right)! \left(\frac{N-X(N)}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \\ &= \ln N! - \ln \left(\frac{N+X(N)}{2}\right)! - \ln \left(\frac{N-X(N)}{2}\right)! - N \ln 2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

となる．さらに，右辺の各項に式 (3.17) を適用して整理すると

$$\begin{aligned} \ln P(X(N), N) &= \ln 2 - \ln \sqrt{2\pi N} \\ &\quad - \frac{N+X(N)+1}{2} \ln \left(1 + \frac{X(N)}{N}\right) - \frac{N-X(N)+1}{2} \ln \left(1 - \frac{X(N)}{N}\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

とまとめられる．ここで，テイラー展開

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \cdots \quad (-1 < y \leq 1) \quad (3.20)$$

を 2 次まで用いて，式 (3.19) に代入すると

$$\ln P(X(N), N) \cong \ln(2/\sqrt{2\pi N}) - \frac{x^2}{2N} + O\left(\frac{x^2}{N^2}\right) \quad (3.21)$$

を得る．したがって

$$P(X(N), N) \cong \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{x^2}{2N}} \quad (3.22)$$

が得られる [33]．ここで，式 (3.22) は離散分布の確率関数の近似式なので，連続分布の確率密度関数 $f(x)$ と x の周りに幅 Δx をとった区間の確率に対応する

$$P(X(N), N) \cong f(x)\Delta x \quad (3.23)$$

の関係が成立する．

以上から， $\Delta x = 2$ と置くととき， N が大きいときにはランダム・ウォークは正規分布で近似できる [33]．ゆえに，このゲームの試行回数 N が大きいとき，連続変数 t を用いて近似的に $X(t) \sim N(0, t)$ に従うものとしてモデルを取扱うことができる．この原理を再び手数料 α を考慮した場合に適用すると，時刻 t に依存した期待値 $E(X(N)) = -\alpha t$ だけ平行移動するランダム・ウォークが得られる．すなわち，図 1 に示すように，ゲーム試行列が放物

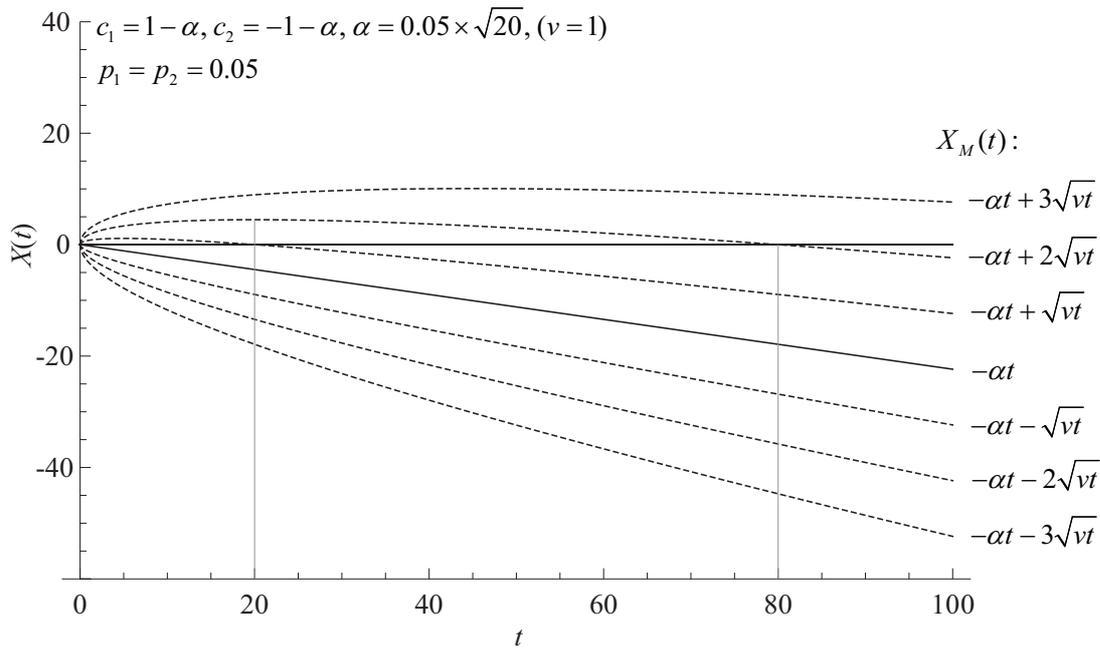


図 1: 勝者の勝ちパターンの予想図

線に従う標準偏差の制約のもとで、手数料だけ時刻に応じて平行移動する振舞いをする事が想定できる。

しかしながら、 N が十分大きくない場合には、正規分布への近似精度は良くはないので、当然モデルの誤差についても考慮する必要がある。一方で、図 2 に示すように、式 (3.13) に従うコイン投げの繰返し試行は、離散確率変数の奇数回と偶数回による揺らぎの大きさが、顕著になるため、分布の適合度や裾野の誤差よりも結果に大きな影響を与える。このことから、一人のプレイヤーのゲーム試行回数 N が十分大きくない場合には、参考程度に正規分布を活用して、モデルの動向を把握する目安に用いることが望ましい。

3.4. 一人のプレイヤーのゲーム試行列のパフォーマンス測度

ところで、ゲームの試行列の不確実性の傾向は、標準偏差 \sqrt{vt} の大きさに応じて、図 1 に示されている。このとき、試行回数 t におけるゲームの手数料 α として、個々のプレイヤーの獲得賞金は、試行回数 t が大きければ近似的に図 1 のような正規分布に従うと考えられる。勝者に限って観察すると、ゲームの不確実性に基づき最初は獲得賞金が増加するが、最大値を得て、その後減衰する傾向にあることが確認できる。図 2 の ● 印による時系列は具体的な獲得賞金の推移の例である。

そこで、プレイヤーのうち獲得賞金が、比較的優秀な状況が手数料 αt により、どのように影響を受けるのか調べるために、次のようにゲームの利得が、標準偏差 \sqrt{vt} の大きさに応じた成績の優秀なプレイヤーの獲得賞金予想曲線 $X_M(t)$ を定義する。すなわち

$$\frac{X(t) - E(X(t))}{\sqrt{V(X(t))}} = \lambda \quad (3.24)$$

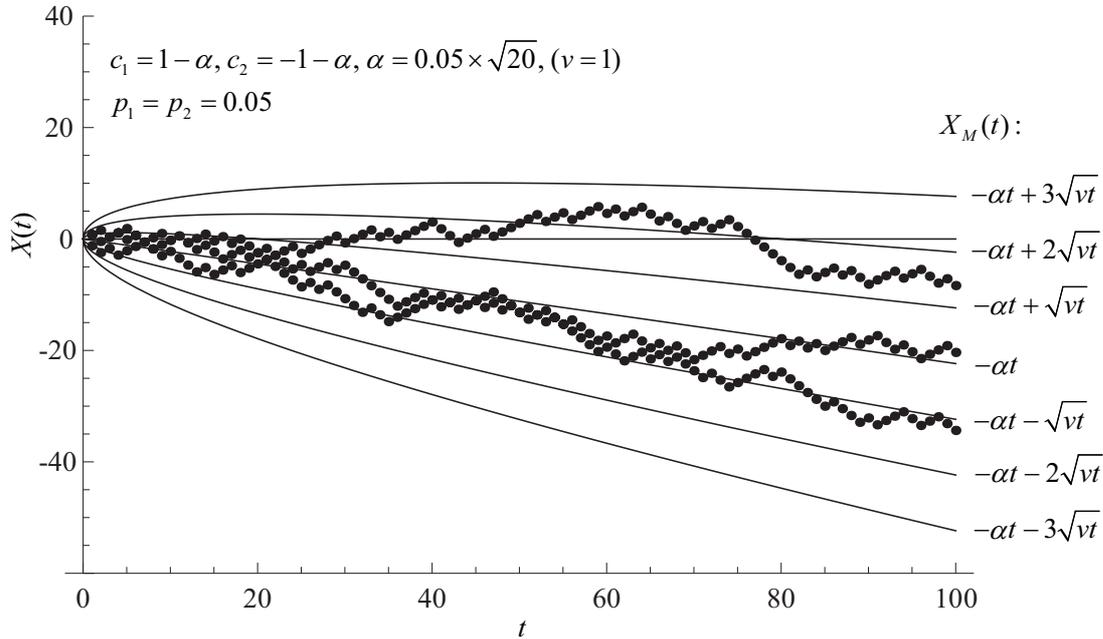


図 2: 手数料を考慮したプレイヤーの試行列の例

より

$$X_M(t) = E(X(t)) + \lambda \sqrt{V(X(t))} = -\alpha t + \lambda \sqrt{vt} \quad (3.25)$$

と見積もる [19] . ここに , λ は標準正規分布の片側確率点を意味し , コイン投げの試行列のゲームの勝敗のパフォーマンスを意味する . すなわち , 標準偏差の λ 倍だけゲームの試行結果の良否を定量的に示すことができる .

式 (3.25) の曲線は手数料を支払うにもかかわらず , 標準偏差 \sqrt{vt} の λ 倍だけ優れたパフォーマンスを残す様子を表現したものである . ゲーミング企業は勝者がある程度勝ち続けたとしても , 無限に賞金を支払うことを想定していない . 逆にどの程度の手数料 α を設定すれば , ゲームにおける勝者の最大の獲得賞金 $X_M(t^*)$ とその試行回数 t^* を得るのか調べておくことは重要である .

そこで , 式 (3.25) の試行回数 t は離散変数を連続変数として取扱っているので , 最大値を調べるために試行回数 t で微分すると

$$\frac{dX_M(t^*)}{dt} = 0, \quad t^* = \frac{\lambda^2 v}{4\alpha^2}, \quad X_M(t^*) = \frac{\lambda^2 v}{4\alpha} \quad (3.26)$$

が得られる [19] . したがって , 個々のプレイヤーにとっては , 分散 v はリスクに対する態度の決定因子でもあるし , その λ^2 倍だけ結果に効果が及ぶ可能性があるといえる . しかし , 逆に手数料 α に反比例して , 最大値が減少していくことも把握できる .

さらに , 個々のプレイヤーが標準偏差の \sqrt{vt} だけ優れたパフォーマンスを続けてゲームを試行するとしても , 最終的には総手数料 αt の影響を受けて元本と同じ状態に戻るときを

$$X_M(t^{**}) = 0, \quad t^{**} = \frac{\lambda^2 v}{\alpha^2} \quad (3.27)$$

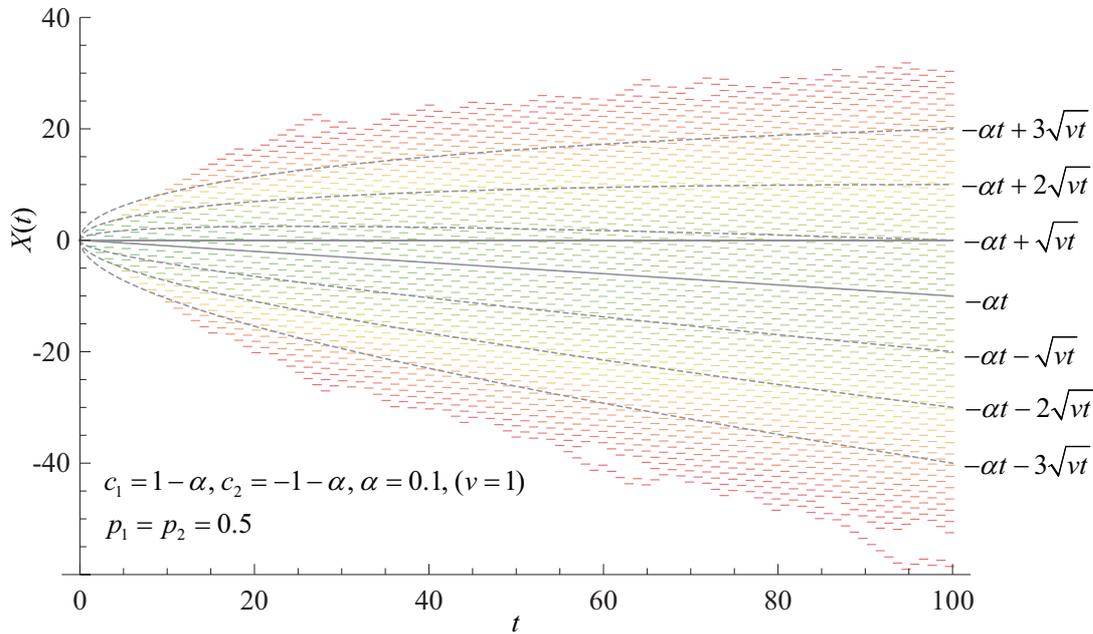


図 3: 数値実験の傾向

として見積もれる [19] .

したがって、ある一定の試行回数以上は、プレイヤーにはゲームを試行する魅力が無くなる。それゆえ、ゲーミング企業は収益と勝者の獲得賞金の満足のトレードオフを考える必要がある。すなわち、両者の Win-Win 関係が築けるゲームの手数料を設定することが重要である。このため、勝者の最大の獲得賞金の総和の算出が重要であり次章で詳述する。

4. m 人のプレイヤーのうち勝者の総獲得賞金モデルと敗者の期待損失モデル

ここで、前提条件 (A) のもとで、プレイヤー数 $m = 10^5$ 、試行回数 $N = 100$ 、表の出る確率 $p_1 = 0.5$ 、手数料 $\alpha = 0.1$ の条件として、2 章で記述したコイン投げの繰返し試行を実施する。その結果の試行列の分布を示したものが、図 3 である。

前章で、時刻 $\tau (= 1, \dots, N)$ における一人のプレイヤーのゲーム試行列を記述した $X(\tau)$ から、 $j (= 1, \dots, m)$ 番目のプレイヤーが勝っているか、負けているかの情報を用いるため、試行回数 τ 回目におけるプレイヤー j の獲得賞金の状態を

$$Y_{W_j}(\tau) = \max[X(\tau), 0] \quad (j = 1, \dots, m; \tau = 1, \dots, N) \quad (4.1)$$

とし、試行回数 τ 回目におけるプレイヤー j の損失の状態を

$$Y_{L_j}(\tau) = \min[X(\tau), 0] \quad (j = 1, \dots, m; \tau = 1, \dots, N) \quad (4.2)$$

と区別して記述する。プレイヤー j について、式 (4.1) もしくは式 (4.2) は、0 以上か否かで一方は必ず 0 になることを示す。ここで、 m 人分のプレイヤーについて、式 (4.1) を加算した後、プレイヤー数 m 人で割り、一人当たりのプレイヤーの総獲得賞金の平均値を計

算する．すなわち

$$\bar{Y}_W(\alpha, \tau) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_{W_j}(\tau) \quad (4.3)$$

と算出できる．この式 (4.3) は，勝者の獲得賞金をプレイヤーにどの程度還元しているのか見積もる尺度となる．当然，式 (4.3) の値 $\bar{Y}_W(\alpha, \tau)$ は，2章で示した $X_M(t)$ の傾向と同様に，ある試行回数 τ で最大値を示し，その後は減衰傾向になるものと考えられる．

また，同様に式 (4.2) から一人当たりのプレイヤーの損失の平均値は

$$\bar{Y}_L(\alpha, \tau) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_{L_j}(\tau) \quad (4.4)$$

と算出できる．ここで， $\bar{Y}_W(\alpha, \tau)$ ， $\bar{Y}_L(\alpha, \tau)$ は試行回数が少ない場合には，モデルが記述する誤差も大きいが，勝者がどの程度儲かっているかを調べる尺度として重要な意味を持つ．

一方，数理的に $X(t) \geq 0$ における勝者の最大獲得賞金の総和について一人当たりの期待利得を

$$E(Y_W(\alpha, t)) = \int_0^{\infty} \frac{X(t)}{\sqrt{2\pi vt}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t) \quad (4.5)$$

と定義する．また， $X(t) \leq 0$ における敗者の損失の総和について一人当たりの期待損失を

$$E(Y_L(\alpha, t)) = \int_{-\infty}^0 \frac{X(t)}{\sqrt{2\pi vt}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t) \quad (4.6)$$

と定義する．

これを用いて，図 4 は，図 3 の数値実験をもとに，式 (4.3)，(4.5) と，式 (4.4)，(4.6) の傾向を描いたものである．すなわち，0 以上で， $E(Y_W(\alpha, t))$ が実線， $\bar{Y}_W(\alpha, \tau)$ が ● 印として描かれており，0 以下で， $E(Y_L(\alpha, t))$ が実線， $\bar{Y}_L(\alpha, \tau)$ が ● 印として描かれている．したがって，勝者にとって，一定の試行回数までは，獲得賞金が増加傾向にあるが，最大値を通過後に減衰し，魅力が無くなることが読取れる．また，敗者にとって手数料とともに勝者に支払う損失の絶対値は，試行回数に応じてかなり大きくなることがわかる．すなわち，その内訳は，ゲーミング企業に支払う手数料の総額が， αt として増加することが改めてわかる．

さらに， $X(t) \geq 0$ における最大獲得賞金の総和について一人当たりの期待利得を，全体の勝者の比率で割った期待利得

$$Z_W(\alpha, t) = \frac{\int_0^{\infty} \frac{X(t)}{\sqrt{2\pi vt}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t)}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi vt}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t)} \quad (4.7)$$

と定義する．また， $X(t) \leq 0$ における敗者の損失の総和について一人当たりの期待損失を，全体の敗者の比率で割った期待利得

$$Z_L(\alpha, t) = \frac{\int_{-\infty}^0 \frac{X(t)}{\sqrt{2\pi vt}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t)}{\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi vt}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{(X(t) + \alpha t)^2}{vt}\right)\right) dX(t)} \quad (4.8)$$

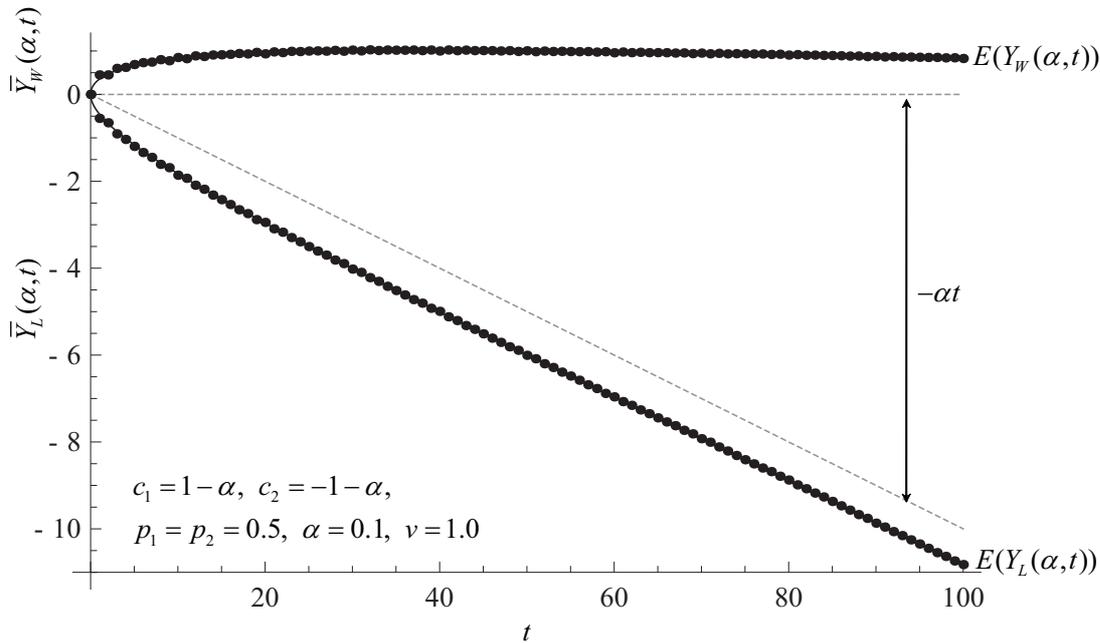


図 4: 数値実験の整合性 (勝者の獲得賞金の総和と敗者の損失の総和の傾向)

と定義する．ここで，定義した $Z_W(\alpha, t)$ は，獲得賞金が本来は勝者のみに， $Z_L(\alpha, t)$ は損失が敗者のみに考慮されるべきであり，プレイヤー全体ではないことを考慮して，再定義したものである．

次章では， $E(Y_W(\alpha, t))$ と $E(Y_L(\alpha, t))$ について，勝者の獲得賞金の最大化の傾向について調べ，モデルをべき乗回帰分析を用いて記述している．

5. 勝者の獲得賞金の総和最大化とべき乗回帰分析

まず，4章で取扱った式 (4.5) の $E(Y_W(\alpha, \tau))$ の最大値を

$$\begin{aligned} U_W(\alpha, t^{***}) &= \max_{0 \leq \tau \leq t} E(Y_W(\alpha, \tau)), \\ U_L(\alpha, t^{***}) &= E(Y_L(\alpha, t^{***})) \end{aligned} \quad (5.1)$$

と探索する．すなわち，この最大値 $U_W(\alpha, t^{***})$ は，勝者の獲得賞金の期待利得の最大値を示すので，手数料を含むコイン投げの繰返し試行における勝者の価値関数の値として定義する．また， $U_L(\alpha, t^{***})$ は，敗者の期待損失による価値関数と定義する．本研究では Mathematica を利用して Newton 法による標準の探索を試みている [36]．演算中に，Mathematica による数値結果は厳密解ではないと注記が標記されるが，図 5 のようにほぼ最大値を得ることがわかる．その結果について， α と式 (5.1) の関係は，表 1 に示されるとおり得られる．

図 5 に示される $U_W(\alpha, t)$ の軌跡は，視覚的に Stevens のべき関数 [28] の値 u_k と推測されるので

$$u_k \approx a_0 t_k^{a_1} \quad (5.2)$$

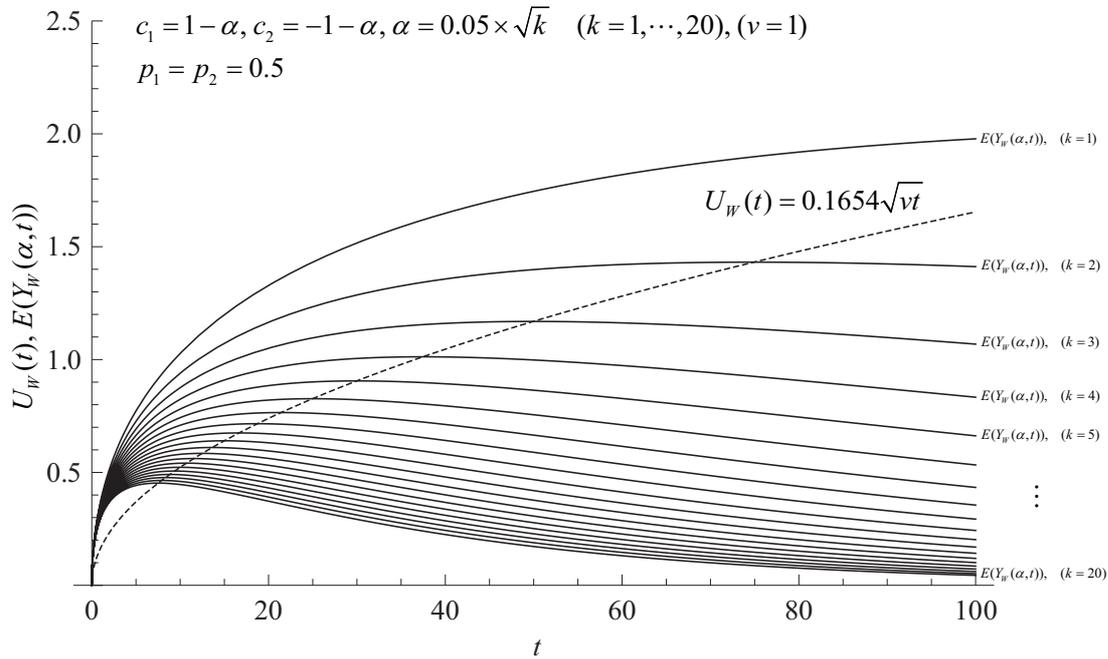


図 5: 勝者の獲得賞金の総和の推移

表 1: u_{W_k} ($= u_k = U_W(t)$), u_{L_k} ($= U_L(t)$) と α_k の傾向の数値例 ($v_k = 1$)

α_k	t_k	u_{W_k} ($= u_k$)	u_{L_k}
0.10	$t_1 = 37.45480$ 回	$u_{W_1} = 1.01228$ 円	$u_{L_1} = -4.75776$ 円
0.12	$t_2 = 26.01028$ 回	$u_{W_2} = 0.84357$ 円	$u_{L_2} = -3.96480$ 円
0.14	$t_3 = 19.10959$ 回	$u_{W_3} = 0.72306$ 円	$u_{L_3} = -3.39840$ 円
0.16	$t_4 = 14.63078$ 回	$u_{W_4} = 0.63268$ 円	$u_{L_4} = -2.97360$ 円
0.18	$t_5 = 11.56012$ 回	$u_{W_5} = 0.56238$ 円	$u_{L_5} = -2.64320$ 円
0.20	$t_6 = 9.36370$ 回	$u_{W_6} = 0.50614$ 円	$u_{L_6} = -2.37888$ 円
0.22	$t_7 = 7.73860$ 回	$u_{W_7} = 0.46013$ 円	$u_{L_7} = -2.16262$ 円
0.24	$t_8 = 6.50257$ 回	$u_{W_8} = 0.42178$ 円	$u_{L_8} = -1.98240$ 円
0.26	$t_9 = 5.54065$ 回	$u_{W_9} = 0.38934$ 円	$u_{L_9} = -1.82991$ 円
0.28	$t_{10} = 4.77740$ 回	$u_{W_{10}} = 0.36153$ 円	$u_{L_{10}} = -1.69920$ 円
0.30	$t_{11} = 4.16164$ 回	$u_{W_{11}} = 0.33743$ 円	$u_{L_{11}} = -1.58592$ 円
0.32	$t_{12} = 3.65770$ 回	$u_{W_{12}} = 0.31634$ 円	$u_{L_{12}} = -1.48680$ 円
0.34	$t_{13} = 3.24003$ 回	$u_{W_{13}} = 0.29773$ 円	$u_{L_{13}} = -1.39934$ 円
0.36	$t_{14} = 2.89003$ 回	$u_{W_{14}} = 0.28119$ 円	$u_{L_{14}} = -1.32160$ 円
0.38	$t_{15} = 2.59382$ 回	$u_{W_{15}} = 0.26639$ 円	$u_{L_{15}} = -1.25204$ 円
0.40	$t_{16} = 2.34092$ 回	$u_{W_{16}} = 0.25307$ 円	$u_{L_{16}} = -1.18944$ 円

なる関係式を用いると，表 1 に示す K 組のデータからなる対数をとった回帰式は

$$\ln u_k = \ln a_0 + a_1 \ln t_k + \epsilon_k \quad (k = 1, \dots, K) \quad (5.3)$$

と見積もられる．これを最小二乗法 [9]

$$\min J_1 = \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \epsilon_k^2 = \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\ln u_k - (\ln a_0 + a_1 \ln t_k))^2 \quad (5.4)$$

により解く．すなわち，式 (5.4) について，それぞれ a_0 ， a_1 で偏微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial a_0} &= \frac{1}{a_0} \left(K \ln a_0 + a_1 \sum_{k=1}^K \ln t_k - \sum_{k=1}^K \ln u_k \right) = 0, \\ \frac{\partial J_1}{\partial a_1} &= \ln a_0 \sum_{k=1}^K \ln t_k + a_1 \sum_{k=1}^K (\ln t_k)^2 - \sum_{k=1}^K (\ln t_k \ln u_k) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

とおくとき，正規方程式 [9]

$$\begin{pmatrix} K & \sum_{k=1}^K \ln t_k \\ \sum_{k=1}^K \ln t_k & \sum_{k=1}^K (\ln t_k)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K \ln u_k \\ \sum_{k=1}^K (\ln t_k \ln u_k) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

より

$$a_0 = \exp \left(\frac{\sum_{k=1}^K (\ln t_k)^2 \sum_{k=1}^K \ln u_k - \sum_{k=1}^K \ln t_k \sum_{k=1}^K (\ln t_k \ln u_k)}{K \sum_{k=1}^K (\ln t_k)^2 - \left(\sum_{k=1}^K \ln t_k \right)^2} \right) \quad (5.7)$$

および

$$a_1 = \frac{K \sum_{k=1}^K \ln t_k \ln u_k - \sum_{k=1}^K \ln t_k \sum_{k=1}^K \ln u_k}{K \sum_{k=1}^K (\ln t_k)^2 - \left(\sum_{k=1}^K \ln t_k \right)^2} \quad (5.8)$$

と導出できる．また，その決定係数 [12] は

$$R^2 = \left(\frac{K \sum_{k=1}^K \ln t_k \ln u_k - \sum_{k=1}^K \ln t_k \sum_{k=1}^K \ln u_k}{\sqrt{\left(K \sum_{k=1}^K (\ln t_k)^2 - \left(\sum_{k=1}^K \ln t_k \right)^2 \right) \left(K \sum_{k=1}^K (\ln u_k)^2 - \left(\sum_{k=1}^K \ln u_k \right)^2 \right)}} \right)^2 \quad (5.9)$$

と見積もられる．この式 (5.2) から式 (5.9) までを用いると，式 (3.2) で定義したコイン投げについて，その勝者の獲得賞金の総和最大化とその試行回数における関係式は

$$U_W(t) = 0.1654\sqrt{t} \quad (\because a_0 = 0.1654, a_1 = 0.5) \quad (5.10)$$

表 2: u_{W_k} ($= u_k = U_W(t)$), u_{L_k} ($= U_L(t)$) と v_k の傾向の数値例 ($\alpha_k = 0.1$)

v_k	t_k	u_{W_k} ($= u_k$)	u_{L_k}
1	$t_1 = 37.45480$ 回	$u_{W_1} = 1.01228$ 円	$u_{L_1} = -4.75776$ 円
2	$t_2 = 74.90960$ 回	$u_{W_2} = 2.02456$ 円	$u_{L_2} = -9.51552$ 円
3	$t_3 = 112.3644$ 回	$u_{W_3} = 3.03685$ 円	$u_{L_3} = -14.27329$ 円
4	$t_4 = 149.8192$ 回	$u_{W_4} = 4.04913$ 円	$u_{L_4} = -19.03105$ 円
5	$t_5 = 187.2740$ 回	$u_{W_5} = 5.06141$ 円	$u_{L_5} = -23.78881$ 円
6	$t_6 = 224.7288$ 回	$u_{W_6} = 6.07369$ 円	$u_{L_6} = -28.54657$ 円
7	$t_7 = 262.1836$ 回	$u_{W_7} = 7.08598$ 円	$u_{L_7} = -33.30434$ 円
8	$t_8 = 299.6384$ 回	$u_{W_8} = 8.09826$ 円	$u_{L_8} = -38.06210$ 円
9	$t_9 = 337.0932$ 回	$u_{W_9} = 9.11054$ 円	$u_{L_9} = -42.81986$ 円
10	$t_{10} = 374.5480$ 回	$u_{W_{10}} = 10.12282$ 円	$u_{L_{10}} = -47.57762$ 円

が得られる。

このとき，決定係数は $R^2 = 1$ である．同様に，表 1 の $U_L(t)/U_W(t)$ の関係は一定値なので，敗者の期待損失は

$$U_L(t) = -0.7774\sqrt{t} \quad (5.11)$$

と求まる．ここで，決定係数 $R^2 = 1$ ということは， $U_L(t)$ と $U_W(t)$ のモデルを t で完全に説明できることになる．

ところで，分散の大きさの影響について，表 2 に示す結果が得られる．そこで，式 (3.26) を参考に，分母に α ，分子に v が現れると想定して，式 (5.2) から式 (5.9) までと同様に，べき乗回帰分析の関数の値

$$u_k \approx b_0 \alpha_k^{b_1} v_k^{b_2} \quad (5.12)$$

と推測する．この関係式を用いると，表 1 と表 2 を併せた K 組のデータからなる対数をとった回帰式は

$$\ln u_k = \ln b_0 + b_1 \ln \alpha_k + b_2 \ln v_k + \epsilon_k \quad (k = 1, \dots, K) \quad (5.13)$$

と見積もられる．これを最小二乗法 [9]

$$\min J_2 = \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \epsilon_k^2 = \min \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (\ln u_k - (\ln b_0 + b_1 \ln \alpha_k + b_2 \ln v_k))^2 \quad (5.14)$$

により解く．すなわち，式 (5.14) について，それぞれ b_0 ， b_1 ， b_2 で偏微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial b_0} &= \frac{1}{b_0} \left(K \ln b_0 + b_1 \sum_{k=1}^K \ln \alpha_k + b_2 \sum_{k=1}^K \ln v_k - \sum_{k=1}^K \ln u_k \right) = 0, \\ \frac{\partial J_2}{\partial b_1} &= \ln b_0 \sum_{k=1}^K \ln \alpha_k + b_1 \sum_{k=1}^K (\ln \alpha_k)^2 + b_2 \sum_{k=1}^K (\ln \alpha_k \ln v_k) - \sum_{k=1}^K (\ln \alpha_k \ln u_k) = 0, \\ \frac{\partial J_2}{\partial b_2} &= \ln b_0 \sum_{k=1}^K \ln v_k + b_1 \sum_{k=1}^K (\ln \alpha_k \ln v_k) + b_2 \sum_{k=1}^K (\ln v_k)^2 - \sum_{k=1}^K (\ln v_k \ln u_k) = 0 \quad (5.15) \end{aligned}$$

とおくとき，正規方程式 [9]

$$\begin{pmatrix} K & \sum_{k=1}^K \ln \alpha_k & \sum_{k=1}^K \ln v_k \\ \sum_{k=1}^K \ln \alpha_k & \sum_{k=1}^K (\ln \alpha_k)^2 & \sum_{k=1}^K (\ln \alpha_k \ln v_k) \\ \sum_{k=1}^K \ln v_k & \sum_{k=1}^K (\ln \alpha_k \ln v_k) & \sum_{k=1}^K (\ln v_k)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K \ln u_k \\ \sum_{k=1}^K (\ln \alpha_k \ln u_k) \\ \sum_{k=1}^K (\ln v_k \ln u_k) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

を解くと

$$U_W(\alpha, v) = 0.101228 \frac{v}{\alpha} \quad (\because b_0 = 0.101228, b_1 = -1, b_2 = 1) \quad (5.17)$$

を得る．また， $U_L(\alpha, v)/U_W(\alpha, v)$ は一定値のため

$$U_L(\alpha, v) = -0.475776 \frac{v}{\alpha}, \quad (5.18)$$

$$U_G(\alpha, v) = U_W(\alpha, v) + U_L(\alpha, v) = -0.374548 \frac{v}{\alpha} \quad (5.19)$$

が得られた．ここに， $U_W(\alpha, v)$ は勝者の価値関数を， $U_L(\alpha, v)$ は敗者の価値関数を， $U_G(\alpha, v)$ はゲーミング企業の価値関数を， α と v で表現した式である．さらに，式 (5.19) は， $-\alpha t$ でもあるため， t は

$$t = 0.374548 \frac{v}{\alpha^2} \quad (5.20)$$

の関係が得られる．この関係から，手数料 α を意思決定因子として調節して，獲得賞金の総和の最大値とそのゲームの試行回数の大きさを決定することができる．すなわち，試行回数 t は α の二乗に反比例し，その $U_W(t)$ ， $U_L(t)$ ， $U_G(t)$ は α に反比例する．また，式 (5.17)，(5.18)，(5.19) より，勝者の獲得賞金の総和が最大となる時， α と v の大きさに依らず，これらの係数の比率の割合に一致する勝者の期待利得，敗者の期待損失，ゲーミング企業の期待収益となることわかる．

この結果から，式 (5.17)，(5.18)，(5.19) に式 (5.20) を代入して，式 (5.10)，(5.11) のように t で表現し直すと

$$U_W(t) = 0.1654\sqrt{vt}, \quad (5.21)$$

$$U_L(t) = -0.7774\sqrt{vt}, \quad (5.22)$$

$$U_G(t) = -0.612\sqrt{vt} \quad (5.23)$$

が得られた．すなわち，式 (5.21) の結果は，図 5 の破線に相当する ($v = 1$) ．

また，図 5 の実線のうち，破線よりも左側については，勝者の獲得賞金の総和が大きくなるので，ゲームの試行回数について意思決定する価値があることわかる．しかし，逆に破線よりも右側では，ゲーミング企業の収益となり，勝者にとって魅力がなくなるので，実線と破線の交点である試行回数 t^{***} により，ゲームを停止することが望ましいことわかる．

ところで，式 (5.21)，(5.22) から，勝者が凹関数としてリスク回避的であり，敗者が凸関数としてリスク愛好的であることがわかる．この関係は，累積プロスペクト理論 [28, 31] の

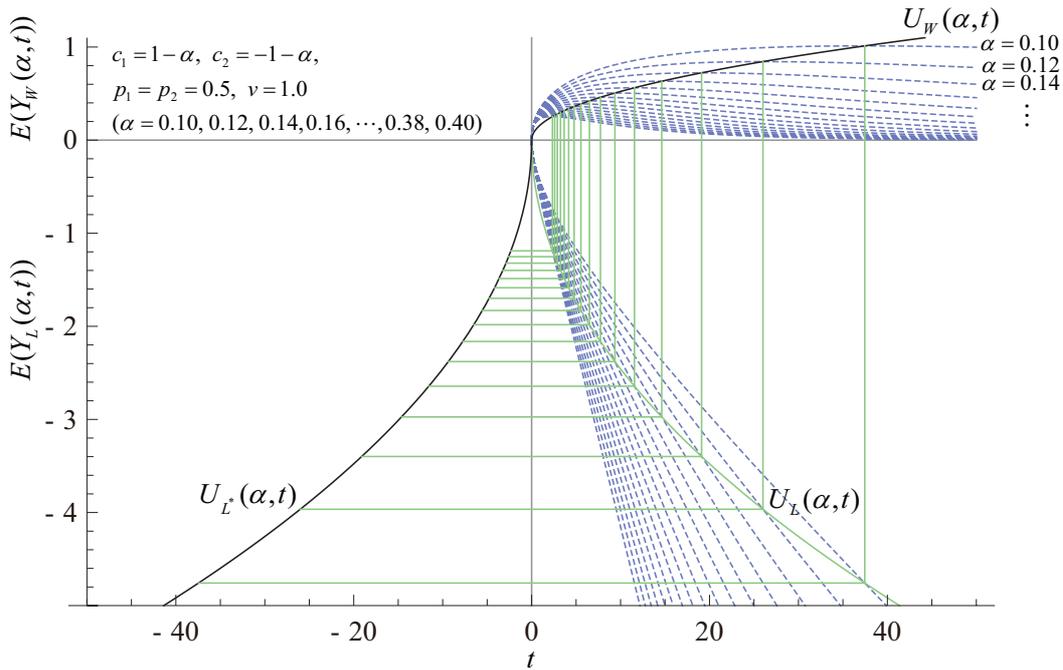


図 6: 一人当たりの勝者の獲得賞金の総和と敗者の損失の総和の鏡映効果

鏡映効果 [6] を示すべき関数と同様の傾向である．そこで，図 6 に示すように，第 4 象限の敗者の傾向を，第 3 象限に写像する．すなわち

$$U_{L^*}(t) = -0.7774\sqrt{v(-t)} \tag{5.24}$$

で表記し直すと，敗者がリスク愛好的である結果は，鏡映効果で示される傾向に一致する．すなわち，ゲーム試行前の元本を原点とおき，参照点 [28, 31] とするとき，敗者は参照点まで戻る回数だけ余分にゲームを試行し直さなければならず，そうしたときに手数料の大きさに対して，敗者がリスク愛好的である傾向が説明できる．しかし，プロスペクト理論 [28, 31] は，編集段階で言語的表現の違いにより価値関数を定義している．このため，本研究で導出したべき関数は，手数料と分散を内包した試行回数 t で説明しているので，モデルの導出が異なることを注意しなければならない．

一方，勝者のみに獲得賞金を還元する場合には，図 6 の特徴は，図 7 のように $E(Y_W(\alpha, t))$ と $E(Y_L(\alpha, t))$ ではなく， $Z_W(\alpha, t)$ と $Z_L(\alpha, t)$ により表現される．そこで，獲得賞金の総和の最大値は， $Z_W(\alpha, t)$ と $Z_L(\alpha, t)$ により算出されないが， α と $U_W(\alpha, t)$ との関係で算出された表 1 の t と α の関係を適用すると，式 (5.21)，(5.22)，(5.24) と同様に

$$V_W(t) = \frac{1}{0.270268}U_W(t) = 0.612\sqrt{vt}, \tag{5.25}$$

$$V_L(t) = \frac{1}{1 - 0.270268}U_L(t) = -1.065\sqrt{vt}, \tag{5.26}$$

$$V_{L^*}(t) = -1.065\sqrt{v(-t)} \tag{5.27}$$

が得られる．ここに， $V_W(t)$ は，勝者の立場から獲得賞金を t により見積もる価値関数であ

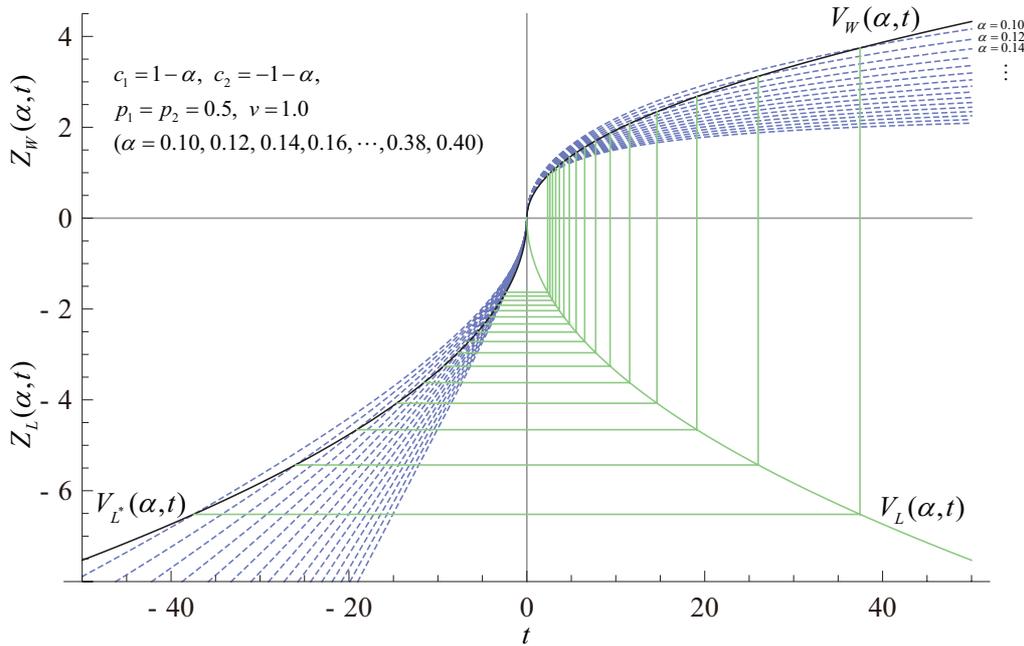


図 7: 勝者の獲得賞金の総和の期待値と敗者の損失の期待値の鏡映効果

り, $V_L(t)$ は, 敗者の立場から損失を t により見積もる価値関数である. また, t が α により決定されるとき, 図 7 のように, $Z_W(\alpha, t)$ の分母を記述する勝者の比率が, 一定値 0.270268 を示す値の軌跡であることがわかった. このため, 式 (5.25), (5.26) に一致する値を得る式 (4.7), (4.8) は, CVaR [22] のようにある確率のもとで分布の裾野の期待値を説明する式でもある.

さらに, 式 (5.25) を式 (3.26) を参考に, 式 (5.20) を代入して, 分母に α , 分子に v が現れる

$$V_W(t^{***}) = 0.374548 \frac{v}{\alpha} \left(= 0.612^2 \frac{v}{\alpha} \right), \quad t^{***} = 0.374548 \frac{v}{\alpha^2} \left(= 0.612^2 \frac{v}{\alpha^2} \right) \quad (5.28)$$

に書き換えることができる. ここで, $V_W(t)$ が $-U_G(t)$ に等しいことに気がつく. すなわち, 本研究で与えた制約のもとで,ゲーミング企業が勝者の満足を考慮しながら, ゲームを停止する試行回数 t^{***} を決定する基準は,ゲーミング企業の期待収益と, 勝者のみを考慮した獲得賞金の期待利得が均衡する

$$V_W(t^{***}) + U_G(t^{***}) = 0 \quad (5.29)$$

と求まった. この関係を満たしながら,ゲーミング企業は, 勝者の期待利得の最大化と手数料による収益確保のため, 意思決定基準として試行回数をコントロールできる. また, このとき $\lambda^{***} = \sqrt{0.374548}$ とするとき, 式 (4.7) に示す $Z_W(\alpha, t)$ の分母と同じ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda^{***}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy = 0.270268 \quad (5.30)$$

を得る. したがって, 手数料を考慮したコイン投げの繰返しゲームは, 勝者の比率が, 0.270268 になるときにゲームを停止すると, 勝者の獲得賞金の総和の最大化を実施することができ

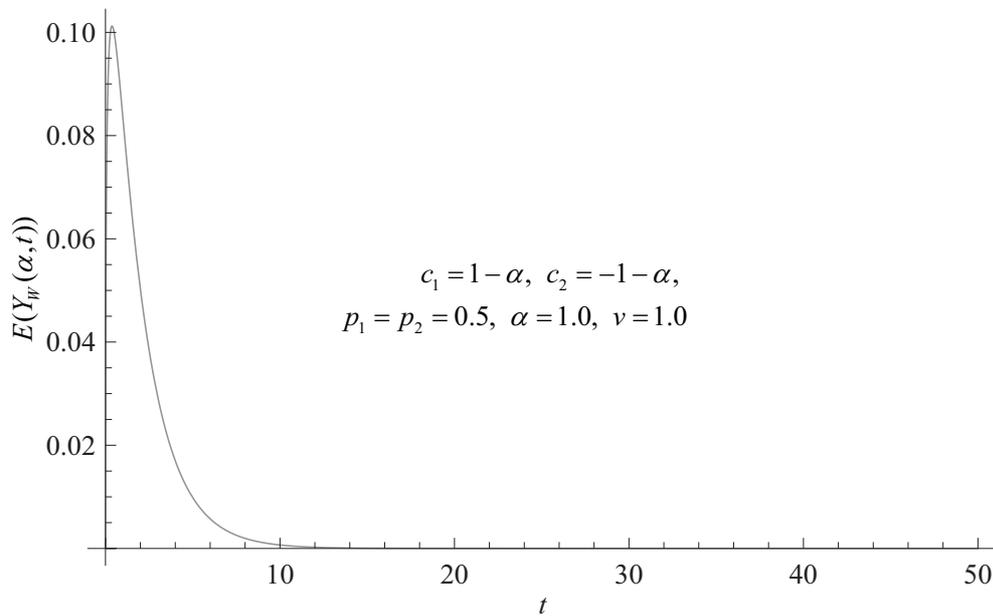


図 8: 手数料 $\alpha = 1$ の場合の誤差

る．以上で，モデルの提案について記述した．次章では，モデルの実用上の注意点を数値実験を通じて考察する．

6. 数値実験による考察とモデルの注意点

6.1. 等確率で手数料が勝者の利得に確率の場合

設定条件 (A) において，手数料 $\alpha = 1$ のときには，コイン投げの繰返しゲームでは，優れたパフォーマンスを見せても利得はない．にもかかわらず，図 8 は，試行回数 $t^{***} = 0.374548$ ，勝者の獲得期待利得 $U_W(t^{***}) = 0.101228$ を示す．これは，明らかに誤差になる．しかし，この数値は，本研究で求めたモデルの係数そのものである．したがって，本研究の提案モデルでは，この分布の形を試行回数に対応したべき関数に従って拡大させていることがわかる．ただし，このように試行回数の小さい区間に，提案モデルを適用する場合には，裾野の積分による誤差と，試行回数が偶数回か奇数回による揺れの挙動，分布形の適合度など，注意しなければならないので，得られた結果を一つの目安に近似解として取扱うことが望ましい．

6.2. コイン投げの表と裏が異なる確率の場合

ここで，前提条件 (B) ($p_1 < p_2$) の数値実験を行う．各条件は，4 章で示した前提条件 (A) と同じ条件として，プレイヤー数 $m = 10^5$ ，試行回数 $N = 100$ ，手数料 $\alpha_0 = 0.1$ の条件としてコイン投げを繰返し試行する．

ここで，ゲーミング企業が手数料として， α_0 だけ得るように見えるが，このゲーミングでは，ゲームの構造による費用が発生する．すなわち，本節の数値実験では， $p_1 < p_2$ より，

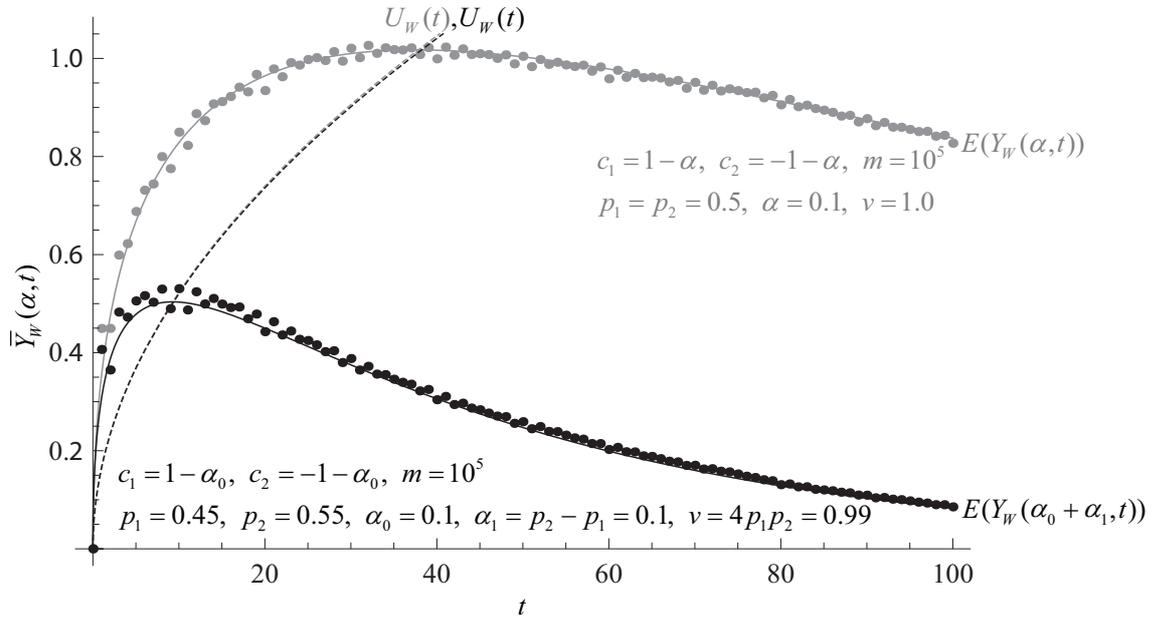


図 9: ゲームの仕組みによる費用構造を含む場合の数値実験

次のようなゲームの費用構造が

$$\alpha = -((1 - \alpha_0)p_1 + (-1 - \alpha_0)p_2) = \alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_0 + (p_2 - p_1) = \alpha_0 + (1 - 2p_1) \quad (6.1)$$

と見積もられる．また，分散は

$$v = (1 - \alpha_0)^2 p_1 + (-1 - \alpha_0)^2 p_2 - ((1 - \alpha_0)p_1 + (-1 - \alpha_0)p_2)^2 = 4p_1(1 - p_1) \quad (6.2)$$

と算出される．ここで，一例として，表が出る確率 $p_1 = 0.45$ ，裏が出る確率 $p_2 = 1 - p_1 = 0.55$ と仮定する．このとき，前提条件 (A) と前提条件 (B) の勝者の獲得賞金の総和の最大値の傾向を示す数値実験の結果は，図 9 に示すとおり得られた．また，比較のため，理論値による最大値の結果は，表 3 に示す傾向を得た．図 9 と表 3 から読取れることは，勝者の獲得賞金の総和の最大値 $U_W(t)$ が 2 倍になるためには，手数料 α が 1/2 倍になることである．しかし，前提条件 (B) は手数料を $\alpha_0 = 0.1$ とし，確率 p_1 の変化により， $\alpha_1 = p_2 - p_1 = 0.1$ も手数料として，手数料は $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 = 0.2$ と 2 倍になる．このことから，勝者の獲得賞金の総和の最大化とゲーミング企業の収益は，確率 p_1 の変化によっても大きな影響を受けることがわかる．

ところで，式 (6.1)，(6.2) を， $\alpha_0 = 0$ のもとで式 (5.28) に代入すると

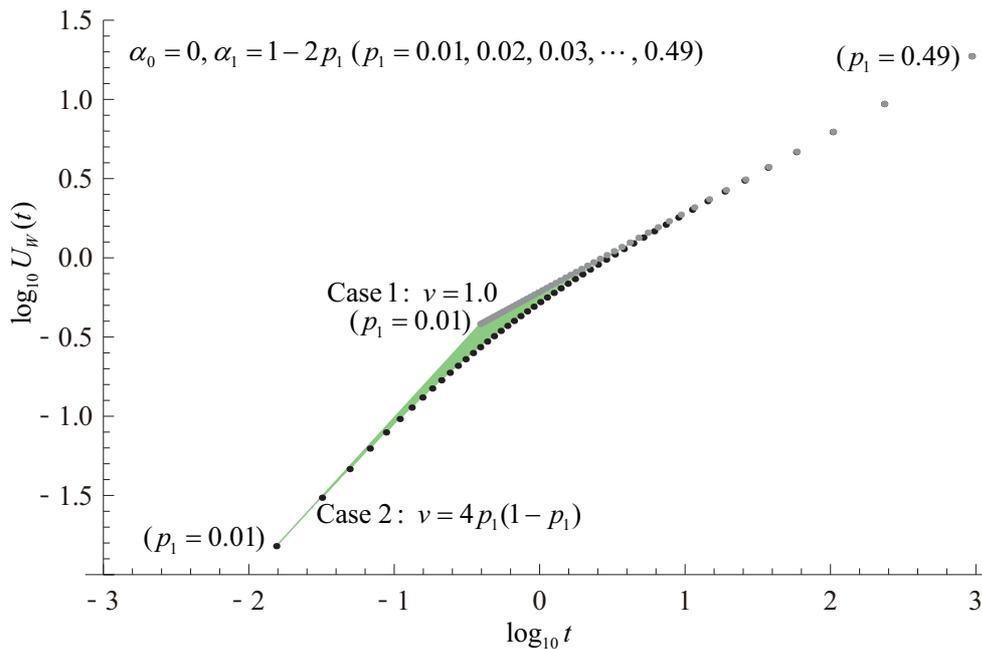
$$V_W(t^{****}) = 0.374548 \left(\frac{4p_1(1 - p_1)}{(1 - 2p_1)} \right), \quad t^{****} = 0.374548 \left(\frac{4p_1(1 - p_1)}{(1 - 2p_1)^2} \right) \quad (6.3)$$

$$\left(0 \leq p_1 < \frac{1}{2} \right)$$

と見積もることができる．これは，ゲームの構造の中に手数料を内包する一般的なゲーミングの傾向を示す．このとき， p_1 が 1/2 より，わずかに小さい場合には，本研究のモデルと

表 3: 前提条件 (A) と (B) の数値実験結果

指標	前提条件 (A)	前提条件 (B)
$U_W(t)$	1.01228	0.50108
$U_L(t)$	4.75776	2.35509
t	37.4548	9.2700

図 10: 確率 p_1 の変化による誤差

誤差は小さい．しかし， p_1 が $1/2$ よりかなり小さくなると，式 (6.3) の分子である分散に対応して小さくなるので，本研究で提案する試行回数よりも小さくなる傾向がわかる．

すなわち，設定条件 (B) では，確率 p_1 を変化させることにより，分散も大きさが変化する．その傾向を示したものが，図 10 である．この図は，試行回数の小さい区間を強調するために，常用対数による両対数表示で図示している．この傾向より，逆に手数料 α_1 が，1 に近づくと分散が小さくなるため，図 8 のように，試行回数が小さいときは，勝者の期待利得を過大評価しない．しかし，図 10 の傾向のとおり，モデルのべき関数に分散の変化が乗算されるために，提案モデルはべき関数だけの表現ではなくなる．このため，試行回数が小さい区間では，誤差に注意しなければならない．

6.3. プレイヤー数の大きさに対応するモデルの傾向

さらに，プレイヤー数を $m = 10^2, m = 10^3, m = 10^4, m = 10^5$ の場合について，数値実験の結果を図示すると，図 11 のように視覚化できる．したがって，図 11 の傾向は，緒論で問題提起した m の変化として，ある時刻 t においてプレイヤーが自由に参加と退出を行うとき，マーケットの安定性の挙動の目安になる． m 人のプレイヤーのコイン投げによる確率

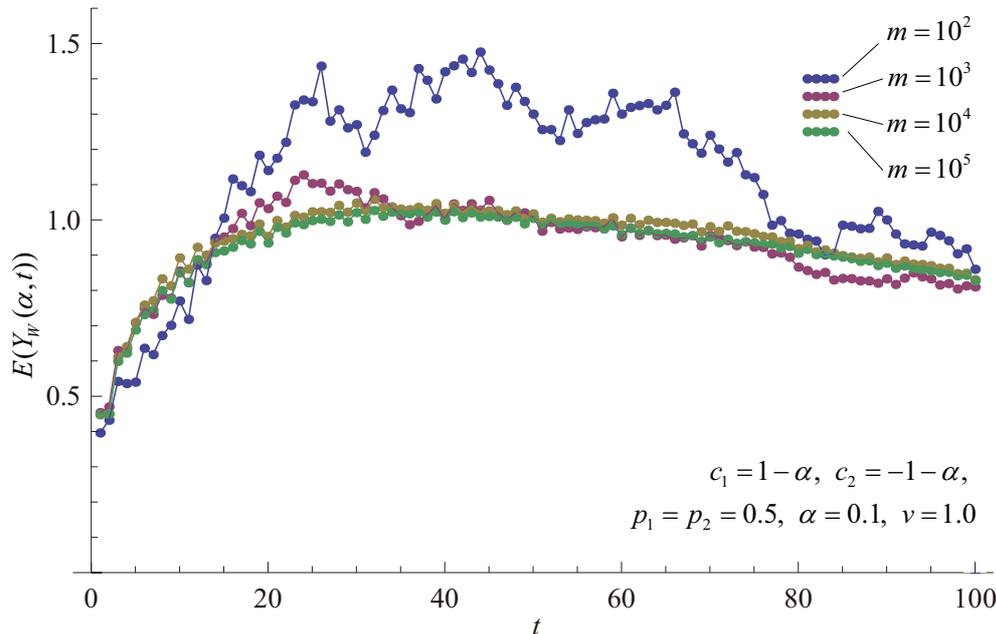


図 11: プレイヤー数 m の変化によるモデルの不確実性

試行列の期待利得のため、 m の大きさによる不確実性が現れ、提案モデルの試行回数における期待利得との乖離の幅が大きくなることもある。このため、ゲーミング企業は、実際に本研究の成果を適用するには、この不確実性についても実用上は検討する必要がある。

6.4. サイコロ投げの場合およびモデルの適用範囲の限界

サイコロ投げの場合、出る目の数から 3.5 を引く値が獲得賞金となる多項モデルである。コイン投げと同様に、同じ分布により互いに独立試行できるため、ゲーミングとしては同じ傾向が期待できる。

そこで、 $\alpha = 0.5$ とするとき、すなわち、出る目から 4 を引くときの傾向を示した図が、図 12 である。このように、多項分布に従うモデルでも、正規分布に近づく試行回数があり多くなくてもよい場合には、本研究で示す傾向を得ることができる。

一方、一般に、籤(くじ)のように複数の当りが存在し、小さな確率で高額賞金が当たる場合には、多項モデルのツリー構造にジャンプが発生する。このため、繰返しゲームの試行列には、多峰性の問題が生じて本研究の傾向は得られなくなる。また、前節で考察したとおり、極端にプレイヤー数が少ない場合やプレイヤー数が変化する場合では、1 回の試行で、勝者の数が敗者の数を著しく上回るときがあり、ゲーミング企業の収益は安定しない。

このため、提案モデルが前提条件を維持し、その適合度が非常に良い場合にだけ、本研究の成果は保証されることになる。

7. まとめ

本研究では、多人数のプレイヤーが同時に互いに独立にコイン投げを、ゲーミング企業が設定する試行回数まで、試行する制約条件を設定した。この条件下で、勝者の獲得賞金の総和の最大化をもとに、ゲーミング企業のゲームを停止する意思決定基準を考察した。

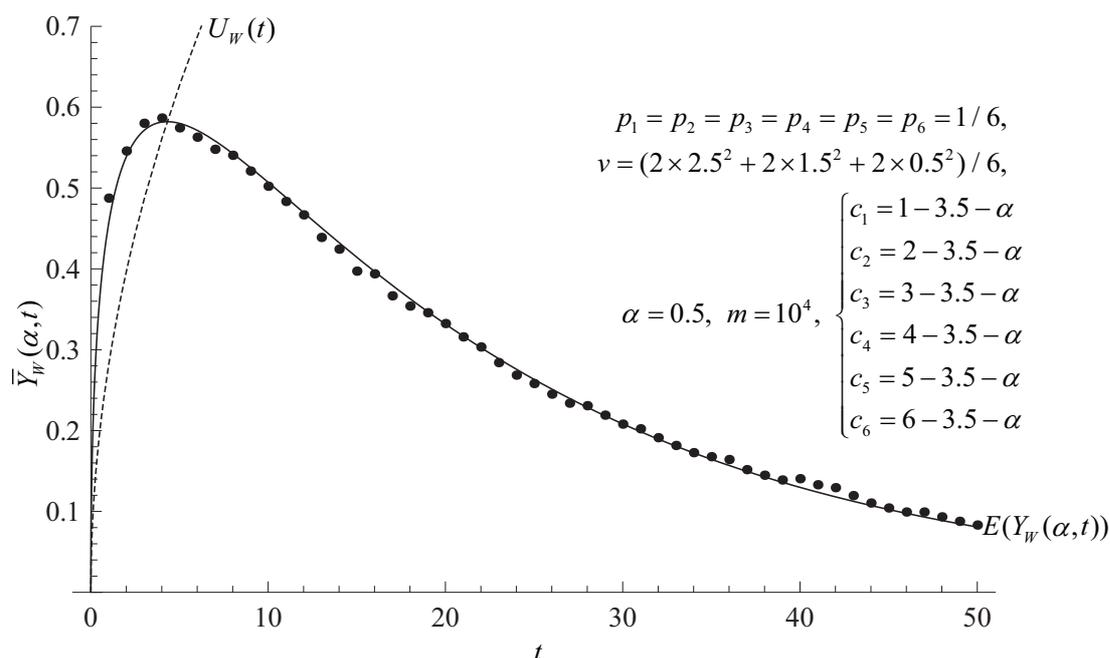


図 12: サイコロ投げの数値実験

その結果，勝者の満足できる獲得賞金の最大値を得る試行回数は，ゲーミング企業が一人当たりから得る期待収益と，勝者に還元する一人当たりの獲得賞金の期待利得が等しいことがわかった．この試行回数までは，プレイヤーはゲームを試行する利点があるが，これ以上は試行を続けても期待利得が減少するのみである．そこで，ゲーミング企業は，マーケットを開催する際に，この試行回数と獲得利得を考慮し，ゲームの手数料を決定することが，意思決定に役立つものと考えられる．また，手数料を考慮した結果，べき乗回帰分析を用いて，勝者のリスク回避の傾向と敗者のリスク愛好的傾向を鏡映効果により，本研究で提案したべき関数のモデルの導出および視覚化を示すことができた．

謝辞

本研究には，大阪大学の西大匡先生，関西大学の仲川勇二先生，近畿大学の寺岡義伸先生，首都大学東京の渡辺隆裕先生，大阪大学の蓮池隆先生から有益なご助言を賜りました．そして，二人の親切な査読者から貴重なご助言を賜ったことを付記して感謝の意を表します．

参考文献

- [1] A. Abrams and S. Garibaldi: Finding good bets in the lottery, and why you shouldn't take them. *The American Mathematical Monthly*, **117-1** (2010), 3-26.
- [2] P.L. Bernstein, 青山讓 (訳): リスク (上) (日本経済新聞社, 2001).
- [3] G. Blom, D. Sandell and L. Holst, 森真 (訳): 確率問題ゼミ—コイン投げからランダム・ウォークまで— (シュプリンガー・フェアラク東京, 1995).
- [4] J. Ford: How random is a coin toss? *Physics Today*, **36** (1983), 40-47.

- [5] I. Gilboa: *Theory of Decision under Uncertainty* (Cambridge University Press, New York, 2009).
- [6] J. Goldberg and R. von Nitzsch, 行動ファイナンス研究会 (訳), 眞壁昭夫 (監訳): 行動ファイナンス—市場の非合理性を解き明かす新しい金融理論— (ダイヤモンド社, 2002).
- [7] 堀田武彦: 数理工学への誘い—カオスとコイン投げ—. *数学セミナー*, 40-8 (2001), 44–48.
- [8] 兼田敏之: *社会デザインのシミュレーション &ゲーミング* (共立出版, 2005).
- [9] 金谷健一: *これなら分かる最適化数学* (共立出版, 2005).
- [10] J.B. Keller: The probability of heads. *The American Mathematical Monthly*, 93 (1986), 191–197.
- [11] 益田昭彦, 五味等, 木村松夫: QC ゲームの効用とノウハウ (5) コインゲームによる国際化 QC 教育の実際. *品質管理*, 47-5 (1996), 54–60.
- [12] 松原望: *統計学入門* (東京大学出版会, 1991).
- [13] 松原望: *意思決定の基礎* (朝倉書店, 2001).
- [14] 松原望: *入門確率過程* (東京図書, 2003).
- [15] 松本眞: コイン投げで一儲けする方法—擬似乱数研究の現状—. *情報処理*, 39-11 (1998), 1166–1170.
- [16] 松本眞: コイン投げで儲ける—擬似乱数と符号理論—. *数理科学*, 40-12 (2002), 8–13.
- [17] R.A. McGowan, 佐々木一彰 (訳): *ゲーミング企業のマネジメント* (税務経理協会, 2005).
- [18] 宮崎修次: 数理工学のすすめ 神が采を投げずとも—コイン投げ・カオス・大きな揺らぎ—. *理系への数学*, 32-15 (1999), 77–80.
- [19] S. Nakanishi: Reliability evaluation for gaming simulation. In M.H. Elwany and A.B. Eltawil (eds.): *Proceedings of the 37th International Conference on Computers and Industrial Engineering* (2007), 2359–2366.
- [20] 日本オペレーションズ・リサーチ学会: *オペレーションズ・リサーチ* (特集:ゲーミング・シミュレーション), 29-2 (1984).
- [21] 大槻正伸: 有限回のコイン投げによる連続一様分布の最適な近似. *福島工業高等専門学校研究紀要*, 47 (2006), 15–21.
- [22] R.T. Rockfellar and S. Uryasev: Optimization of conditional value-at risk. *Journal of Risk*, 2-3 (2000), 21–41.
- [23] 佐々真一: 巨大数コイン投げ問題. *数理科学*, 48-3 (2010), 26–31.
- [24] 佐藤文広: 数理で読み解く石取りゲーム (第8回) ポセット上のコイン裏返しゲームとその積. *数学セミナー*, 48-11 (2009), 74–80.
- [25] J. Spencer: Combinatorics by coin flipping. *The College Mathematics Journal*, 17 (1986), 407–412.
- [26] 須崎政文, 尾崎俊治: Bajaj の一人勝ち残り公平なコイン投げ問題の平均回数漸近解. *電子情報通信学会論文誌*, J92-A(5) (2009), 373–379.
- [27] 高橋一: コインの確率. *数学セミナー*, 29-12 (1990), 60–64.
- [28] 武村和久: *行動意思決定論—経済行動の心理学—* (日本評論社, 2009).
- [29] 田村坦之, 中村豊, 藤田眞一: *効用分析の数理と応用*. (コロナ社, 1997).

- [30] 谷岡一郎: ツキの法則—「賭け方」と「勝敗」の科学 (PHP 研究所, 1997).
- [31] A. Tversky and D. Kahneman: Advances in prospect theory—Cumulative representation of uncertainty—. *Journal of Risk and Uncertainty*, **5** (1992), 297–323.
- [32] V.Z. Vulović and R.E. Prange: Randomness of a true coin toss. *Physical Review*, **A33-1** (1986), 576–582.
- [33] 和達三樹, 十河清: キーポイント確率・統計 (岩波書店, 1993).
- [34] 渡辺隆裕: ゲーム理論入門 (日本経済新聞社, 2008).
- [35] 渡辺隆裕: 賭けの科学. <http://www.nabnavi.net/> (2010年3月にアクセス).
- [36] S. Wolfram: Mathematica ブック (第4版) (凸版印刷, 2000).

中西真悟
大阪工業大学
工学部技術マネジメント学科
〒535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1

ABSTRACT

**MAXIMIZATION FOR SUM TOTAL EXPECTED GAINS BY WINNERS
OF REPETITION GAME OF COIN TOSS CONSIDERING THE CHARGE
BASED ON ITS NUMBER OF TRIAL**

Shingo Nakanishi
Osaka Institute of Technology

In this study, gambling is defined as gaming. Its banker is called as the gaming enterprise. Winners are defined as the players who earn over the principal. Losers mean the players who cannot earn over the principal. In this study, we use that the repetition trial of coin toss or dice throwing is approximated to normal distribution from each discrete distribution. And its gaming includes the charge by the gaming enterprise based on its trial number. Above mentioned, we set three conditions for examining several characteristics. That is to say, Case 1 is that the probability of head on coin toss is equal to 0.5. Case 2 is that the probability of head on coin toss is less than 0.5. Case 3 is that each probability of dice throwing is same. Moreover, we restrict that all players do not admit leaving from the market so that the player keeps repeating the gaming based on independent and identically distributed. Then, the tendency both the maximum value of the sum total of the expected gain of winners and the expected earnings of gaming enterprise is shown when we use the power regression analysis. Moreover, we can visualize the tendency that both winners' risk averse and loser's risk preference characteristics are considered from the obtained outcome as a reflection effect with charge by the gaming enterprise under an uncertain situation. This is assumed to be two power functions concerning the expected gain. In addition, it is derived that expected earnings of the gaming enterprise and the expected gain of winners is balanced in the stop trial number by proposed model. Finally, we can show that the decision making about stopping rule of gaming trial with including its charge is useful in accordance with the maximization for sum total gains of winners.