Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 54, 2011, pp. 125–142

ファジィランダム多目的確率線形計画問題に対するファジィアプローチ

矢野 均
名古屋市立大学人文社会学部現代社会学科

(受理 2011 年 1 月 18 日; 再受理 2011 年 9 月 28 日)

和文概要　本論文では，ファジィランダム多目的線形計画問題に対して，確率最大化モデルと満足基準最適化モデルの両方の特徴を同時に組み込んだファジィアプローチを提案する．確率計画問題に対して，確率最大化モデルでは，許容目的レベルを厳しい値に設定すると，許容目的レベル以下である確率値が悪化するのに対して，満足基準最適化モデルでは，許容確率レベルを１に近い値に設定すると，許容確率レベル以上の条件を満たす目的関数値が悪化するというトレードオフの関係にある．提案手法では，ファジィランダム変数係数を含む各目的関数に対する許容目的レベルと許容確率レベルに対して，それぞれ，意思決定者の満足度を表すメンバシップ関数を設定した後，各メンバシップ関数をファジィ決定により統合し最大化決定に基づく満足解を導出するための，線形計画法に基づくファジィアプローチを提案する．

キーワード: 意思決定, 確率的最適化, ファジィランダム変数，確率最大化モデル，満足基準最適化モデル

1. はじめに

現実の複雑な意思決定状況を数学モデルとして定式化する際には，あいまいな情報や不確実なデータが含まれる場合が多い．不確実なデータを確率変数として定式化する確率計画問題に対しては，2 段階問題によるアプローチや機会制約条件問題によるアプローチが提案されてきている [1,2,5,6]．2 段階問題では，制約条件を満たさない量（リコース）に対するペナルティを考慮した目的関数を最適化するのに対して，機会制約条件問題では，制約条件を満たす確率を制御することにより問題を定式化する．特に，機会制約条件問題では，目的関数の期待値を最大化する期待値モデル，目的関数の分散を最小化する分散最小化モデル，目的関数がある目的達成レベル以下である確率を最大化する確率最大化モデル，最低限の許容確率をあらかじめ設定しておいて目的達成レベルを最小化する満足基準最適化モデルが提案されている [5]．これらの確率計画法の技法を用いて，多目的確率線形計画問題に対しては，最小リスク解を導出する手法 [19] ，妥協解を導出する対話型手法 [20]，確率変数係数を含む多目的関数に対する満足度をメンバシップ関数で規定してファジィ決定や積オペレータ [15] に基づく解を導出するファジィアプローチ [4]，確率最大化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法 [17]，満足基準最適化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法 [18] 等が提案されてきている．

一方，人間の主観的判断の曖昧性が含まれる意思決定問題に対しては，種々のファジィ計画法 [11,14,24] や多目的ファジィ計画法 [15,23,24] が提案されてきている．しかし，現実の意思決定問題においては，確率的曖昧性と人間の主観的判断の曖昧性が同時に含まれている場合が考えられる．このような観点から，確率的曖昧性と人間の主観的判断の曖昧性が同時に組み込まれる変数として，ファジィランダム変数の概念 [10,13] が定義され，ファジィランダム変数係数を含む線形計画問題に対する意思決定手法 [7,12,21] が提案された．さら

に，ファジィランダム変数係数を含む多目的線形計画問題に対して，確率最大化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法 [9]，満足基準最適化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法 [8] が提案されてきている．

このような状況において，本論文では，ファジィランダム変数係数を含む多目的線形計画問題に対して，確率計画問題を取り扱うための確率最大化モデルと満足基準最適化モデルの両方の特徴を同時に取り込んだファジィアプローチを提案する．提案手法では，ファジィランダム変数係数を含む目的関数に対して，許容目的レベルと許容確率レベルに対する満足度を表すメンバシップ関数をそれぞれ設定した後，各メンバシップ関数をファジィ決定により統合し最大化決定 [15,24] に基づき満足解を導出する．第 2 節では，ファジィランダム多目的線形計画問題に対して，意思決定者の各目的関数に対するファジィ目標をメンバシップ関数で規定した後，可能性測度 [3] の概念を導入することにより多目的確率計画問題に変換する．第 3 節では，変換された多目的確率計画問題に対して，それぞれ，確率最大化モデルに基づく定式化と対応する P-パレート最適解の定義と，満足基準最適化モデルに基づく定式化と対応する M-パレート最適解の定義を行い，それらの関係を明らかにする．第 4 節では，確率最大化モデルに基づくファジィランダム多目的線形計画問題に対するファジィアプローチを提案，同様に，第 5 節では，満足基準最適化モデルに基づくファジィランダム多目的線形計画問題に対するファジィアプローチを提案し，2 種類のファジィアプローチが等価であることを示す．第 6 節では，片桐らの数値例 [9] を用いて，ファジィランダム多目的線形計画問題に対するファジィアプローチに基づく満足解を導出して，確率最大化モデルに基づく P-パレート最適解との関係についても検討する．

2. ファジィランダム多目的線形計画問題

一般に，ファジィランダム変数は n 次元ユークリッド空間 R^n 上で定義されている [13]．しかし，本論文では，実用上の観点から，以下で定義される 1 次元ユークリッド空間 R 上のファジィランダム変数 [16,22] を取り扱う．

定義 2.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ を確率空間とする．ここで Ω は標本空間，$\mathcal{F}$ は σ-加法族，$\mathcal{P}$ は確率測度を表す．F_N をすべてのファジィ数の集合，$\mathcal{B}$ を R 上のボレル σ-加法族とする．このとき，もし次式が成立するならば，写像 $\tilde{\bar{C}} : \Omega \to F_N$ をファジィランダム変数であるという:

$$\{(\omega, \tau) \in \Omega \times \mathrm{R} \mid \tau \in \tilde{\bar{C}}_\alpha(\omega)\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}, \qquad \forall \alpha \in [0,1].$$

ここで，

$$\tilde{\bar{C}}_\alpha(\omega) = [\tilde{\bar{C}}^-_\alpha(\omega), \tilde{\bar{C}}^+_\alpha(\omega)] = \{\tau \in \mathrm{R} \mid \mu_{\tilde{\bar{C}}(\omega)}(\tau) \geq \alpha\}$$

は，$\omega \in \Omega$ に対するファジィ数 $\tilde{\bar{C}}(\omega)$ の α レベル集合，$\mu_{\tilde{\bar{C}}(\omega)}(\tau)$ はファジィ数 $\tilde{\bar{C}}(\omega)$ のメンバシップ関数を表す．

直感的には，ファジィランダム変数はその実現値がファジィ数であるような確率変数であると考えられる．定義 2.1 において，記号"-"と"~"は，係数が確率的性質とファジィ的性質を同時に有するファジィランダム変数であることを意味する．

ファジィランダム変数を目的関数の係数に含むファジィランダム多目的線形計画問題 (Fuzzy Random Multiobjective Linear Programming Problem : FRMOLP) は，意思決定者が，線形制約集合 X のもとで，ファジィランダム変数係数を含む多目的線形関数を最小化しようとする問題として定式化される:

[FRMOLP]

$$\begin{array}{ll} \min & \tilde{\bar{\boldsymbol{C}}}\boldsymbol{x} = (\tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_1\boldsymbol{x}, \cdots, \tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_k\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}. \end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ は決定変数を表す n 次元列ベクトル, 実行可能集合 X において，A は $(m \times n)$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元列ベクトルであるとする．

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_i = (\tilde{\bar{c}}_{i1}, \cdots, \tilde{\bar{c}}_{in}), \qquad i = 1, \cdots, k$$

は，i 番目の目的関数の n 次元係数ベクトルで，各要素 $\tilde{\bar{c}}_{ij}$ はファジィランダム変数係数を表す．

定義 2.1 のファジィランダム変数を直接取り扱うことは困難である．本論文では，定義 2.1 のファジィランダム変数の特別な場合として，片桐ら [8,9] により提案された LR 型ファジィランダム変数を取り扱う．LR 型ファジィランダム変数 $\tilde{\bar{c}}_{ij}$ とは，事象 ω が生起したときの実現値が以下のメンバシップ関数で定義される LR ファジィ数 [3] であるようなファジィランダム変数である:

$$\mu_{\tilde{\bar{c}}_{ij}(\omega)}(s) = \begin{cases} L\left(\frac{\bar{d}_{ij}(\omega)-s}{\bar{\alpha}_{ij}(\omega)}\right) & (s \leq \bar{d}_{ij}(\omega)\ \forall\omega), \\ R\left(\frac{s-\bar{d}_{ij}(\omega)}{\bar{\beta}_{ij}(\omega)}\right) & (s > \bar{d}_{ij}(\omega)\ \forall\omega), \qquad i = 1, \cdots, k, \quad j = 1, \cdots, n. \end{cases}$$

ここで，$\tilde{\bar{c}}_{ij}(\omega)$ は事象 ω が生起したときのファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{c}}_{ij}$ の実現値を表す．関数 $L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, l(t)\}$ は，$[0, \infty)$ から $[0, 1]$ への連続関数，$l(t)$ は $l(0) = 1$ を満たす狭義単調減少関数で，$R(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{0, r(t)\}$ も同様とする．LR ファジィ数に含まれる係数 $\bar{d}_{ij}, \bar{\alpha}_{ij}, \bar{\beta}_{ij}$ は，それぞれ，$\bar{d}_{ij} = d^1_{ij} + \bar{t}_i d^2_{ij}$, $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha^1_{ij} + \bar{t}_i \alpha^2_{ij}$, $\bar{\beta}_{ij} = \beta^1_{ij} + \bar{t}_i \beta^2_{ij}$ で表される確率変数で，$\bar{t}_i$ は平均 m_i, 分散 σ^2_i の確率変数，d^1_{ij}, d^2_{ij}, $\alpha^1_{ij}, \alpha^2_{ij}, \beta^1_{ij}, \beta^2_{ij}$ は定数である．ただし，確率変数 $\bar{t}_i$ の分布関数 $T_i(\cdot)$ は連続かつ狭義単調増加関数であると仮定する．任意の事象 ω が生起したときの確率変数の実現値 $\bar{\alpha}_{ij}(\omega), \bar{\beta}_{ij}(\omega)$ は，LR ファジィ数の広がりのパラメータの性質により常に正であり，$\alpha^1_{ij} + \bar{t}_i(\omega)\alpha^2_{ij} > 0$, $\beta^1_{ij} + \bar{t}_i(\omega)\beta^2_{ij} > 0$ を満たすものとする．

片桐ら [8, 9] は可能性測度 [3] の概念を用いて，FRMOLP を通常の多目的確率計画問題 (Multiobjective Stochastic Programming Problem : MOSP) に変換した．以下では，その概要を説明する．まず，FRMOLP の各目的関数の係数は LR 型ファジィランダム変数係数であることから，ザデーの拡張原理によるファジィ数の演算公式 [3] を適用すると，事象 ω が生起したときの目的関数の実現値 $\tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_i(\omega)\boldsymbol{x}$ は，以下のメンバシップ関数により表される:

$$\mu_{\tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_i(\omega)\boldsymbol{x}}(y) = \begin{cases} L\left(\frac{\bar{\boldsymbol{d}}_i(\omega)\boldsymbol{x}-y}{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i(\omega)\boldsymbol{x}}\right) & (y \leq \bar{\boldsymbol{d}}_i(\omega)\boldsymbol{x}\ \forall\omega), \\ R\left(\frac{y-\bar{\boldsymbol{d}}_i(\omega)\boldsymbol{x}}{\bar{\boldsymbol{\beta}}_i(\omega)\boldsymbol{x}}\right) & (y > \bar{\boldsymbol{d}}_i(\omega)\boldsymbol{x}\ \forall\omega), \quad i = 1, \cdots, k. \end{cases}$$

FRMOLP の各目的関数に対して，意思決定者は「だいたい何々以下にしたい」というファジィ目標 $\tilde{G}_i$ [15,24] を持ち，狭義単調減少かつ連続なメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}(y)$ で表されるものとする．このとき，可能性測度 [3] の概念を用いれば，目的関数がファジィ目標を満たす可能性測度の値は次式で定義できる [7]:

$$\Pi_{\tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_i\boldsymbol{x}}(\tilde{G}_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_y \min\{\mu_{\tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_i\boldsymbol{x}}(y), \mu_{\tilde{G}_i}(y)\}, \qquad i = 1, \cdots, k.$$

従って，意思決定者が，目的関数がファジィ目標を満たす可能性測度の値の最大化を目的関数として採用すれば，FRMOLP は以下の多目的確率計画問題 MOSP に帰着する [8,9]:

[MOSP]

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X}(\Pi_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_1\boldsymbol{x}}(\widetilde{G}_1),\cdots,\Pi_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_k\boldsymbol{x}}(\widetilde{G}_k))$$

MOSP の目的関数は，たとえ決定変数 $\boldsymbol{x}$ が確定しても確率的に変動する確率変数であることに注意しよう．片桐ら [8,9] は，MOSP に対して確率最大化モデルや満足基準最適化モデルを適用することにより通常の多目的計画問題に変換した後，意思決定者の満足解を導出するための対話型ファジィ満足化手法を提案した．しかし，彼らの方法では，確率最大化モデルや満足基準最適化モデルを適用する際に，許容できる可能性測度の値や許容確率レベルを，あらかじめ設定しなければならない．通常，許容できる可能性測度の値と許容確率レベルは，互いに相競合しており，確率最大化モデルにおいて，可能性測度の値を厳しく（大きく）設定すると対応する分布関数値（設定したファジィ目標を満たす可能性測度がある値以上である確率）は小さい値になり，満足基準最適化モデルにおいて，許容確率レベルを厳しく（大きく）設定すると対応する可能性測度の値（設定した確率以上という条件下でのファジィ目標を満たす可能性測度の値）が小さい値になってしまう．意思決定者は，MOSP において，各目的関数間のバランスのみならず，許容できる可能性測度の値と許容確率レベルのバランスを考慮した満足解を導出しなければならない．そこで，本論文では，MOSP に対して，あらかじめ許容できる可能性測度の値や許容確率レベルを設定することが要求される確率最大化モデルや満足基準最適化モデルを適用する代わりに，ファジィ決定に基づく満足解を導出するためのファジィアプローチを提案する．

3. 確率最大化モデルと満足基準最適化モデルに基づく定式化と解概念

意思決定者が，MOSP の各目的関数に対して，許容できる可能性測度の値 $h_i,\ i=1,\cdots,k$ を設定した後，確率最大化モデルを採用すると，MOSP は以下の多目的計画問題に変換できる:

[MOP1($\boldsymbol{h}$)]

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X}(\Pr(\omega\mid\Pi_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_{1(\omega)}\boldsymbol{x}}(\widetilde{G}_1)\geq h_1),\cdots,\Pr(\omega\mid\Pi_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_{k(\omega)}\boldsymbol{x}}(\widetilde{G}_k)\geq h_k)).$$

ここで，$\Pr(\cdot)$ は確率測度，$\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_k)$ は MOSP の各目的関数に対する許容できる可能性測度の値のベクトルを表す．MOP1($\boldsymbol{h}$) において，$\Pi_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_{i(\omega)}\boldsymbol{x}}(\widetilde{G}_i)\geq h_i$ は等価的に以下のように変形できる:

$$\begin{aligned}
&\sup_y\min\{\mu_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_i\boldsymbol{x}}(y),\ \mu_{\widetilde{G}_i}(y)\}\geq h_i,\\
&\quad\Leftrightarrow \exists y:\mu_{\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_i\boldsymbol{x}}(y)\geq h_i,\quad \mu_{\widetilde{G}_i}(y)\geq h_i,\\
&\quad\Leftrightarrow \exists y:L\Big(\frac{\overline{\boldsymbol{d}}_i(\omega)\boldsymbol{x}-y}{\overline{\boldsymbol{\alpha}}_i(\omega)\boldsymbol{x}}\Big)\geq h_i,R\Big(\frac{y-\overline{\boldsymbol{d}}_i(\omega)\boldsymbol{x}}{\overline{\boldsymbol{\beta}}_i(\omega)\boldsymbol{x}}\Big)\geq h_i,\mu_{\widetilde{G}_i}(y)\geq h_i,\\
&\quad\Leftrightarrow \exists y:(\overline{\boldsymbol{d}}_i(\omega)-L^{-1}(h_i)\overline{\boldsymbol{\alpha}}_i)\boldsymbol{x}\leq y\leq(\overline{\boldsymbol{d}}_i(\omega)+R^{-1}(h_i)\overline{\boldsymbol{\beta}}_i)\boldsymbol{x},y\leq\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i),\\
&\quad\Leftrightarrow (\overline{\boldsymbol{d}}_i(\omega)-L^{-1}(h_i)\overline{\boldsymbol{\alpha}}_i(\omega))\boldsymbol{x}\leq\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i).
\end{aligned}$$

ここで，$L^{-1}(\cdot)$,$R^{-1}(\cdot)$ はそれぞれ $L(\cdot)$,$R(\cdot)$ の逆関数を表す．従って，MOP1($\boldsymbol{h}$) の各目的関数は，確率変数 $\bar{t}_i$ の分布関数 $T_i(\cdot)$ を用いて，以下のように変形できる:

$$\begin{aligned}
&\Pr(\omega \mid \Pi_{\widetilde{\overline{\boldsymbol{C}}}_i(\omega)\boldsymbol{x}}(\widetilde{G}_i) \geq h_i) \\
&\qquad = \Pr\left(\omega \mid (\overline{\boldsymbol{d}}_i(\omega) - L^{-1}(h_i)\overline{\boldsymbol{\alpha}}_i(\omega))\boldsymbol{x} \leq \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i)\right) \\
&\qquad = \Pr\left(\omega \mid (\boldsymbol{d}_i^1 + \bar{t}_i(\omega)\boldsymbol{d}_i^2)\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)(\boldsymbol{\alpha}_i^1 + \bar{t}_i(\omega)\boldsymbol{\alpha}_i^2)\boldsymbol{x} \leq \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i)\right) \\
&\qquad = \Pr\left(\omega \mid (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + \bar{t}_i(\omega)(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \leq \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i)\right) \\
&\qquad = \Pr\left(\omega \mid \bar{t}_i(\omega) \leq \frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \\
&\qquad = T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} p_i(\boldsymbol{x}, h_i). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{x} \in X$ に対して $(\boldsymbol{d}_i^2 - L^{-1}(0)\boldsymbol{\alpha}_i^2)\boldsymbol{x} > 0,\ i = 1, \cdots, k$ と仮定している．従って，$p_i(\boldsymbol{x}, h_i), i = 1, \cdots, k$ を用いれば，MOP1($\boldsymbol{h}$) は，以下のように表すことができる [9]:

[MOP2($\boldsymbol{h}$)]

$$\max_{\boldsymbol{x} \in X}(p_1(\boldsymbol{x}, h_1), \cdots, p_k(\boldsymbol{x}, h_k)).$$

MOP2($\boldsymbol{h}$) を取り扱うために，$p_i(\boldsymbol{x}, h_i), i = 1, \cdots, k$ の空間上の実行可能集合

$$P(\boldsymbol{h}) = \{(p_1(\boldsymbol{x}, h_1), \cdots, p_k(\boldsymbol{x}, h_k)) \in [0, 1]^k \mid \boldsymbol{x} \in X\}$$

におけるパレート最適解として，P-パレート最適解を以下のように定義することができる．

定義 3.1 MOP2($\boldsymbol{h}$) において，もし，$p_i(\boldsymbol{x}, h_i) \geq p_i(\boldsymbol{x}^*, h_i),\ i = 1, \cdots, k$ （ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $p_j(\boldsymbol{x}, h_j) > p_j(\boldsymbol{x}^*, h_j)$ ）なる $\boldsymbol{x} \in X$ が存在しなければ，$\boldsymbol{x}^* \in X$ は，MOP2($\boldsymbol{h}$) に対する P-パレート最適解であるという．

一方，現実の意思決定では,「確率 $p_i(\boldsymbol{x}, h_i)$ が，あらかじめ設定された許容確率レベル $\bar{p}_i$ 以上であるという条件のもとで，許容できる可能性測度の値 h_i を最大化する」という満足基準最適化モデルを採用する方が適切な場合も多い．このとき，意思決定者があらかじめ許容確率レベルのベクトル $\bar{\boldsymbol{p}} = (\bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_k)$ を設定すれば，満足基準最適化モデルに基づく多目的計画問題を以下のように定式化できる [8]:

[MOP3($\bar{\boldsymbol{p}}$)]

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{x} \in X, h_i \in [0,1],\ i=1,\cdots,k} \quad & (h_1, \cdots, h_k) \\
\text{subject to} \quad & p_i(\boldsymbol{x}, h_i) \geq \bar{p}_i, \quad i = 1, \cdots, k. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

MOP3($\bar{\boldsymbol{p}}$) の制約式 (3.2) は，$T_i(\cdot)$ が連続な狭義単調増加関数であることから，次のように変形できる:

$$\begin{aligned}
&\bar{p}_i \leq p_i(\boldsymbol{x}, h_i) = T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \\
&\qquad \Leftrightarrow\ \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

線形不等式 (3.3) の右辺を

$$f_i(\boldsymbol{x},h_i,\bar{p}_i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \tag{3.4}$$

と置けば，MOP3($\bar{\boldsymbol{p}}$) はメンバシップ関数 $\mu_{\widetilde{G}_i}(\cdot)$ が連続かつ狭義単調減少関数であることから，以下の多目的計画問題 MOP4($\bar{\boldsymbol{p}}$) に変換できる:

[MOP4($\bar{\boldsymbol{p}}$)]

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{\boldsymbol{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\cdots,k} & (h_1,\cdots,h_k) \\ \text{subject to} & \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x},h_i,\bar{p}_i)) \geq h_i, \quad i=1,\cdots,k. \end{array} \tag{3.5}$$

ここで，MOP4($\bar{\boldsymbol{p}}$) の不等式 (3.5) に注目する．式 (3.4) より，

$$\begin{aligned} f_i(\boldsymbol{x},h_i,\bar{p}_i) &= (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}) - L^{-1}(h_i)(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

であること，$L^{-1}(h_i)$ は h_i に関する狭義単調減少関数であること，さらに，LR ファジィ数の広がりのパラメータの性質より $(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) > 0$ が保証されていることから，関数 $f_i(\boldsymbol{x},h_i,\bar{p}_i)$ は，任意の $\boldsymbol{x}\in X$ に対して，h_i に関する狭義単調増加関数となる．すなわち，MOP4($\bar{\boldsymbol{p}}$) の不等式 (3.5) の左辺 $\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x},h_i,\bar{p}_i))$ は，任意の $\boldsymbol{x}\in X$ に対して右辺 h_i に関する狭義単調減少関数となるため，MOP4($\bar{\boldsymbol{p}}$) の最適解においては，常に不等式制約式 $\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x},h_i,\bar{p}_i)) \geq h_i$ の活性条件を満たされなければならない．従って，MOP4($\bar{\boldsymbol{p}}$) は，等価的に以下のように表現できる:

[MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$)]

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{\boldsymbol{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\cdots,k} & (\mu_{\widetilde{G}_1}(f_1(\boldsymbol{x},h_1,\bar{p}_1)),\cdots,\mu_{\widetilde{G}_k}(f_k(\boldsymbol{x},h_k,\bar{p}_k))) \\ \text{subject to} & \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x},h_i,\bar{p}_i)) = h_i, \quad i=1,\cdots,k. \end{array}$$

多目的計画問題 MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) において，ファジィ目標を表すメンバシップ関数 $\mu_{\widetilde{G}_i}(\cdot)$, $i=1,\cdots,k$ の空間上の実行可能集合

$$\begin{aligned} M(\bar{\boldsymbol{p}}) = \{&(h_1,\cdots,h_k) = (\mu_{\widetilde{G}_1}(f_1(\boldsymbol{x},h_1,\bar{p}_1)),\cdots,\mu_{\widetilde{G}_k}(f_k(\boldsymbol{x},h_k,\bar{p}_k))) \in [0,1]^k \mid \\ &\boldsymbol{x}\in X,\ h_i\in[0,1],\ i=1,\cdots,k\} \end{aligned}$$

におけるパレート最適解として，M-パレート最適解を以下のように定義することができる．

定義 3.2 MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) において，もし，$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x},h_i,\bar{p}_i)) \geq \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}^*,h_i^*,\bar{p}_i)), i=1,\cdots,k$（ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $\mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x},h_j,\bar{p}_j)) > \mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}^*,h_j^*,\bar{p}_j))$ ）であるような $\boldsymbol{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\cdots,k$ が存在しなければ，$\boldsymbol{x}^*\in X, h_i^*\in[0,1], i=1,\cdots,k$ は MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) に対する M-パレート最適解であるという．

多目的確率計画問題 (MOSP) を，確率最大化モデルに基づき変換した多目的計画問題 (MOP2($\boldsymbol{h}$)) に対する P-パレート最適解と，満足基準最適化モデルに基づき変換した多目的計画問題 (MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$)) に対する M-パレート最適解の間には次の関係が成立する．

定理 3.1 (1) $\boldsymbol{x}^* \in X$ が MOP2($\boldsymbol{h}^*$) に対する P-パレート最適解ならば，$\boldsymbol{x}^* \in X, \boldsymbol{h}^* \in [0,1]^k$ が MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) に対する M-パレート最適解となるような許容確率レベル $\bar{\boldsymbol{p}}$ が存在する.
(2) $\boldsymbol{x}^* \in X, \boldsymbol{h}^* \in [0,1]^k$ が MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) に対する M-パレート最適解ならば，$\boldsymbol{x}^* \in X$ は MOP2($\boldsymbol{h}^*$) に対する P-パレート最適解である.

証明 (1)： $\boldsymbol{x}^* \in X$ が MOP2($\boldsymbol{h}^*$) に対する P-パレート最適解ならば，次式を満たす $\boldsymbol{x} \in X$ が存在しない.

$$\begin{aligned}
&p_i(\boldsymbol{x}, h_i^*) \geq p_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*)\\
&\Leftrightarrow T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \geq T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}^* - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}^*)}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}^* - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}^*}\right),\\
&\qquad i = 1, \cdots, k. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

ただし，少なくとも一つの添字 j に対して

$$T_j\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_j}^{-1}(h_j^*) - (\boldsymbol{d}_j^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_j^*)\boldsymbol{\alpha}_j^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_j^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_j^*)\boldsymbol{\alpha}_j^2\boldsymbol{x}}\right) > T_j\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_j}^{-1}(h_j^*) - (\boldsymbol{d}_j^1\boldsymbol{x}^* - L^{-1}(h_j^*)\boldsymbol{\alpha}_j^1\boldsymbol{x}^*)}{\boldsymbol{d}_j^2\boldsymbol{x}^* - L^{-1}(h_j^*)\boldsymbol{\alpha}_j^2\boldsymbol{x}^*}\right)$$

が成立している．ここで，

$$\bar{p}_i = T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}^* - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}^*)}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}^* - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}^*}\right) \qquad (3.7)$$

とおけば，分布関数 $T_i(\cdot)$ が連続かつ狭義単調増加であること，式 (3.4) と，任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x} > 0$ より，不等式 (3.6) は，等価的に次のように変形できる:

$$\begin{aligned}
&T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \geq \bar{p}_i\\
&\quad\Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x})\\
&\quad\Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) \geq f_i(\boldsymbol{x}, h_i^*, \bar{p}_i)\\
&\quad\Leftrightarrow h_i^* \leq \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i^*, \bar{p}_i)), \qquad i = 1, \cdots, k. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $h_j^* < \mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}, h_j^*, \bar{p}_j))$ が成立している．一方，式 (3.7) より，

$$\begin{aligned}
\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) &= (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}^* - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}^*) + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}^* - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}^*)\\
&= f_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*, \bar{p}_i)
\end{aligned}$$

であることから，$h_i^* = \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*, \bar{p}_i))$．従って，式 (3.8) より，

$$h_i^* = \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*, \bar{p}_i)) \leq \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i)) = h_i, i = 1, \cdots, k$$

(ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $h_j^* = \mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}^*, h_j^*, \bar{p}_j)) < \mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}, h_j, \bar{p}_j)) = h_j$) であるような $\boldsymbol{x} \in X$, $h_i \in [0,1], i = 1, \cdots, k$ が存在しないので，$\boldsymbol{x}^* \in X$ は MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) に対する M-パレート最適解である.
(2)： 証明は，(1) と同様. □

4. 確率最大化モデルに基づくファジィアプローチ

確率最大化モデルに基づく多目的計画問題MOP2($\boldsymbol{h}$) において，ファジィランダム変数係数を含む目的関数がファジィ目標を満たす可能性測度の値 $\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_k)$ を固定して，対応する確率 $(p_1(\boldsymbol{x}, h_1), \cdots, p_k(\boldsymbol{x}, h_k))$ をある意味で最大化するP-パレート最適解集合の中から満足解を導出する対話型手法が提案されてきている [9]．しかし，MOP2($\boldsymbol{h}$) において，意思決定者は，本来，可能性測度の値 $(h_1, \cdots, h_k)$ の最大化と対応する確率 $(p_1(\boldsymbol{x}, h_1), \cdots, p_k(\boldsymbol{x}, h_k))$ の最大化を同時に望んでいると考えられる．このような観点から，以下では，多目的計画問題MOP2($\boldsymbol{h}$) の自然な拡張と考えられる以下の多目的計画問題MOP6 について考察する:

[MOP6]

$$\max_{\boldsymbol{x} \in X, h_i \in [0,1], i=1,\cdots,k} (p_1(\boldsymbol{x}, h_1), \cdots, p_k(\boldsymbol{x}, h_k), h_1, \cdots, h_k).$$

本節では，MOP6の目的関数 $p_i(\boldsymbol{x}, h_i), i = 1, \cdots, k$ に対してそれぞれファジィ目標を持ち，これらのファジィ目標はメンバシップ関数 $\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i))$ により規定されるものとする．このとき，MOP6は以下の多目的計画問題MOP7 に変換できる:

[MOP7]

$$\max_{\boldsymbol{x} \in X, h_i \in [0,1], i=1,\cdots,k} \quad (\mu_{p_1}(p_1(\boldsymbol{x}, h_1)), \cdots, \mu_{p_k}(p_k(\boldsymbol{x}, h_k)),\ h_1, \cdots, h_k),$$

本節では，MOP7に対して，意思決定者が満足解導出のための統合オペレータとしてファジィ決定を採用するとの仮定のもとで，確率最大化モデルに基づく多目的計画問題MOP2($\boldsymbol{h}$) に対するファジィアプローチを提案する．

MOP7のメンバシップ関数 $\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i))$ を適切に設定するために，以下のような方法が考えられる．まず，意思決定者は可能性測度の値 $h_i, i = 1, \cdots, k$ を設定する代わりに，可能性測度の区間 H_i として，十分満足な最小値 $h_{i\max}$ と受け入れることができない最大値 $h_{i\min}$ を設定するものとする．

$$\begin{aligned} H_i &= [h_{i\min}, h_{i\max}], \quad i = 1, \cdots, k, \\ H &= \{\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_k) \mid h_i \in H_i, i = 1, \cdots, k\}. \end{aligned}$$

設定した可能性測度の区間 H_i に対応して，メンバシップ関数 $\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i))$ の定義域上の区間 $P_i(H_i)$ を以下のように設定することができる:

$$P_i(H_i) = \{p_i(\boldsymbol{x}, h_i) \mid \boldsymbol{x} \in X, h_i \in H_i\}.$$

ここで，もし，区間 $P_i(H_i)$ において意思決定者の要求する確率に満たない場合は，メンバシップ関数 $\mu_{\widetilde{G}_i}(\cdot)$ の設定を変更する必要がある．区間 $P_i(H_i)$ 上で，メンバシップ関数 $\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i))$ は，以下の性質を満たすものと仮定する．

仮定 4.1 メンバシップ関数 $\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i))$, $i = 1, \cdots, k$ は，定義域上の区間 $P_i(H_i)$ 上で，連続かつ狭義単調増加関数である．

意思決定者が設定した区間 $H_i = [h_{i\min}, h_{i\max}]$, $i = 1, \cdots, k$ に対して，メンバシップ関数 $\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i))$ の定義域上の区間 $P_i(H_i) = [p_{i\min}, p_{i\max}]$ は，たとえば，以下のように設定することができる．区間の最大値 $p_{i\max}$ は，

$$p_{i\max} = \max_{\boldsymbol{x} \in X} p_i(\boldsymbol{x}, h_{i\min}) \tag{4.1}$$

により設定する．一方，区間の最小値 $p_{i\min}$ は，$\max_{\boldsymbol{x}\in X} p_i(\boldsymbol{x}, h_{i\max})$ の最適解 $\boldsymbol{x}_i$ に対して，

$$p_{i\min} = \min_{\ell=1,\cdots,k,\ell\neq i} p_i(\boldsymbol{x}_\ell, h_{i\max}) \tag{4.2}$$

を計算して，区間 $P_i(H_i) = [p_{i\min}, p_{i\max}]$ を設定する．意思決定者は，このように設定された区間 $P_i(H_i)$ 上で，仮定 4.1 を満たすようにメンバシップ関数を設定すればよい．
indent このとき，MOP7 に対する意思決定者の満足解は，各メンバシップ関数のファジィ決定に対する最大化決定を採用すれば，以下の問題を解くことにより得られる

[MAXMIN1]

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}\in X, h_i\in H_i, i=1,\cdots,k, \lambda\in[0,1]} \quad & \lambda \\ \text{subject to} \quad & \mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i)) \geq \lambda, \qquad i=1,\cdots,k & (4.3) \\ & h_i \geq \lambda, \qquad i=1,\cdots,k. & (4.4) \end{aligned}$$

MAXMIN1 の制約式 (4.4) は，$p_i(\boldsymbol{x}, h_i)$ の定義式 (3.1) より次の不等式と等価であることに注意しよう．

$$h_i = \mu_{\widetilde{G}_i}\left((\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i)) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x})\right) \geq \lambda. \tag{4.5}$$

このとき，MAXMIN1 の最適解と，P-パレート最適解，M-パレート最適解の間には以下の関係が成立する．

定理 4.1 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*, \lambda^*)$ を MAXMIN1 の一意な最適解であるとすると：
(1) $\boldsymbol{x}^*$ は，MOP2($\boldsymbol{h}^*$) に対する P-パレート最適解である．
(2) $\bar{p}_i^* = p_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*)$, $i=1,\cdots,k$, $\bar{\boldsymbol{p}}^* = (\bar{p}_1^*, \cdots, \bar{p}_k^*)$ とすると，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*)$ は，MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}^*$) に対する M-パレート最適解である．

証明 (1)： $\boldsymbol{x}^*$ が，MOP2($\boldsymbol{h}^*$) に対する P-パレート最適解でないとすると，ある $\boldsymbol{x}\in X$ が存在して，仮定 4.1 より以下の不等式を満たす．

$$p_i(\boldsymbol{x}, h_i^*) \geq p_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}, h_i^*)) \geq \mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*)), \quad i=1,\cdots,k.$$

ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $\mu_{p_j}(p_j(\boldsymbol{x}, h_j^*)) > \mu_{p_j}(p_j(\boldsymbol{x}^*, h_j^*))$ が成立している．これは，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*, \lambda^*)$ が MAXMIN1 の一意な最適解であることに反する．
(2)： $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*)$ が，MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}^*$) に対する M-パレート最適解でないとすると，定義 3.2 より，

$$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i^*)) = h_i \geq \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*, \bar{p}_i^*)) = h_i^*, \quad i=1,\cdots,k$$

を満たす $\boldsymbol{x}\in X$,$\boldsymbol{h}\in H$ が存在する．ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $\mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}, h_j, \bar{p}_j^*))$ $= h_j > \mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}^*, h_j^*, \bar{p}_j^*)) = h_j^*$ が成立している．従って，式 (3.4) より以下の不等式が成立する:

$$\begin{aligned} h_i^* \leq h_i &= \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i^*)) \\ &\Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) \geq \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) = (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i^*) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\ &\Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i^*)\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}) - L^{-1}(h_i) \cdot (\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}), \\ & \qquad\qquad i=1,\cdots,k. \end{aligned}$$

ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $\mu_{\widetilde{G}_j}^{-1}(h_j^*) > (\boldsymbol{d}_j^1\boldsymbol{x}+T_j^{-1}(\bar{p}_j^*)\boldsymbol{d}_j^2\boldsymbol{x})-L^{-1}(h_j)\cdot(\boldsymbol{\alpha}_j^1\boldsymbol{x}+T_j^{-1}(\bar{p}_j^*)\boldsymbol{\alpha}_j^2\boldsymbol{x})$ が成立している．また，$h_i \geq h_i^*$ より，$L^{-1}(h_i) \leq L^{-1}(h_i^*)$ であること，LR ファジィ数の広がりのパラメータの性質より $(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\bar{p}_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) > 0$ であることから，次の不等式が成立する．

$$
\begin{aligned}
\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) &\geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\bar{p}_i^*)\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x})-L^{-1}(h_i)\cdot(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\bar{p}_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\
&\geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\bar{p}_i^*)\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x})-L^{-1}(h_i^*)\cdot(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\bar{p}_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\
&= (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})+T_i^{-1}(\bar{p}_i^*)\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}), \quad i=1,\cdots,k.
\end{aligned}
$$

ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $\mu_{\widetilde{G}_j}^{-1}(h_j^*) > (\boldsymbol{d}_j^1\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_j^*)\boldsymbol{\alpha}_j^1\boldsymbol{x})+T_j^{-1}(\bar{p}_j^*)\cdot(\boldsymbol{d}_j^2\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_j^*)\boldsymbol{\alpha}_j^2\boldsymbol{x})$ が成立している．従って，次式が成立する．

$$
p_i(\boldsymbol{x},h_i^*) = T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*)-(\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \geq \bar{p}_i^* = p_i(\boldsymbol{x}^*,h_i^*) \qquad i=1,\cdots,k.
$$

すなわち，$p_i(\boldsymbol{x},h_i^*) \geq p_i(\boldsymbol{x}^*,h_i^*), i=1,\cdots,k$ (ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $p_j(\boldsymbol{x},h_j^*) > p_j(\boldsymbol{x}^*,h_j^*)$) であることから，等価的に，$\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x},h_i^*)) \geq \mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x}^*,h_i^*)), i=1,\cdots,k$ (ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $\mu_{p_j}(p_j(\boldsymbol{x},h_j^*)) > \mu_{p_j}(p_j(\boldsymbol{x}^*,h_j^*))$) なる $\boldsymbol{x} \in X$ が存在する．これは，$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{h}^*,\lambda^*)$ が MAXMIN1 の一意な最適解であることに反する． □

MAXMIN1 の不等式制約式 (4.3) において，仮定 4.1 より，以下の関係が成立する．

$$
\begin{aligned}
&\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x},h_i)) \geq \lambda, \\
&\qquad \Leftrightarrow p_i(\boldsymbol{x},h_i) \geq \mu_{p_i}^{-1}(\lambda), \\
&\qquad \Leftrightarrow T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i)-(\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \geq \mu_{p_i}^{-1}(\lambda), \\
&\qquad \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}-L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\
&\qquad \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x})-L^{-1}(h_i)(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}). \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

式 (4.6) の右辺において，MAXMIN1 の制約式 $h_i \geq \lambda$ と仮定 4.1 より，$\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) \leq \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\lambda)$, $L^{-1}(h_i) \leq L^{-1}(\lambda)$ が成立している．また，LR ファジィ数の広がりのパラメータは常に正であることから，$(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\ \boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) > 0$ が保証されているので，次の不等式が成立する:

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x})-L^{-1}(h_i)(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\
&\qquad \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x})-L^{-1}(\lambda)(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\
&\qquad = (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}-L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}-L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}). \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

関係式 (4.6), (4.7) より以下の不等式が成立する:

$$
\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\lambda) \geq \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}-L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda))\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}-L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}).
$$

従って，MAXMIN1 は，決定変数として可能性測度の値 $h_i,\ i=1,\cdots,k$ を含まない問題に帰着する．

[MAXMIN2]

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{\boldsymbol{x}\in X,\lambda\in[0,1]} & \lambda \\ \text{subject to} & \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\lambda) \ge (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda)) \\ & \qquad \times(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}), \qquad i=1,\cdots,k \qquad (4.8) \end{array}$$

MAXMIN2 の制約式 (4.8) において，λ を固定すれば線形不等式となることから，$0\le\lambda\le 1$ に関する 2 分法とシンプレックス法の第 1 段を用いて MAXMIN2 の最適解 $(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*)$ を求めることができる．

5. 満足基準最適化モデルに基づくファジィアプローチ

本節では，前節と同様の方法で，満足基準最適化モデルに基づく多目的計画問題 MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) を用いて，ファジィ決定に基づく満足解を導出するための問題を定式化する．MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) において，意思決定者は，許容確率レベル $(\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_k)$ の最大化と対応する可能性測度の値 $(h_1,\cdots,h_k)=(\mu_{\widetilde{G}_1}(f_1(\boldsymbol{x},h_1,\bar{p}_1)),\cdots,\mu_{\widetilde{G}_k}(f_k(\boldsymbol{x},h_k,\bar{p}_k)))$ の最大化を同時に望んでいると考えられ，MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) の自然な拡張である以下の多目的計画問題 MOP8 について考察する:

[MOP8]

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X,h_i\in[0,1],\bar{p}_i\in[0,1],i=1,\cdots,k}(\mu_{\widetilde{G}_1}(f_1(\boldsymbol{x},h_1,\bar{p}_1)),\cdots,\mu_{\widetilde{G}_k}(f_k(\boldsymbol{x},h_k,\bar{p}_k)),\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_k).$$

本節では，意思決定者は MOP8 の目的関数 $\bar{p}_i, i=1,\cdots,k$ に対してそれぞれファジィ目標を持ち，これらのファジィ目標はメンバシップ関数 $\mu_{\bar{p}_i}(\bar{p}_i)$ により規定されるものとする．このとき，MOP8 は以下の多目的計画問題 MOP9 に変換できる:

[MOP9]

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X,h_i\in[0,1],\bar{p}_i\in[0,1],i=1,\cdots,k}(\mu_{\widetilde{G}_1}(f_1(\boldsymbol{x},h_1,\bar{p}_1)),\cdots,\mu_{\widetilde{G}_k}(f_k(\boldsymbol{x},h_k,\bar{p}_k)),\mu_{\bar{p}_1}(\bar{p}_1),\cdots,\mu_{\bar{p}_k}(\bar{p}_k)).$$

本節では，MOP9 に対して，意思決定者が満足解導出のための統合オペレータとしてファジィ決定を採用するとの仮定のもとで，満足基準最適化モデルに基づく多目的計画問題 MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}$) に対するファジィアプローチを提案する．

MOP9 のメンバシップ関数 $\mu_{\bar{p}_i}(\bar{p}_i)$ を適切に設定するために，以下のような方法が考えられる．まず，意思決定者は，許容確率レベル $\bar{p}_i$ の値を設定する代わりに，許容確率レベル $\bar{p}_i$ の区間 P_i として，十分満足な最小値 $p_{i\max}$ と受け入れることができない最大値 $p_{i\min}$ を設定するものとする．

$$\begin{array}{rcl} P_i &=& [p_{i\min},p_{i\max}], \quad i=1,\cdots,k \\ P &=& \{\bar{\boldsymbol{p}}=(\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_k)\mid \bar{p}_i\in P_i,\ i=1,\cdots,k\}. \end{array}$$

この区間 P_i 上で，メンバシップ関数 $\mu_{\bar{p}_i}(\bar{p}_i)$ は以下の性質を満たすものと仮定する．

仮定 5.1 メンバシップ関数 $\mu_{\bar{p}_i}(\bar{p}_i),\ i=1,\cdots,k$ は定義域上の区間 P_i 上で，連続かつ狭義単調増加関数である．

メンバシップ関数 $\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i))$ の定義域上の区間 $F_i(P_i)$ は，たとえば以下のように設定することができる．まず，意思決定者が，許容確率レベル $\bar{p}_i,\ i = 1, \cdots, k$ に対して十分満足な最小値 $p_{i\max}$ と受け入れることができない最大値 $p_{i\min}$ を設定して，$P_i = [p_{i\min}, p_{i\max}]$ とした後，仮定 5.1 を満たすように，メンバシップ関数 $\mu_{\bar{p}_i}(\bar{p}_i)$ を設定する．次に，メンバシップ関数 $\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i))$ の定義域上の区間 $F_i(P_i)$ における最小値 $f_{i\min}$ は，

$$
\begin{array}{rcl}
f_{i\min} & = & \displaystyle\min_{\boldsymbol{x}\in X, 0\le h_i\le 1} f_i(\boldsymbol{x}, h_i, p_{i\min}) \\
\text{subject to} \quad h_i & = & \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, p_{i\min}))
\end{array}
$$

の最適目的関数値として設定する．この問題は，式変形すれば，等価的に以下のようにも表現できる:

$$
\begin{array}{rcl}
f_{i\min} & = & \displaystyle\min_{\boldsymbol{x}\in X, 0\le h_i\le 1} \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) \\
\text{subject to} \quad \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) & = & (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(p_{i\min}) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}).
\end{array}
$$

この問題は，$h_i \in [0, 1]$ に関する二分法とシンプレックス法の第 1 段階を用いて容易に解くことができる．一方，区間 $F_i(P_i)$ の最大値 $f_{i\max}$ に対しては，まず，

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\min_{\boldsymbol{x}\in X, 0\le h_i\le 1} & f_i(\boldsymbol{x}, h_i, p_{i\max}) \\
\text{subject to} & h_i = \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, p_{i\max}))
\end{array}
$$

の最適解 $(\boldsymbol{x}_i^*, h_i^*), i = 1, \cdots, k$ を，二分法とシンプレックス法の第 1 段階を用いて求める．最適解 $(\boldsymbol{x}_i^*, h_i^*), i = 1, \cdots, k$ を用いて

$$
f_{i\max} = \max_{\ell=1,\cdots,k, \ell\ne i} f_i(\boldsymbol{x}_\ell^*, h_\ell^*, p_{i\max})
$$

により $f_{i\max}$ を計算して，区間 $F_i(P_i) = [f_{i\min}, f_{i\max}]$ を設定することができる．

このとき，意思決定者の満足解は，各メンバシップ関数のファジィ決定に対する最大化決定を採用すれば，以下の問題を解くことにより得られる:

[MAXMIN3]

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\max_{\boldsymbol{x}\in X, \bar{p}_i\in P_i, h_i\in H_i(P_i), i=1,\cdots,k, \lambda\in[0,1]} & \lambda & \\
\text{subject to} & h_i = \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i)) \ge \lambda, \quad i = 1, \cdots, k, & (5.1) \\
& \mu_{\bar{p}_i}(\bar{p}_i) \ge \lambda, \qquad i = 1, \cdots, k. & (5.2)
\end{array}
$$

ここで，

$$
H_i(P_i) = [\mu_{\widetilde{G}_i}(f_{i\max}), \mu_{\widetilde{G}_i}(f_{i\min})].
$$

このとき，定理 4.1 と同様にして，MAXMIN3 の最適解と，P-パレート最適解，M-パレート最適解の間には，以下の関係が成立する．

定理 5.1 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*, \bar{\boldsymbol{p}}^*, \lambda^*)$ を MAXMIN3 の一意な最適解であるとすると:

(1) $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*)$ は，MOP5$(\bar{\boldsymbol{p}}^*)$ に対する M-パレート最適解である．

(2) $\boldsymbol{x}^*$ は，MOP2$(\boldsymbol{h}^*)$ に対する P-パレート最適解である．

証明　(1)：$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*)$ が，MOP5($\bar{\boldsymbol{p}}^*$) に対する M-パレート最適解でないとすると，

$$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i^*)) = h_i \geq \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*, \bar{p}_i^*)) = h_i^*, i = 1, \cdots, k$$

(ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $\mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}, h_j, \bar{p}_j^*)) = h_j > \mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}^*, h_j^*, \bar{p}_j^*)) = h_j^*$) であるような $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$ が存在する．これは，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*, \bar{\boldsymbol{p}}^*, \lambda^*)$ が MAXMIN3 の一意な最適解であることに反する．

(2)：$\boldsymbol{x}^*$ が，MOP2($\boldsymbol{h}^*$) に対する P-パレート最適解でないとすると，以下の不等式を満たす $\boldsymbol{x} \in X$ が存在する:

$$\begin{aligned}
& p_i(\boldsymbol{x}, h_i^*) \geq p_i(\boldsymbol{x}^*, h_i^*) = \bar{p}_i^*, \\
& \qquad \Leftrightarrow T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \geq \bar{p}_i^*, \\
& \qquad \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i^*) \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i^*) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\
& \qquad \Leftrightarrow h_i^* \leq \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i^*, \bar{p}_i^*)), \qquad i = 1, \cdots, k.
\end{aligned}$$

ただし，少なくとも一つの添字 j に対して $h_j^* < \mu_{\widetilde{G}_j}(f_j(\boldsymbol{x}, h_j^*, \bar{p}_j^*))$ が成立している．これは，$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{h}^*, \bar{\boldsymbol{p}}^*, \lambda^*)$ が MAXMIN3 の一意な最適解であることに反する． □

MAXMIN3 の不等式制約式 (5.1) において，次の関係が成立する:

$$\begin{aligned}
h_i &= \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i)) \geq \lambda, \\
&\Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) = f_i(\boldsymbol{x}, h_i, \bar{p}_i) \leq \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\lambda) \\
&\Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(h_i) = (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \leq \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\lambda). \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

ここで，$L^{-1}(h_i) \leq L^{-1}(\lambda)$, $\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x} > 0$ であることから次の不等式が成立する:

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}) \\
&\qquad = (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}) - L^{-1}(h_i)\left(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}\right) \\
&\qquad \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}) - L^{-1}(\lambda)\left(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}\right). \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

よって，関係式 (5.3), (5.4) より次の不等式が成立する:

$$\begin{aligned}
\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\lambda) &\geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}) - L^{-1}(\lambda)\left(\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x} + T_i^{-1}(\bar{p}_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}\right) \\
&= (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\bar{p}_i) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}). \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

一方，不等式制約式 (5.2) と仮定 5.1 より $\bar{p}_i \geq \mu_{\bar{p}_i}^{-1}(\lambda)$ であることから，不等式制約式 (5.5) は次式のように変形できる:

$$\begin{aligned}
& T_i\left(\frac{\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\lambda) - (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}}\right) \geq \bar{p}_i \geq \mu_{\bar{p}_i}^{-1}(\lambda), \\
& \qquad \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\lambda) \geq (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}) + T_i^{-1}(\mu_{\bar{p}_i}^{-1}(\lambda)) \cdot (\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

表 1: 目的関数に含まれるファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{c}}_{ij}$ のパラメータ

j	1	2	3	j	1	2	3
d^1_{1j}	2	1	3	d^2_{1j}	1.3	1.1	1.2
d^1_{2j}	-7	-7	-9	d^2_{2j}	1.1	1.2	1.1
α^1_{1j}	0.5	0.4	0.5	α^2_{1j}	0.05	0.04	0.05
α^1_{2j}	0.3	0.5	0.4	α^2_{2j}	0.05	0.04	0.05
β^1_{1j}	0.6	0.5	0.6	β^2_{1j}	0.06	0.05	0.06
β^1_{2j}	0.4	0.5	0.5	β^2_{2j}	0.06	0.06	0.05

従って，MAXMIN3 は，決定変数として可能性測度の値 $h_i, i = 1, \cdots, k$ のみならず，許容確率レベル $\bar{p}_i,\ i = 1, \cdots, k$ を含まない以下の問題に帰着する．

[MAXMIN4]

$$\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{x}\in X,\lambda\in[0,1]} && \lambda \\
&\text{subject to} && \mu^{-1}_{\widetilde{G}_i}(\lambda) \geq (\boldsymbol{d}^1_i\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}^1_i\boldsymbol{x}) + T^{-1}_i(\mu^{-1}_{\bar{p}_i}(\lambda)) \cdot (\boldsymbol{d}^2_i\boldsymbol{x} - L^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}^2_i\boldsymbol{x}), \\
&&& \qquad\qquad i = 1, \cdots, k.
\end{aligned}$$

MAXMIN4 は MAXMIN2 と本質的に等価であり，$0 \leq \lambda \leq 1$ に関する 2 分法とシンプレックス法の第 1 段を用いて MAXMIN4 の最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ を求めることができる．

6. 数値例

本節では，FRMOLP に対する確率最大化モデルに基づくファジィアプローチの適用例として，Katagiri ら [9] が定式化したファジィランダム 2 目的線形計画問題を取り上げる．

[MOFRLP]

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x}\in X} && \tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_1\boldsymbol{x} = \tilde{\bar{c}}_{11}x_1 + \tilde{\bar{c}}_{12}x_2 + \tilde{\bar{c}}_{13}x_3 \\
&\min_{\boldsymbol{x}\in X} && \tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_2\boldsymbol{x} = \tilde{\bar{c}}_{21}x_1 + \tilde{\bar{c}}_{22}x_2 + \tilde{\bar{c}}_{23}x_3 \\
&\text{subject to} && \boldsymbol{x} \in X,
\end{aligned}$$

$$X = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 150,\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 175, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 160,\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 90 \end{array} \right\}.$$

各目的関数に含まれるファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{c}}_{ij},\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3$ を構成するパラメータの値を表 1 に示す． これらのパラメータを用いて構成される LR 型ファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{c}}_{ij}$ は，事象 ω が生起したとき以下の LR ファジィ数をとる:

$$\mu_{\tilde{\bar{c}}_{ij}(\omega)}(s) = \begin{cases} L\left(\frac{\bar{d}_{ij}(\omega)-s}{\bar{\alpha}_{ij}(\omega)}\right) & (s \leq \bar{d}_{ij}(\omega)\ \forall\omega), \\ R\left(\frac{s-\bar{d}_{ij}(\omega)}{\bar{\beta}_{ij}(\omega)}\right) & (s > \bar{d}_{ij}(\omega)\ \forall\omega). \end{cases}$$

また，LR 関数は $L(x) = R(x) = \max\{0, 1- \mid x \mid\}$，LR ファジィ数に含まれる係数 $\bar{d}_{ij}, \bar{\alpha}_{ij}, \bar{\beta}_{ij}$ は，それぞれ，$\bar{d}_{ij} = d^1_{ij} + \bar{t}_i d^2_{ij}$, $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha^1_{ij} + \bar{t}_i\alpha^2_{ij}$, $\bar{\beta}_{ij} = \beta^1_{ij} + \bar{t}_i\beta^2_{ij}$ で表される確率変数で，

$\bar{t}_i,\ i=1,2$ は，正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う確率変数である．

まず，ファジィランダム変数係数 $\tilde{\bar{c}}_{ij},\ i=1,2,\ j=1,2,3$ の構成要素 $\bar{d}_{ij}$ の期待値を用いて，各目的関数の最小値 $\min_{\boldsymbol{x}\in X} E(\bar{\boldsymbol{d}}_i)\boldsymbol{x},\ i=1,2$ と最大値 $\max_{\boldsymbol{x}\in X} E(\bar{\boldsymbol{d}}_i)\boldsymbol{x},\ i=1,2$ を計算する．これらの情報に基づいて，仮想的な意思決定者は，MOFRLP の各目的関数に対するファジィ目標 $\tilde{G}_i,\ i=1,2$ を表す線形メンバシップ関数を以下のように定義したものとする:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{G}_1}(y_1) &= \frac{96.42857-y_1}{96.42857-75},\\ \mu_{\tilde{G}_2}(y_2) &= \frac{(-285)-y_2}{(-285)-(-332.143)}.\end{aligned}$$

ファジィ目標 $\tilde{G}_i$ を表す線形メンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}(y_i)$ に対して，仮想的な意思決定者は，目的関数がファジィ目標を満たす可能性測度 $\Pi_{\tilde{\bar{\boldsymbol{c}}}_i\boldsymbol{x}}(\tilde{G}_i)$ に対する区間 $H_i=[h_{i\min},h_{i\max}], i=1,2$ をそれぞれ，$[0.4,0.75]$, $[0.4,0.75]$ と設定した．区間 $H_i, i=1,2$ に対応する確率 $p_i(\boldsymbol{x},h_i)$ の区間 $P_i(H_i)=[p_{i\min},p_{i\max}],\ i=1,2$ を式 (4.1), (4.2) から計算し，$p_i(\boldsymbol{x},h_i)$ のファジィ目標を表す線形メンバシップ関数を以下のように設定した:

$$\begin{aligned}\mu_{p_1}(p_1(\boldsymbol{x},h_1)) &= \frac{p_1(\boldsymbol{x},h_1)-0.401066}{(0.714968-0.401066)},\\ \mu_{p_2}(p_2(\boldsymbol{x},h_2)) &= \frac{p_2(\boldsymbol{x},h_2)-0.213304}{(0.812859-0.213304)}.\end{aligned}$$

メンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}(y_i)$, $\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x},h_i)),\ i=1,2$ に対する MAXMIN2 を 2 分法と 2 段階シンプレックス法の第 1 段階を用いて解き，以下の最適解を得た．

$$(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*)=(6.88984,13.3390,18.7288,0.564271).$$

このとき，MAXMIN2 の制約式 (4.8) がすべて活性であることから，最適解 $(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*)$ におけるメンバシップ関数の値は以下のようになった:

$$\begin{aligned}\mu_{p_1}(p_1(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*)) &= \mu_{p_2}(p_2(\boldsymbol{x}^*,\lambda^*))=0.564271,\\ \mu_{\tilde{G}_1}(y_1^*) &= \mu_{\tilde{G}_2}(y_2^*)=0.564271.\end{aligned}$$

ここで，$y_i^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\boldsymbol{d}_i^1\boldsymbol{x}^*-L^{-1}(\lambda^*)\boldsymbol{\alpha}_i^1\boldsymbol{x}^*)+T_i^{-1}(\mu_{p_i}^{-1}(\lambda^*))\cdot(\boldsymbol{d}_i^2\boldsymbol{x}^*-L^{-1}(\lambda^*)\boldsymbol{\alpha}_i^2\boldsymbol{x}^*), i=1,2$ とする．最適解 $(x_1^*,x_2^*,x_3^*,\lambda^*)$ において，確率最大化モデルにおける分布関数の値 $p_i(\boldsymbol{x},\lambda)$ に対する満足度 $\mu_{p_i}(p_i(\boldsymbol{x},\lambda)), i=1,2$ と目的関数 y_i（許容目的レベルに対応する）に対する満足度 $\mu_{\tilde{G}_i}(y_i), i=1,2$ が，ファジィ決定に従いバランスよく達成されていることがわかる．

7. おわりに

本論文では，ファジィランダム多目的線形計画問題に対する確率最大化モデルと満足基準最適化モデルの特徴を同時に組み込んだファジィアプローチを提案した．提案手法では，ファジィランダム変数係数を含む各目的関数に対して，目的達成レベルや許容確率レベルを設定する代わりに，目的達成レベルと許容確率レベルに対する満足度を表すメンバシップ関数を設定することにより，ファジィ決定を用いて満足解が導出される．一般に，意思決定者は，ファジィランダム多目的線形計画問題を取り扱うために数多くのパラメータを設定する必要

があるが，提案手法では，目的達成レベルと許容確率レベルに対するメンバシップ関数を設定するだけで対応する満足解を求めることができるという利点がある．しかし，意思決定者がファジィ決定により満足解を導出することに同意しない場合には，別の対応策が必要となる．今後は，ファジィランダム多目的線形計画問題に対して，意思決定者のパラメータ設定等の負担を軽減しつつ，問題の不確実性と意思決定者の選好を反映した満足解を導出する方法についての検討が必要である．

参考文献

[1] A. Charnes and W.W. Cooper: Chance constrained programming. *Management Science*, **6** (1959), 73–79.

[2] G.B. Danzig: Linear programming under uncertainty. *Management Science*, **1** (1955), 197–206.

[3] D. Dubois, and H. Prade: *Fuzzy Sets and Systems* (Academic Press, 1980).

[4] S. Hulsurkar, M.P. Biswal, and S.B Shinha: Fuzzy programming approach to multi-objective stochastic linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems*, **88** (1997), 173–181.

[5] 石井博昭: 確率論的最適化. 伊理正夫, 今野浩（編）:数理計画法の応用（理論編）(産業図書, 1982), 1–40.

[6] 石井博昭: 多様化時代の数理計画法 第3回確率計画法. オペレーションズ・リサーチ学会誌, **41** (1996), 504–509.

[7] H. Katagiri, H. Ishii, and T. Itoh: Fuzzy random linear programming problem. *Proceedings of Second European Workshop on Fuzzy Decision Analysis and Neural Networks for Management, Planning and Optimization*, (1997), 107-115.

[8] 片桐英樹, 坂和正敏, 加藤浩介, 大崎修嗣: ファジーランダム多目的線形計画問題に対する可能性測度と必然性測度を用いた満足基準最適化モデルに基づく対話型ファジー満足化手法. 電子情報通信学会論文誌 A, **J87-A** (2004), 634–641.

[9] H. Katagiri, M. Sakawa, K. Kato, and I. Nishizaki: Interactive multiobjective fuzzy random linear programming: maximization of possibility and probability. *European Journal of Operational Research*, **188** (2008), 530–539.

[10] H. Kwakernaak: Fuzzy random variable-1. *Information Sciences*, **15** (1978), 1–29.

[11] Y.J. Lai and C.L. Hwang: *Fuzzy Mathematical Programming* (Springer, Berlin, 1992).

[12] M.K. Luhandjula and M.M. Gupta: On fuzzy stochastic optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, **81** (1996), 47–55.

[13] M.L. Puri and D.A. Ralescu: Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **14** (1986), 409–422.

[14] H. Rommelfanger: Fuzzy linear programming and applications. *European Journal of Operational Research*, **92** (1997), 512–527.

[15] M. Sakawa: *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization* (Plenum Press, 1993).

[16] M. Sakawa, I. Nishizaki, and H. Katagiri: *Fuzzy Stochastic Multiobjective Programming* (Springer, New York, 2011).

[17] M. Sakawa, K. Kato, and H. Katagiri: An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear programming problems with random variable coefficients through a probability maximization model. *Fuzzy Sets and Systems*, **146** (2004), 205–220.

[18] 坂和正敏, 加藤浩介, 片桐英樹, 植田公一：確率変数係数を含む多目的線形計画問題に対する満足基準最適化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法. 第 18 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 8 月 28-30 日, 名古屋工業大学, (2002), 137–140.

[19] I.M. Stancu-Minasian: Overview of different approaches for solving stochastic programming problems with multiple objective functions. In R. Slowinski and J. Teghem (eds.): *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty* (Kluwer Academic Publishers, 1990), 71–101.

[20] J. Teghem, D. Dufrane, and M. Thauvoye: STRANGE: An interactive method for multi-objective linear programming under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, **26** (1986), 65–82.

[21] G.-Y. Wang and Z. Qiao: Linear programming with fuzzy random variable coefficients. *Fuzzy Sets and Systems*, **57** (1993), 295–311.

[22] G. Wang and Y. Zhang: The theory of fuzzy stochastic processes. *Fuzzy Sets and Systems*, **51** (1992), 161–178.

[23] H.-J. Zimmermann: Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*, **1** (1978), 45–55.

[24] H.-J. Zimmermann: *Fuzzy Sets, Decision-Making and Expert Systems* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 1987).

矢野均
名古屋市立大学人文社会学部現代社会学科
〒 467-8501 名古屋市瑞穂区瑞穂町山の畑 1
Email: `yano@hum.nagoya-cu.ac.jp`

ABSTRACT

A FUZZY APPROACH FOR FUZZY RANDOM MULTIOBJECTIVE LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Hitoshi Yano
Nagoya City University

In this paper, we propose a fuzzy approach for fuzzy random multiobjective linear programming problems (FRMOLP), in which the criteria of probability maximization and fractile optimization are considered simultaneously. In a probability maximization model for FRMOLP, the decision maker is required to specify permissible objective levels for the objective functions involving fuzzy random variables. However, the less values of permissible objective levels for minimization problems results in the less values of the corresponding distribution function because of the conflicts between them. Similarly, in a fractile optimization model for FRMOLP, the decision maker is required to specify permissible probability levels for the distribution function of the objective functions involving fuzzy random variables. However, the larger values of permissible probability levels results in the larger values of the corresponding objective function for minimization problems because of the conflicts between them. In this paper, it is assumed that the decision maker has fuzzy goals for not only permissible objective level of a probability maximization model but also permissible stochastic level of a fractile optimization model, and such fuzzy goals are quantified by eliciting the corresponding membership functions. According to the fuzzy decision, the satisfactory solution of the decision maker for FRMOLP is obtained on the basis of linear programming technique.