日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 54, 2011, pp. 43–57

(2-2) 間引きシステム入力待ち行列の解析

藤原 飛一　　紀 一誠
神奈川大学

(受理 2010 年 4 月 26 日; 再受理 2011 年 2 月 18 日)

和文概要　本論文では，Poisson 過程で到着する客をある 2 つの窓口 A と B に振り分ける問題について考える．このとき，負荷が均等になるように振り分けたとしても，振り分け方の相違により，到着時間間隔分布が異なるため，待ち時間は異なってくる．本稿ではこの問題を $(m\text{-}n)$ 間引き入力待ち行列モデルとして考察をおこない，特に (2-2) 間引き振り分け規則の場合における待ち時間への影響を調べる．この入力過程における客の到着時間間隔は互いに独立な確率変数列とはならない．解析に際しては古典的な位相法，母関数法，Rouché の定理および Sturm の定理を用いることにより，系内客数分布および待ち時間の期待値等に関する厳密解を導く．

キーワード: 待ち行列，マルコフ過程，G/M/1，位相法，母関数法，Rouché の定理

1．はじめに

Poisson 過程にしたがい到着する到着客をある 2 つのサービス窓口 A，B に振り分けるとき，負荷が均等になるように振り分けたとしても，振り分け方の相違により，到着時間間隔分布が異なるため，待ち時間は異なってくる．例として，1 人ずつ交互に窓口 A，B に振り分ける場合とランダムに窓口 A，B に振り分ける場合の比較を考える．この結果は文献 [1] に示されるように待ち時間は，1 人ずつ交互に振り分ける方がランダムに振り分けるより短くなることがわかっている．それでは，振り分ける人数を 2 人ずつ交互に振り分けた場合とランダムに振り分けた場合とではどちらの方が待ち時間が短くなるであろうか．さらには一般に m 人ごとに交互に振り分けた場合にはどうなるであろうか．交互振り分け人数 m を増加していくと，どこかでランダム振り分けの場合の待ち時間を超えて交互振り分けをおこなった場合の待ち時間の方が悪くなるところが出現するのではないかということが予測される．それではこの逆転現象が生ずるのは m がどのような値のときなのであろうか．さらには，サービス窓口の処理能力が異なり，窓口 A と窓口 B のサービス率が $m : n$ である場合にはランダムに振り分ける方式と，連続して到着する m 人を窓口 A に，引き続き連続して到着する n 人を窓口 B に振り分けることを繰り返す振り分け方式 $(m\text{-}n)$ 間引き方式とではどちらの方式の方が各窓口の待ち時間は小さくなるのであろうか．本稿ではこの問題を $(m\text{-}n)$ 間引き入力待ち行列モデルとして考察をおこない，特に (2-2) 間引き振り分け規則の場合における待ち時間への影響を調べる．この入力過程における客の到着時間間隔は互いに独立な確率変数列とはならない．解析に際しては古典的な位相法，母関数法 [2]，Rouché の定理 [3] および Sturm の定理 [3] を用いることにより，系内客数分布および待ち時間の期待値等に関する厳密解を導く．著書達が知る限り $(m\text{-}n)$ 間引き入力待ち行列に関する文献は発表されていない．

本論は以下のように構成される．まず，第2章は一般的な間引き入力過程である $(m$-$n)$ 間引き入力モデルについて説明し，到着過程における到着位相を定義する．第3章以降は (2-2) 間引き入力待ち行列モデルについて具体的に取り扱う．第3章では，(2-2) 間引き入力待ち行列の状態遷移図と状態方程式を考え，状態確率に関するベクトル母関数を定義する．第4章では，第3章で得た母関数の分母の零点の個数を調べることにより，本研究の待ち行列が定常解をもつ条件を導く．この際，Rouché の定理や Sturm の定理などを用いて根の分離を厳密に証明していく．第5章では，前章の結論から定常解とその存在条件を示す．また，第6章は (2-2) 間引き入力システムの系内客数および待ち時間の期待値を計算する．これらの結果を文献 [1] のランダム間引き入力システム，(1-1) 間引き入力システムの数値結果と比較する．第7章に結論と今後の課題を示す.

2. $(m$-$n)$ 間引き入力過程

2.1. $(m$-$n)$ 間引き入力モデル

到着率 λ のポアソン到着過程を考える．この到着客の列を $\{C_i\}_{i=0}^{\infty}$ とする．ただし，C_i は i 番目の到着客である．また τ_i を客 C_i の到着時刻とし，到着時刻列を $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ とする．ただし，$\tau_0 = 0$．さらに客の到着時間間隔を

$$T_i = \tau_i - \tau_{i-1},\ i = 1,\ 2,\ \cdots \tag{2.1}$$

とする．客の到着時間間隔列 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ は i.i.d.r.v's (independent and identically distributed random variables) となる．その分布は指数分布

$$A(t) = P\{T_i \le t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.2}$$

にしたがう．このとき m 人の客 $\{C_i\}_{i=0}^{m-1}$ は実際にサービス窓口 A に到着し，引き続く n 人の客 $\{C_i\}_{i=m}^{m+n-1}$ は間引かれるものとする．さらにこの間引き操作は次々と繰り返されるものとする．すなわち，$\{C_i\}_{i=m+n}^{2m+n-1}$ は窓口 A に到着し，$\{C_i\}_{i=2m+n}^{2m+2n-1}$ は間引かれる．この結果窓口 A に到着する客の列は m 人ごとの到着列

$$\{C_i\}_{i=0}^{m-1},\ \{C_i\}_{i=m+n}^{(m+n)+m-1},\ \{C_i\}_{i=2(m+n)}^{2(m+n)+m-1},\ \cdots$$

となる．一般化して表せば窓口 A への到着客の列は

$$F_{(m,n)} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{C_i\}_{i=k(m+n)}^{k(m+n)+m-1}$$

となり，これら以外の客は間引かれて (窓口 B に到着して) 窓口 A には到着しない．本論ではこのような到着過程を入力過程にもつ窓口 A に着目した待ち行列モデルの解析をおこなう．到着過程 $F_{(m,n)}$ を $(m$-$n)$ 間引き入力過程ということにする．到着過程 $F_{(m,n)}$ に対応する到着時間間隔列は i.i.d. にはならないので注意する必要がある．窓口 A に到着してきた客は FCFS でサービスを受けるものとし，サービス時間はサービス率 μ の指数分布にしたがうものとする (図1を参照).

2.2. 到着位相

古典的な方法である位相法を用いて $(m$-$n)$ 間引き入力過程の到着位相を定義する．$m+n$ 人のうち n 人を間引く操作が繰り返しおこなわれるため，必要な到着位相は $(m+n)$ 位相とな

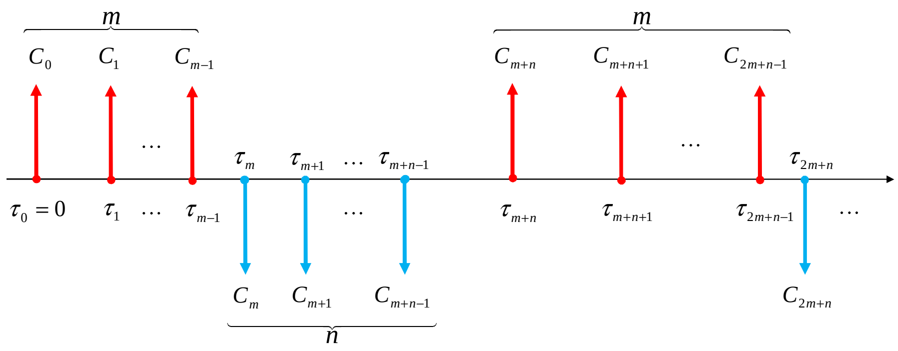

図 1: $(m\text{-}n)$ 間引き入力システム過程

る．$S(t) \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ m+n\}$ とし到着時間間隔を $m+n$ 個の位相に分解する．到着過程 $F_{(m,n)}$ が時刻 t において位相 l にある事象を次のように定義する (図 2 参照).

$$\{S(t) = l\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\tau_{(m+n)k+(l-1)} \leq t < \tau_{(m+n)k+l}\},\ l = 1,\ 2,\ \cdots,\ m+n. \tag{2.3}$$

本稿では，特に対称型の (2-2) 間引き入力過程について述べる．

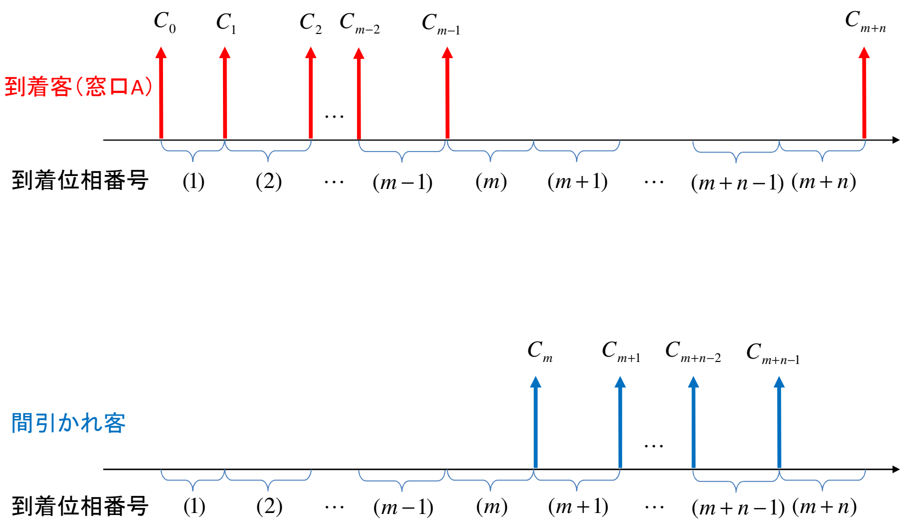

図 2: 到着位相

3. (2-2) 間引き入力待ち行列モデル

3.1. 状態遷移図と状態方程式

時刻 t におけるサービス窓口 A の系内客数を $N(t) \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$，到着位相番号を $S(t) \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ とする．$(N(t),\ S(t))$ はマルコフ過程となり，到着時刻 $\tau_0 = 0$ で到着があることに注意するとその状態遷移図は図 3 に示されるようになる．

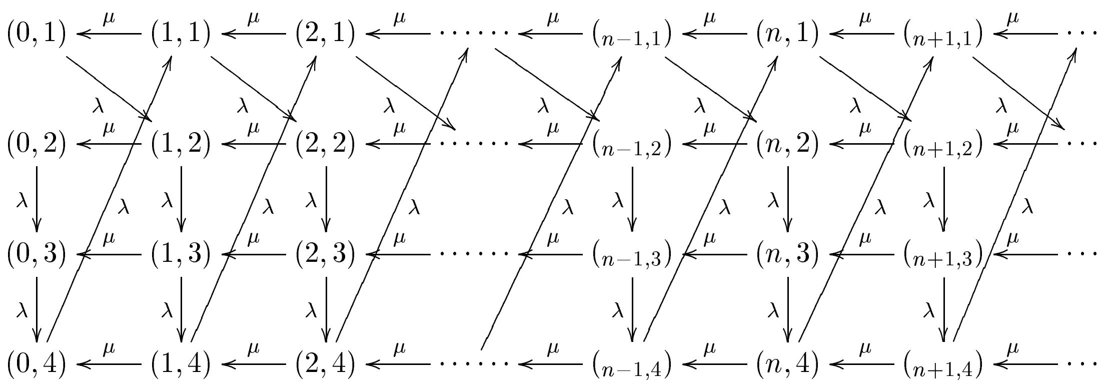

図 3: 状態遷移図

状態確率および状態ベクトルを次のように表記する．

$$\begin{aligned}\pi_{n,\,k} &= \lim_{t\to\infty} P\{N(t)=n,\ S(t)=k\} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4)\\ \boldsymbol{\pi}_n &= (\pi_{n,\,1},\ \pi_{n,\,2},\ \pi_{n,\,3},\ \pi_{n,\,4}),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.\end{aligned}$$

このとき，状態方程式 (大域平衡方程式) は以下の形で得られる．

$$\begin{cases}\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{\pi}_{n+1} - \boldsymbol{\pi}_n(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\pi}_{n-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0},\ n\geq 1.\end{cases} \tag{3.1}$$

ただし，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho & -\rho & 0\\ 0 & 0 & \rho & -\rho\\ 0 & 0 & 0 & \rho\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}0 & \rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \rho & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ は単位行列，$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ である．

3.2. 母関数

$|z|\leq 1$ である複素数 z について，$\{\boldsymbol{\pi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ に関するベクトル母関数を

$$\boldsymbol{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_n z^n \tag{3.2}$$

と定義する．$\boldsymbol{g}(z)$ は $\{\boldsymbol{\pi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ が確率ベクトルであるならば $|z|\leq 1$ で正則な関数である．まず (3.1) の両辺に z^{n+1} を掛けて，$n\geq 1$ について和をとり式 (3.2) を用いると

$$\boldsymbol{g}(z)(\boldsymbol{E} - z(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) + z^2\boldsymbol{C}) = (1-z)\boldsymbol{\pi}_0 \tag{3.3}$$

と書ける．ここで，行列 $\boldsymbol{D}(z)$ を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(z) &= \boldsymbol{E} - z(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) + z^2\boldsymbol{C}\\ &= \begin{pmatrix}1-(1+\rho)z & \rho z^2 & 0 & 0\\ 0 & 1-(1+\rho)z & \rho z & 0\\ 0 & 0 & 1-(1+\rho)z & \rho z\\ \rho z^2 & 0 & 0 & 1-(1+\rho)z\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.4}$$

とすると，式 (3.3) は以下のように書き直せる．

$$\boldsymbol{g}(z)\boldsymbol{D}(z) = (1-z)\boldsymbol{\pi}_0.$$

$\boldsymbol{D}(z)$ の逆行列は $\det \boldsymbol{D}(z) \neq 0$ である z ($|z| \leq 1$) について

$$\boldsymbol{D}^{-1}(z) = \frac{\tilde{\boldsymbol{D}}(z)}{\det \boldsymbol{D}(z)}$$

となる．ここで $\det \boldsymbol{D}(z)$ は $\boldsymbol{D}(z)$ の行列式であり

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{D}(z) &= \{1-(1+\rho)z\}^4 - (\rho^4 z^6) \\ &= (1-z)\left(\rho^2 z^2 - (1+2\rho)z + 1\right)\left(\{1-(1+\rho)z\}^2 + \rho^2 z^3\right)\end{aligned}$$

となる．さらに，$\det \boldsymbol{D}(z)$ を構成する 2 つの関数を次のように定義しておく．

$$u(z) = \rho^2 z^2 - (1+2\rho)z + 1 \tag{3.5}$$

$$v(z) = \{1-(1+\rho)z\}^2 + \rho^2 z^3. \tag{3.6}$$

すると，$\det \boldsymbol{D}(z)$ は次のように書ける．

$$\det \boldsymbol{D}(z) = (1-z)u(z)v(z). \tag{3.7}$$

また $\tilde{\boldsymbol{D}}(z)$ は余因子行列であり

$$\tilde{\boldsymbol{D}}(z) = \begin{pmatrix} \{1-(1+\rho)z\}^3 & -z^2\rho\{1-(1+\rho)z\}^2 & z^3\rho^2\{1-(1+\rho)z\} & -z^4\rho^3 \\ -z^4\rho^3 & \{1-(1+\rho)z\}^3 & -z\rho\{1-(1+\rho)z\}^2 & z^2\rho^2\{1-(1+\rho)z\} \\ z^3\rho^2\{1-(1+\rho)z\} & -z^5\rho^3 & \{1-(1+\rho)z\}^3 & -z\rho\{1-(1+\rho)z\}^2 \\ -z^2\rho\{1-(1+\rho)z\}^2 & z^4\rho^2\{1-(1+\rho)z\} & -z^5\rho^3 & \{1-(1+\rho)z\}^3 \end{pmatrix}$$

となる．これらを用いて $\boldsymbol{g}(z)$ は $u(z) \neq 0$ かつ $v(z) \neq 0$ である z ($|z| \leq 1$) について次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(z) &= (1-z)\boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{D}^{-1}(z) \\ &= \frac{\boldsymbol{\pi}_0\tilde{\boldsymbol{D}}(z)}{u(z)v(z)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

4. 根の分離

$\boldsymbol{g}(z)$ は $|z| \leq 1$ で正則な関数となるためには，式 (3.8) の分母の零点が $|z| \leq 1$ の内部にある場合にはその零点は分子の零点にもなっていなければならない．ここで単位円内 ($|z| \leq 1$) にある分母の零点の個数を調べることにする．つまり，$\boldsymbol{g}(z)$ の分母に現れる $u(z)v(z)$ の零点の存在範囲について調べる．

Lemma 4.1. $u(z) = 0$ は 2 実根

$$\alpha = \frac{1+2\rho-\sqrt{1+4\rho}}{2\rho^2} \tag{4.1}$$

$$\beta = \frac{1+2\rho+\sqrt{1+4\rho}}{2\rho^2} \tag{4.2}$$

をもち， $0 < \rho < 2$ の場合， $0 < \alpha < 1 < \beta$， $\rho \geq 2$ の場合， $0 < \alpha < \beta \leq 1$ である．

証明 判別式 $\boldsymbol{D} = 1 + 4\rho > 0$ なので，$\alpha < \beta$ となる相異なる 2 実根 (4.1) 式，(4.2) 式をもつことは明らか．さらに β は ρ に関する関数なので，その増減は

$$\frac{d}{d\rho}\beta(\rho) = -\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^2}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1+4\rho}}\right\} - \frac{\sqrt{1+4\rho}}{\rho^3} < 0 \tag{4.3}$$

より，$\beta(\rho)$ は単調減少となる．また，$\beta(2) = 1$ と (4.3) 式より，$\rho \geq 2$ のとき $\beta(\rho) \leq 1$ である． □

Lemma 4.2. $v(z) = 0$ は $|z| \leq 1$ 内に複素共役な 2 根 γ，$\bar{\gamma}$ をもつ．また 1 実根 ν をもち $|\nu| > 1$ である．

証明 $v(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ とする．ここで

$$\begin{cases} \varphi(z) \equiv \{1 - (1+\rho)\, z\}^2 \\ \psi(z) \equiv \rho^2 z^3. \end{cases}$$

単位円 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ 上で $|\varphi(z)|$，$|\psi(z)|$ の大小関係を比較する．

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &= \sqrt{\{1-(1+\rho)\, z\}^2 \{1-(1+\rho)\, \bar{z}\}^2} \\ &= \rho^2 + 2(1+\rho)(1-\cos\theta) \\ |\psi(z)| &= |\rho^2 z^3| = \rho^2 |z|^3 = \rho^2 \end{aligned}$$

であり，また $1 - \cos\theta \geq 0$ より，

$$|\varphi(z)| - |\psi(z)| = 2(1+\rho)(1-\cos\theta) \geq 0$$

がいえる．これより，次のような関係が得られる．

$$|\psi(z)| \leq |\varphi(z)|. \tag{4.4}$$

ただし，等号成立は $\cos\theta = 1$ のときすなわち $\theta = 0$ のときである．すなわち，$z = 1$ のとき式 (4.4) の等号が成立する．式 (4.4) がもし，$|\psi(z)| < |\varphi(z)|$ であれば，領域 C の内部および C 上，すなわち $|z| \leq 1$ の範囲に $\varphi(z) = 0$ の解の個数と $\varphi(z) + \psi(z) = 0$ の解の個数が一致することが Rouché の定理より示せる．しかし，今回は式 (4.4) は等号が成り立つ場合も含まれるので単純に Rouché の定理を適用できない．この場合は特別に等号成立条件の吟味が必要となる．

$$v(z) = \varphi(z) + \psi(z) = \varphi(z)\left(1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right)$$

なので

$$\arg(v(z)) = \arg(\varphi(z)) + \arg\left(1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right) \tag{4.5}$$

となる．

$$h(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

とおけば式 (4.4) より $|h(z)| \leq 1$ となる．等号成立は $z = 1$ のときであり，このとき $h(1) = 1$ であるから $1 + h(1) = 2$ となることに注意すると，z が C 上を一周するとき $1 + h(z)$ は 1 を

中心とする半径 1 の円内に軌跡をもつ．また，$|h(z)|= 1$ となる点，すなわち $z = 1$ においては $h(1) = 1$ となり $1 + h(z)$ の軌跡は $(2, 0)$ を通ることがわかる．これより z が C 上を一周したとき $\arg(1 + h(z)) = 0$ であることがわかる．よって，式 (4.5) より z が C 上を一周したとき

$$\arg(v(z)) = \arg(\varphi(z)) \tag{4.6}$$

である．すなわち，$v(z) = 0$ と $\varphi(z) = 0$ は単位円内に同数の根をもつ．$\varphi(z) = 0$ は単位円内に $z = \dfrac{1}{1+\rho}$ という 2 重根をもつ．したがって $v(z) = 0$ も単位円内に 2 根をもつ．

$v(z) = 0$ の 3 根のうち 2 根は単位円内にあることが示せたので，残り 1 根は単位円外にある．まず，単位円外の 1 根が実根であることを示す．これは，複素共役根の 2 根の絶対値は等しいので単位円外に複素共役根の片方だけが存在することはあり得ない，つまり単位円外にある 1 根は必ず実根となる．だが，単位円内の 2 根が相異なる 2 実根，複素共役根，2 重根のいずれかであるかはまだわからない．ここでは，この単位円内の 2 根が複素共役根であることを Sturm の定理により示し，単位円内の根が 2 重根ではないことを示す．Sturm の定理により $v(z) = 0$ の根のうち実根はただ 1 つだけであることを示す．

まず，$f_0(z) = v(z)$，$f_1(z) = \dfrac{d}{dz}f_0(z)$ からなる Sturm 関数列を

$$f_i(z) = q_i(z)f_{i+1}(z) - f_{i+2}(z),\ i = 0, 1, 2, 3 \tag{4.7}$$

と定義すると

$$\begin{aligned}
f_0(z) &= \rho^2 z^3 + (1+\rho)^2 z^2 - 2(1+\rho)z + 1 \\
f_1(z) &= 3\rho^2 z^2 + 2(1+\rho)^2 z - 2(1+\rho) \\
f_2(z) &= \frac{2(1+\rho)(1+3\rho+9\rho^2+\rho^3)}{9\rho^2}z - \frac{2+6\rho+15\rho^2+2\rho^3}{9\rho^2} \\
f_3(z) &= -\frac{9\rho^4(4+12\rho+39\rho^2+4\rho^3)}{4(1+\rho)^2(1+3\rho+9\rho^2+\rho^3)^2}
\end{aligned}$$

となる．このとき，$-\infty < z < \infty$ に存在する実根の個数を考えるため $z = -\infty$，$z = \infty$ に対する Sturm 関数列の符号変化を調べると表 1 に示されるようになる．符号変化の個数は $V(-\infty) = 2$，$V(\infty) = 1$ となり $V(-\infty) - V(\infty) = 1$ であるので $v(z) = 0$ は実根がただ 1 つだけもつことがいえ，したがって，残りの 2 根は複素共役な根であることがいえる．この 1 実根が重根にはならない理由として，単位円外の実根が 1 つしか存在しないことからも明らか．以上のことから，3 次方程式 $v(z) = 0$ は単位円外に 1 実根と単位円内に 2 根の複素共役解をもつ．$\square$

表 1: Sturm 関数列の最高次係数の符号

	$f_0(z)$	$f_1(z)$	$f_2(z)$	$f_3(z)$	$V(z)$
-∞	$-$	$+$	$-$	$-$	2
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	1

実際に $\rho = 0.01 \sim 1.9$ の範囲で $h(z) = 1 + \dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ の軌跡を描いてみると図 4 のグラフに示されるようになる．$\rho = 0.1,\ 1.0,\ 1.9$ に対応するものである．いずれの場合も実軸に対称で，8 の字の軌跡を描いていることがわかる．

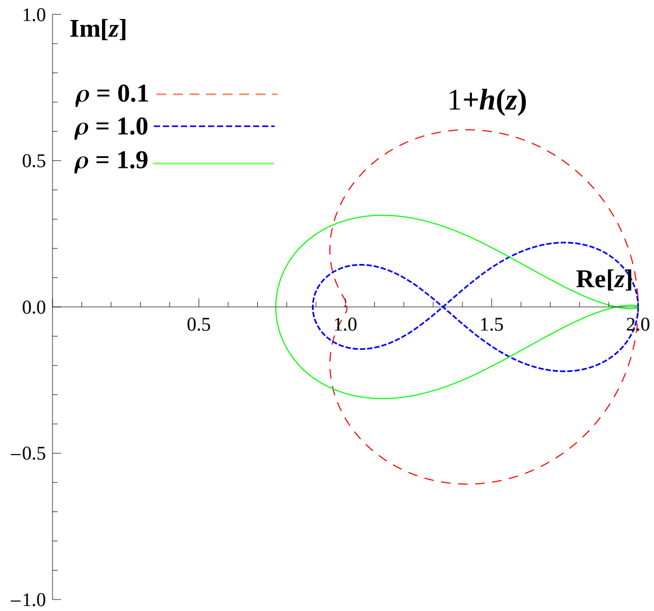

図 4: $1 + h(z)$ の軌跡 ($\rho = 0.1,\ 1.0,\ 1.9$)

Proposition 4.1. $u(z)v(z) = 0$ は $0 < \rho < 2$ の場合単位円内に 3 根をもち，$2 \leq \rho$ の場合単位円内に 4 根をもつ．

証明 Lemma 4.1，および Lemma 4.2 より明らか． □

5. 定常解とその存在条件

Proposition 5.1. 方程式 (3.1) は $0 < \rho < 2$ の場合定常解をもち，$\rho \geq 2$ の場合定常解をもたない．

証明 $|z| < 1$ を満たす $v(z) = 0$ の共役な複素解を $z = \gamma,\ \bar{\gamma}$，残り 1 つの実数解を $z = \nu$ とし，式 (3.5) および (3.6) を簡単化のため次のように書き直しておく．

$$u(z) = \rho^2(z-\alpha)(z-\beta) \tag{5.1}$$
$$v(z) = \rho^2(z-\gamma)(z-\bar{\gamma})(z-\nu). \tag{5.2}$$

さらに，式 (3.8) を式 (5.1)，(5.2) を用いて書き直すと

$$\boldsymbol{g}(z) = \frac{\boldsymbol{\pi}_0\tilde{\boldsymbol{D}}(z)}{\rho^4(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\bar{\gamma})(z-\nu)}. \tag{5.3}$$

ここで，$\boldsymbol{e} = {}^t(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ とする．また，確率母関数 $\boldsymbol{g}(z)$ の性質から $\boldsymbol{g}(1)\boldsymbol{e} = 1$ である．これより，

$$\frac{\boldsymbol{\pi}_0\tilde{\boldsymbol{D}}(1)\boldsymbol{e}}{\rho^4(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\bar{\gamma})(1-\nu)} = 1 \tag{5.4}$$

である．$\boldsymbol{g}(z)$ は $|z| \leq 1$ で正則な関数であるので，式 (5.3) の分母の零点のうち $|z| \leq 1$ 内に存在するものについては分子の零点にもなっていなければならない．$0 < \rho < 2$ の場合，$|z| \leq 1$

の範囲における分母の零点は Lemma 4.1，Lemma 4.2 より α，γ，$\bar{\gamma}$ であるので

$$\boldsymbol{\pi}_0\tilde{\boldsymbol{D}}(\alpha)\boldsymbol{e} = 0 \quad (5.5)$$
$$\boldsymbol{\pi}_0\tilde{\boldsymbol{D}}(\gamma)\boldsymbol{e} = 0 \quad (5.6)$$
$$\boldsymbol{\pi}_0\tilde{\boldsymbol{D}}(\bar{\gamma})\boldsymbol{e} = 0 \quad (5.7)$$

が成り立っている．したがって，式 (5.5)，(5.6)，(5.7)，(5.4) の４本の連立方程式を解くことで，初期状態 $\boldsymbol{\pi}_0$ は一意に決まる (付録参照)．一方，$\rho \geq 2$ の場合には式 (5.3) の $|z| \leq 1$ における分母の零点は α，β，γ，$\bar{\gamma}$ なので式 (5.5)，(5.6)，(5.7)，(5.4) の 4 式に加えて $\boldsymbol{\pi}_0\tilde{D}(\beta)\boldsymbol{e} = 0$ が成り立っていなければならない．これらの 5 本の連立方程式を満たす解は $\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{0}$ のみとなり，方程式 (3.1) は定常解をもたない． □

6. 系内客数および待ち時間の期待値

6.1. 系内客数の期待値

以下では $N(t)$，$S(t)$ の定常状態のみを考えることとし，定常状態における系内客数を N，定常状態における到着位相を S と表すことにする．窓口 A における待ち行列におけるサービス時間はサービス率 μ の指数分布に従うと仮定しているので，定常状態における系内客数 N の期待値は次により求めることができる．

$$E[N] = \frac{d}{dz}\boldsymbol{g}(z)\boldsymbol{e}\Big|_{z=1}. \quad (6.1)$$

また参考までに，M/M/1 型ランダム間引き入力システムの定常状態における系内客数 N_R の期待値と G/M/1 型 (1-1) 間引き入力システムの定常状態における系内客数 N_1 の期待値との比較をする．

M/M/1 型ランダム間引き入力システムの系内客数 N_R の期待値は

$$E[N_R] = \frac{\rho}{2-\rho} \quad (6.2)$$

となる．

G/M/1 型 (1-1) 間引き入力システムの系内客数 N_1 の期待値 (参考文献 [1]) は

$$E[N_1] = \frac{2\rho^2 - 2\rho - 1 + \sqrt{4\rho+1}}{2\rho(2-\rho)} \quad (6.3)$$

となる．$E[N]$，$E[N_R]$ および $E[N_1]$ を比較した結果が図 5 と表 2 である．図 5 のグラフは待ち行列の混雑状況の指標であるトラヒック密度 ρ を横軸に，縦軸を期待値として数値計算したものである．(2-2) で間引く方がランダムに間引くものより系内客数の期待値は小さく (1-1) で間引くものよりはごくわずかに系内客数の期待値は大きくなることが確認できる．

6.2. 待ち時間の期待値

定常状態において，窓口 A に客が到着した時点での待ち時間を考える．待ち時間の確率変数を W とし，到着時点で系内客数 n 人に出会う客の待ち時間を W_n とする．つまり W_n は，その客が到着した時点で，自分を含まずに n 人の客が既に系内に滞在し，それらの客がサービスをし終えるまでの時間のことをいう．このような状態が発生するのは，系の状態が n で

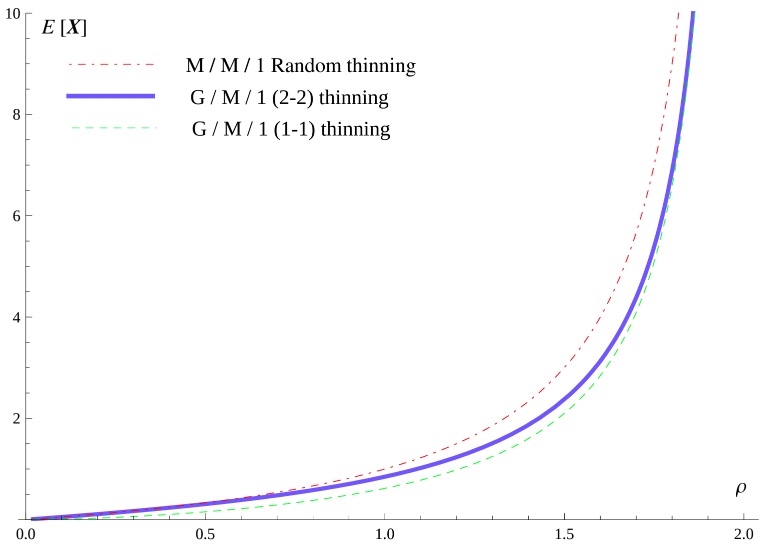

図 5: (2-2) 間引きシステム，ランダム間引きシステムおよび (1-1) 間引きシステムの系内客数の期待値

表 2: 系内客数の期待値の比較

ρ	$\rho/2$	$E(N_1)$ (1-1) thinning	$E(N)$ (2-2) thinning	$E(N_R)$ random thinning
0.1	0.05	0.00846304	0.0523024	0.052631579
0.2	0.1	0.0300566	0.108821	0.111111111
0.3	0.15	0.0619997	0.169702	0.176470588
0.4	0.2	0.103478	0.235754	0.25
0.5	0.25	0.154701	0.308234	0.333333333
0.6	0.3	0.216612	0.388805	0.428571429
0.7	0.35	0.290857	0.479627	0.538461538
0.8	0.4	0.379891	0.58354	0.666666667
0.9	0.45	0.487253	0.70437	0.818181818
1.0	0.5	0.618034	0.847432	1.0
1.1	0.55	0.779692	1.02036	1.222222222
1.2	0.6	0.983499	1.23457	1.5
1.3	0.65	1.24724	1.50795	1.857142857
1.4	0.7	1.60062	1.87032	2.333333333
1.5	0.75	2.09717	2.37526	3.0
1.6	0.8	2.84398	3.12995	4.0
1.7	0.85	4.09103	4.38441	5.666666667
1.8	0.9	6.58828	6.88866	9.0
1.9	0.95	14.0857	14.3927	19.0

ありかつ到着が発生する場合，つまり $(n,1)$ あるいは $(n,4)$ の状態から到着が発生する場合である．

待ち時間が $\{W \leq x\}$ である事象を考える．この事象は次のような条件付きの事象に分解して考えることができる．

$$\{W \leq x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s=0}^{4} \{W_n \leq x, (N,S) = (n,s) \text{ の状態で到着客が発生} \mid \text{到着客が発生}\}$$

したがって，確率 $P(W \leq x)$ は

$$\begin{aligned} P(W \leq x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(W_n \leq x, (N,S) = (n,1) \text{ の状態で到着客が発生} \mid \text{到着客が発生}) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} P(W_n \leq x, (N,S) = (n,4) \text{ の状態で到着客が発生} \mid \text{到着客が発生}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(W_n \leq x)\{P((N,S) = (n,1) \text{ の状態で到着客が発生}) \\ &\quad + P((N,S) = (n,4) \text{ の状態で到着客が発生})\}/P(\text{到着客が発生}). \end{aligned} \tag{6.4}$$

ここで，

$$\boldsymbol{g}(1) = \frac{\boldsymbol{\pi}_0 \tilde{\boldsymbol{D}}(1)}{u(1)v(1)} = {}^t\left(\frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}\right)$$

なので，$P(S=1) = P(S=2) = P(S=3) = P(S=4) = \dfrac{1}{4}$ となる．したがって

$$\begin{aligned} P(\text{到着客が発生}) &= P(S = 1 \text{ で到着客が発生}) + P(S = 4 \text{ で到着客が発生}) \\ &= \frac{1}{4}\lambda dt + \frac{1}{4}\lambda dt = \frac{1}{2}\lambda dt. \end{aligned} \tag{6.5}$$

また

$$P((N,S) = (n,1) \text{ の状態で到着客が発生}) = \lambda dt \times \pi_{n,1} \tag{6.6}$$

$$P((N,S) = (n,4) \text{ の状態で到着客が発生}) = \lambda dt \times \pi_{n,4} \tag{6.7}$$

なので式 (6.4) に式 (6.5)，(6.6)，(6.7) を代入して整理すると，

$$P(W \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(W_n \leq x) \times 2(\pi_{n,1} + \pi_{n,4})$$

なる．したがって，求める待ち時間の期待値 $E[W]$ は $\boldsymbol{e}^* = {}^t(1, \ 0, \ 0, \ 1)$ とすれば，次のように書ける．

$$E[W] = \sum_{n=0}^{\infty} n \boldsymbol{\pi}_n \boldsymbol{e}^* \times \frac{2}{\mu} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{g}(z)\boldsymbol{e}^* \Big|_{z=1} \times \frac{2}{\mu}. \tag{6.8}$$

以上より待ち時間の期待値は次の形で得られる．

$$E[W] = \frac{d}{dz}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}_0 \tilde{\boldsymbol{D}}(z) \boldsymbol{e}^*}{\rho^4 (z-\alpha)(z-\beta)(z-\bar{\beta})(z-\nu)(z-\tau)}\right)\Bigg|_{z=1} \times \frac{2}{\mu}.$$

系内客数の場合と同様に，M/M/1 型ランダム間引き入力システムの定常状態における待ち時間 W_R の期待値は

$$E[W_R] = \frac{\rho}{2-\rho} \tag{6.9}$$

となり，G/M/1 型 (1-1) 間引き入力システムの定常状態における待ち時間 W_1 の期待値 (参考文献 [1])

$$E[W_1] = \frac{2\rho^2 - 2\rho - 1 + \sqrt{4\rho+1}}{2\rho(2-\rho)} \tag{6.10}$$

で比較する．

待ち行列における平均待ち時間を「(2-2) 間引き入力システム待ち行列モデル」,「ランダム間引き入力システム待ち行列モデル」,「(1-1) 間引き入力システム待ち行列」について数値計算した結果を図 6 および表 3 に示す．待ち時間も (2-2) 間引きシステムの方がランダム間引きシステムより短くなり，(1-1) 間引きシステムよりごくわずかに長くなることが確認できる．

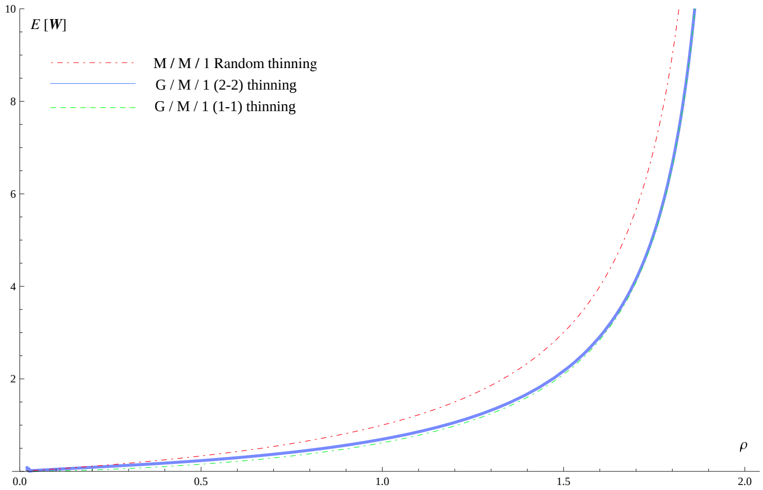

図 6: (2-2) 間引きシステム，ランダム間引きシステムおよび (1-1) 間引きシステムの待ち時間の期待値の比較

7. おわりに

本論では (m-n) 間引き到着過程を定義し，その中の (2-2) 間引き到着過程を入力過程とする G/M/1 型の待ち行列の解析をおこなった．その結果，2 つの窓口を想定した場合，到着客をランダムに振り分けるよりも，(2-2) 間引き方式で振り分けた方が待ち時間は減少することがわかった．また，(1-1) 間引き方式で振り分けたものと比較するとごくわずかな差でしか待ち時間の期待値は悪くならないこともわかった．このことからも，対称型 (m-n) 間引き到着過程を入力する場合，m が増加するといつかはランダム振り分けよりも待ち時間が大きくなることが予想されるが，それは少なくとも $m \geq 3$ の場合であることがわかった．本稿で解析した (2-2) 間引き入力待ち行列を一般の (m-n) 間引き入力待ち行列の解析に一般化することは今後の課題である．この一般化に際しては，確率母関数の特異点すなわち分母に現れる代数方程式の零点の存在範囲やその重複度の吟味が必要となる．その検討に関しては

表 3: 待ち時間の期待値の比較

ρ	$\rho/2$	$E(W_1)$ (1-1) thinning	$E(W)$ (2-2) thinning	$E(W_R)$ random thinning
0.1	0.05	0.00846304	0.0460481	0.0526316
0.2	0.1	0.0300566	0.0882093	0.111111
0.3	0.15	0.0619997	0.131344	0.176471
0.4	0.2	0.103478	0.178772	0.25
0.5	0.25	0.154701	0.232936	0.333333
0.6	0.3	0.216612	0.296017	0.428571
0.7	0.35	0.290857	0.370363	0.538462
0.8	0.4	0.379891	0.458849	0.666667
0.9	0.45	0.487253	0.565267	0.818182
1.0	0.5	0.618034	0.694864	1.0
1.1	0.55	0.779692	0.8552	1.22222
1.2	0.6	0.983499	1.05761	1.5
1.3	0.65	1.24724	1.31993	1.85714
1.4	0.7	1.60062	1.67188	2.33333
1.5	0.75	2.09717	2.16701	3.0
1.6	0.8	2.84398	2.91243	4.0
1.7	0.85	4.09103	4.15812	5.66667
1.8	0.9	6.58828	6.65406	9.0
1.9	0.95	14.0857	14.1502	19.0

本稿の方法や考え方が大きな示唆を与えることができるものと期待される．また，一般的な $(m$-$n)$ 間引き待ち行列の公比行列の陽表現を導くことも今後の課題となる．

参考文献

[1] 愛葉大介: 負荷振り分け方式の解析. 待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」(2010), 236–245.

[2] D. Gross, J.F. Shortle, J.M. Theompson, and C.M. Harris: *Fundamentals of Queueing Theory*, fourth edition (Wiley-Interscience, 2008).

[3] 高木貞治: 代数学講義 (共立出版, 2003).

付録

$\boldsymbol{\pi}_0$ の成分の一部 $\pi_{0,1}$ を参考までに掲載しておく.

$$
\begin{aligned}
\pi_{0,1} = -(&(-2+\rho)(-(-1+\alpha)(-1+\gamma)(-1+\alpha+\alpha\rho+\alpha^2\rho)(-1+\gamma+\gamma\rho+\gamma^2\rho)\\
&+\bar{\gamma}((-1+\gamma)(2+\rho)(-1+\gamma+\gamma\rho+\gamma^2\rho)+\alpha(-(2+\rho)^2+\gamma^3\rho(-4-3\rho+2\rho^2)\\
&+\gamma^2(-4-4\rho-\rho^2+\rho^3)+\gamma(8+12\rho+5\rho^2+\rho^3))+\alpha^3\rho(2+\rho+\gamma^3\rho(3+4\rho-\rho^2)\\
&+\gamma(-4-3\rho+2\rho^2)-\gamma^2(-2+\rho+6\rho^2+3\rho^3))+\alpha^2(2+\rho+\gamma(-4-4\rho-\rho^2+\rho^3)\\
&-\gamma^3\rho(-2+\rho+6\rho^2+3\rho^3)+\gamma^2(2+\rho+2\rho^2+\rho^3-\rho^4)))+\bar{\gamma}^3\rho(-(-1+\gamma)(-1+\gamma+\gamma\rho+\gamma^2\rho)\\
&+\alpha^3\rho(-1+\gamma(3+4\rho-\rho^2)+\gamma^2(-3-8\rho-4\rho^2+\rho^3)+\gamma^3(1+4\rho+5\rho^2+3\rho^3))\\
&+\alpha(2+\rho+\gamma^3\rho(3+4\rho-\rho^2)+\gamma(-4-3\rho+2\rho^2)-\gamma^2(-2+\rho+6\rho^2+3\rho^3))\\
&+\alpha^2(-1+\gamma^3\rho(-3-8\rho-4\rho^2+\rho^3)-\gamma(-2+\rho+6\rho^2+3\rho^3)+\gamma^2(-1+4\rho+14\rho^2+11\rho^3+3\rho^4)))\\
&+\bar{\gamma}^2(-(-1+\gamma)(-1+\gamma+\gamma\rho+\gamma^2\rho)+\alpha(2+\rho+\gamma(-4-4\rho-\rho^2+\rho^3)-\gamma^3\rho(-2+\rho+6\rho^2+3\rho^3)\\
&+\gamma^2(2+\rho+2\rho^2+\rho^3-\rho^4))+\alpha^3\rho(-1+\gamma^3\rho(-3-8\rho-4\rho^2+\rho^3)-\gamma(-2+\rho+6\rho^2+3\rho^3)\\
&+\gamma^2(-1+4\rho+14\rho^2+11\rho^3+3\rho^4))+\alpha^2(-1+\gamma(2+\rho+2\rho^2+\rho^3-\rho^4)\\
&+\gamma^3\rho(-1+4\rho+14\rho^2+11\rho^3+3\rho^4)+\gamma^2(-1-6\rho^2-11\rho^3-2\rho^4+\rho^5))))))\\
&/(2(-1+\bar{\gamma})\bar{\gamma}(-1+\alpha)\alpha(-1+\gamma)\gamma\rho^2(-1+\gamma+2\gamma\rho-\alpha(-1+\gamma-2\rho+4\gamma\rho+2\gamma\rho^2)\\
&+\bar{\gamma}(1+2\rho-\gamma(1+4\rho+2\rho^2)+\alpha(-1-4\rho-2\rho^2+\gamma(1+6\rho+8\rho^2+2\rho^3))))))
\end{aligned}
$$

藤原飛一
神奈川大学大学院
理学研究科
〒 259-1293 神奈川県平塚市土屋 2946
E-mail: r200970213oj@kanagawa-u.ac.jp

ABSTRACT

ANALYSIS OF (2-2)-THINNING INPUT QUEUE

Takaichi Fujiwara Issei Kino
Kanagawa University

Exact closed-form solution of (2-2)-thinning input queue with exponential single server is given in this paper. The (2-2)-thinning input queue is a special case of general (m-n)-thinning input queue. The (m-n)-thinning input process is constructed by thinning customers from a Poisson arrival process repeating the thinning procedure such that m-consecutive arrivals are picked up and next n-consecutive arrivals are discarded. Interarrival-time sequence of the (m-n)-thinning input process is not a sequence of i.i.d.r.v's. To analyse the (2-2)-thinning queue, generating function, phase-method, Rouché's theorem, and Sturm's theorem are used.