日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
Vol. 53, 2010, pp. 114–132

分散を考慮した 2 段階確率計画問題

椎名 孝之
千葉工業大学

多ヶ谷 有
キヤノン *IT* ソリューションズ

森戸 晋
早稲田大学

(受理 2009 年 8 月 7 日; 再受理 2010 年 7 月 6 日)

和文概要　確率計画法には，制約侵犯への罰金を表すリコース関数を含む費用の期待値を最小化するというアプローチがあり, Benders の分解に基づく L-shaped 法による解法が知られている．しかし，期待値基準の最適化では，リコース関数値のばらつきを考慮しておらず，大きな罰金が生じるリスクが存在する．リコース関数の分散を考慮した確率計画問題が非凸計画となることは, Ahmed(2006) により示されているが, 実際に問題を解く解法はこれまでに与えられていない．本論文では, リコース関数の下界を示し, 分枝限定法による解法を与える．

キーワード: 確率的最適化, 数理計画

1. はじめに

現実の生産計画などの問題を数理計画法によって最適化問題として定式化する場合，たとえば需要量などのような不確実要素を伴うパラメータを定数として扱うのが好ましくない場合がある．不確実な状況下での最適化を取り扱う確率計画法 [4, 7] は, Dantzig [5] の研究に起源を有する．

確率計画法で扱う代表的モデルには, 罰金に対する償還請求 (リコース) を有する確率計画問題があり, 2 段階モデルと呼ばれる場合もある．この問題に対しては，Benders [3] の分解に基づく L-shaped 法 [15] による解法が知られている．L-shaped 法は, 多期間確率計画問題 [13] や整数条件を有する確率計画問題 [14] にも応用されている．

しかし，期待値基準での最適化では，制約侵犯への罰金を表すリコース関数のばらつきを考慮しておらず，リスク中立的な立場を仮定している．よって，確率変数のとりうる値によっては，非常に大きい罰金が生じるリスクが存在する．したがって，罰金の期待値を多少悪化させても，ばらつきの小さい解を求めたい．第 2 節では，ばらつきに対するペナルティを目的関数に加えた最適化モデル [10] を考える．Mulvey, Vanderbei, and Zenios [10] らはこの問題の緩和問題を解くにとどまっていた．Ahmed [1] は，ばらつきの指標に分散を用いた場合，リコース関数の分散が第 1 段階変数の非凸関数になることを示した．第 3 節では，問題に含まれる確率変数が独立であるという仮定のもとで，区分的凸 2 次関数であるリコース関数の分散の平方完成形を示す．本論文ではこのような非凸型最適化問題の解法を示す．第 4 節では，目的関数の性質を考慮して，変数のとりうる値を制限した場合，下界を与える凸 2 次関数を求める．このような凸 2 次関数を与えることができるための条件を示し, また変数をある区間に制限すると，この凸 2 次関数が分散と一致することを示す．下界を与える凸 2 次関数を用いると，問題は凸 2 次計画問題となり，最適目的関数値に対する下界を算出することができる．変数のとりうる区間の分割によって分枝操作を行うことにより，分枝限定

法を用いることができる．第 5 節では，電気事業の最適化問題への応用例を示す．

2. 従来研究とその問題点

2.1. 期待値基準の 2 段階リコースモデル

罰金に対する償還請求を含む確率計画問題 (SPR) を次のように定義する．

$$
\begin{array}{rl}
\text{(SPR):}\ \min & c^\top x + \mathcal{Q}(x) \\
\text{subject to} & Ax = b \\
& x \geq 0 \\
& \mathcal{Q}(x) = \mathrm{E}_{\tilde{\xi}}[Q(x,\tilde{\xi})] \\
& Q(x,\xi) = \min\{q(\xi)^\top y(\xi) \mid Wy(\xi) = h(\xi) - T(\xi)x, y(\xi) \geq 0\}, \xi \in \Xi
\end{array}
$$

ただし，$m_1 \times n_1$ 次元行列 A，n_1 次元ベクトル c，m_1 次元ベクトル b は確定値として与えられている．これらに関連する n_1 次元変数ベクトル x は，第 1 段階変数と呼ばれる．l 次元ベクトル $\tilde{\xi}$ は確率変数であり，その台を Ξ とし，ξ を $\tilde{\xi}$ の実現値とする．$\tilde{\xi}$ の実現値 ξ に対し，n_2 次元ベクトル $q(\xi)$, $m_2 \times n_1$ 次元行列 $T(\xi)$, m_2 次元ベクトル $h(\xi)$ の値が定まる．n_2 次元変数ベクトル $y(\xi)$ は，第 2 段階変数と呼ばれる．$m_2 \times n_2$ 次元行列 W は，リコース行列と呼ばれる．リコース関数 $Q(x,\xi)$ を定義する線形計画問題は第 2 段階問題あるいはリコース問題と呼ばれ，関数 $\mathcal{Q}(x)$ はリコース関数の期待値を表す．

決定の流れは次のようになる．まず，確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値が判明する前に第 1 段階として変数 x を決定し，その後に確率変数の実現値 ξ が判明する．確率変数 $\tilde{\xi}$ の変動に応じて，制約条件 $Wy(\xi) = h(\xi) - T(\xi)x$ を満足させるように第 2 段階変数 $y(\xi)(\geq 0)$ を決定する．$q(\xi)$ は第 2 段階変数 $y(\xi)$ に対する罰金である．第 1 段階で決定 x を行い，ξ が与えられたときの罰金を表すリコース関数 $Q(x,\xi)$ の値は，第 2 段階の線形計画問題を解くことによって求められる．問題 (SPR) の目的関数は，第 1 段階で生じる費用 $c^\top x$ とリコース関数の期待値 $\mathcal{Q}(x) = E_{\tilde{\xi}}[Q(x,\tilde{\xi})]$ との総和となる．確率変数 $\tilde{\xi}$ が有限な離散分布に従うと仮定し，そのとりうる値をシナリオと呼ぶ．シナリオの集合を $\Xi = \{\xi^1,\ldots,\xi^S\}$ とする．確率変数 $\tilde{\xi}$ が $\tilde{\xi} = \xi^s$ となる確率を $p^s = \mathrm{Prob}(\tilde{\xi} = \xi^s)$, $s = 1,\ldots,S$ とする．このとき，問題 (SPR) は次の (SPR') のように表される．

$$
\begin{array}{rl}
\text{(SPR'):}\ \min & c^\top x + \displaystyle\sum_{s=1}^{S} p^s Q(x,\xi^s) \\
\text{subject to} & Ax = b \\
& x \geq 0 \\
& Q(x,\xi^s) = \min\{q(\xi^s)^\top y(\xi^s) \mid Wy(\xi^s) = h(\xi^s) - T(\xi^s)x, y(\xi^s) \geq 0\}, \\
& \quad s = 1,\ldots,S
\end{array}
$$

第 2 段階変数 $y(\xi^s)$ を y^s，リコース問題に含まれる $q(\xi^s), T(\xi^s), h(\xi^s)$ をそれぞれ，q^s, T^s, h^s，目的関数に含まれるリコース関数 $Q(x,\xi^s)$ を $q^{s\top} y^s$ へと置き換えることで，(SPR') は次の (DEP-SPR) へ再定式化できる．

$$\begin{array}{ll} \text{(DEP-SPR): } \min_{x,y^1,\cdots,y^s} & c^\top x + \sum_{s=1}^{S} p^s q^s y^s \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & Wy^s = h^s - T^s x, s = 1,\cdots,S \\ & x \geq 0, y^s \geq 0, s = 1,\cdots,S \end{array}$$

(SPR') から (DEP-SPR) への変換は等価であり，(DEP-SPR) の最適解 $x^*, y^{1*}, \cdots, y^{S*}$ において，$y^{s*}, s = 1, \ldots, S$ はリコース問題 $Q(x^*, \xi^s) = \min\{q(\xi^s)^\top y(\xi^s) \mid Wy(\xi^s) = h(\xi^s) - T(\xi^s)x, y(\xi^s) \geq 0\}$ の最適解となる．(DEP-SPR) は (SPR') の等価確定問題とよばれる．

2.2. ばらつきを考慮した 2 段階確率計画モデル

リコース費用のリスクを考慮したモデルとして，Mulvey, Vanderbei, and Zenios [10] は，リコース関数値のばらつきをペナルティとして目的関数に含めたモデルを示した．ばらつきの値に正の値のパラメータ $\lambda(>0)$ を掛けて，目的関数に加える．このことにより，λ の値によっては，ばらつきが抑制されることが期待される．ばらつきを考慮した 2 段階確率計画モデル (SPR-V) を以下に示す．

$$\begin{array}{ll} \text{(SPR-V): } \min_{x} & c^\top x + \sum_{s=1}^{S} p^s Q(x,\xi^s) + \lambda f(Q(x,\xi^1),\ldots,Q(x,\xi^S)) \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \\ & Q(x,\xi^s) = \min_{y^s} \{{q^s}^\top y^s | Wy^s = h^s - T^s x, y^s \geq 0\}, s = 1,\cdots,S \end{array}$$

$f : R^S \to R$ はリコース費用のばらつきを表す関数である．ばらつきを示すリスク尺度として，分散，平均絶対偏差，上方半分散などを考えることができる．このモデルは，電力供給計画 [9]，構造物の最適設計 [10]，資産管理 [2], 通信ネットワーク設計 [8] などに応用されている．$Q(x, \xi^s)$ を ${q^s}^\top y^s$ と置き換えると，(SPR-V) は次の緩和問題 (RSPR-V) へ変換される．

$$\begin{array}{ll} \text{(RSPR-V): } \min_{x,y^1,\cdots,y^S} & c^\top x + \sum_{s=1}^{S} p^s {q^s}^\top y^s + \lambda f({q^1}^\top y^1,\cdots,{q^S}^\top y^S) \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & Wy^s = h^s - T^s x,\ s = 1,\cdots,S \\ & x \geq 0, y^s \geq 0,\ s = 1,\cdots,S \end{array}$$

2 段階費用の期待値のみを含む従来の確率計画モデルとは異なり，ばらつきを考慮したモデルの場合，(SPR-V) と (RSPR-V) は等価ではなく，(RSPR-V) は (SPR-V) の緩和問題となる．(RSPR-V) の最適解を $x^*, y^{1*}, \cdots, y^{S*}$ とすると，y^{s*} が，リコース問題 $Q(x^*, \xi^s) = \min_{y^s} \{{q^s}^\top y^s | Wy^s = h^s - T^s x^*, y^s \geq 0\}$ の最適解にならない可能性がある．

解が一致しないのは，ばらつきを表す関数 f によっては，リコース問題の目的関数値を増やすことがばらつきの抑制につながる場合があるためである．つまり，リコース問題で最小費用の解ではなく，あえて費用の高い解にしたほうがばらつきが抑えられ，その結果 (RSPR-V) の全体としての目的関数はより改善されるということが起き，$Q(x^*, \xi^s) = \min_{y^s} \{{q^s}^\top y^s | Wy^s = h^s - T^s x^*, y^s \geq 0\}$ の最適解と一致しないということが起こり得る．

関数 f は劣微分可能であると仮定し，f の $z = (z^1, \cdots, z^S)$ における劣微分を $\partial f(z)$ と定義する．劣微分を考えるのは, 平均絶対偏差や上方半分散を考慮するためである．与えられた x, λ に対し，期待値基準の第 2 段階問題の目的関数にリコース関数のばらつきを加えた以下の問題 (2.1) を考え，その最適値を x の関数 $\phi_\lambda(x)$ とする．

$$\phi_\lambda(x) = \min_{y^1,\cdots,y^S} \left\{ \sum_{s=1}^{S} p^s q^{s\top} y^s + \lambda f(q^{1\top} y^1, \ldots, q^{S\top} y^S) \middle| W y^s = h^s - T^s x, y^s \geq 0, s = 1, \cdots, S \right\} \tag{2.1}$$

以下の定理 2.1 が成り立つ.

定理 2.1 (Takriti and Ahmed [12]) 関数 f が劣微分可能であるとする. λ, x が与えられており, (2.1) の最適解を $y^s, s = 1, \cdots, S$, また $q^{s\top} y^s = z^s, s = 1, \ldots, S$ とする. このとき, 以下の (a), (b) の条件を満たす f の $(z^1, \cdots, z^S)$ における劣勾配 $g = (g^1, \cdots, g^S) \in \partial f(z^1, \cdots, z^S)$ が存在するとき, またそのときに限って, $y^1, \cdots, y^S$ は (2.1) の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす.

(a) $(p^s + \lambda g^s) > 0$ のとき, y^s は以下のリコース問題の最適解である.

$$\min_{y^s} \left\{ q^{s\top} y^s | W y^s = h^s - T^s x, y^s \geq 0 \right\} \tag{2.2}$$

(b) $(p^s + \lambda g^s) < 0$ のとき, y^s はリコース問題ではなく以下の最大化問題の最適解である.

$$\max_{y^s} \left\{ q^{s\top} y^s | W y^s = h^s - T^s x, y^s \geq 0 \right\} \tag{2.3}$$

定理 2.1 から, 問題 (2.1) の最適解 $(y^{1*}, \ldots, y^{S*})$ において, $p^s + \lambda g^s$ が負になる場合は, y^{s*} はリコース問題 (2.2) の最適解ではなく, 最大化問題 (2.3) の最適解となるため, (RSPR-V) の最適解は, 必ずしもリコース問題の最適解とはなるとはいえない. $p^s + \lambda g^s$ の符号が常に正であれば, (RSPR-V) の最適解がリコース問題の最適解となる. $p^s + \lambda g^s > 0$ という条件が λ の値に依存しないためには, g の要素が全て非負であればよい. すなわち, f が $q^\top y$ の非減少関数であることが, (RSPR-V) の最適解がリコース問題の最適解となるための十分条件である.

定理 2.2 (Takriti and Ahmed [12]) $\lambda \geq 0$ が与えられており, f を非減少関数とする. このとき, 問題 (SPR-V) と (RSPR-V) は等価である.

Takriti and Ahmed [12] は f が非減少となる関数として, 目標費用 R^* を設定し, その費用の超過分を 2 乗したものの分散 (上方半分散) $\sum_{s=1}^{S} p^s [Q(x, \xi^s) - R^*]_+^2$ (ただし $[a]_+ = \max\{a, 0\}$ である) を提案した. しかし, リスク尺度として適切な目標値 R^* を常に設定できるとは限らない. そのため, 以下では本来の分散を用い, 厳密解を算出する解法を示す. ばらつきを表す $f(q^{1\top} y^1, \ldots, q^{S\top} y^S)$ として分散 $\mathrm{Var}[q(\xi)^\top y(\xi)]$ を考えると単調非減少関数でないため, 定理 2.2 より (RSPR-V) の最適解が第 2 段階問題の最適解とはならない場合がありうる.

3. 分散を考慮した 2 段階モデル

3.1. 単純リコース問題

本論文では, 特に単純リコース型の確率計画問題に対して, 分散を考慮した 2 段階モデルを考える. 問題 (SPR) において, リコース問題に含まれる目的関数係数と 1 段階変数に関する制約行列が確率変数 $\tilde{\xi}$ によらず $q(\xi) = q(> 0), T(\xi) = T$ でありかつ, $h(\xi) = h$ でありさらにリコース行列 W が条件 $W = (I, -I)$ を満たす場合を考える. このとき, 確率変数 $\tilde{\xi}$ は m_2 次元ベクトルであり, リコース問題に含まれる第 2 段階変数の個数は $n_2 = 2 \times m_2$ となることに注意されたい. 第 2 段階変数ベクトル $y(\xi)$ を $y(\xi)^\top = (y(\xi)^{+\top}, y(\xi)^{-\top})$ とすると, 非負条件 $y(\xi) \geq 0$ は $y(\xi)^+ \geq 0, y(\xi)^- \geq 0$ となる. リコース問題の目的関数の係数ベクトル

$q > 0$ は $q^\top = (q^{+\top}, q^{-\top})$ と表される．問題 (SPR) を次の単純リコース型の問題 (SPRS) と表すことができる．

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\text{(SPRS):}} \\
\min & c^\top x + \mathcal{Q}(x) \\
\text{subject to} & Ax = b \\
& x \geq 0 \\
& \mathcal{Q}(x) = \mathrm{E}_{\tilde{\xi}}[Q(x, \tilde{\xi})] \\
& Q(x, \xi) \\
& \quad = \min\{q^{+\top} y(\xi)^+ + q^{-\top} y(\xi)^- \mid y(\xi)^+ - y(\xi)^- = \xi - Tx, y(\xi)^+, y(\xi)^- \geq 0\}, \\
& \quad\ \xi \in \Xi
\end{array}
$$

特に，第 1 段階の決定から生じる Tx に対する ξ の超過量のみを問題にする場合，リコース関数は $Q(x, \xi) = \min\{q^{+\top} y(\xi)^+ \mid y(\xi)^+ \geq \xi - Tx, y(\xi)^+ \geq 0\}$ と書くことができる．この場合，確率変数 $\tilde{\xi}$ と第 1 段階の決定 Tx の大小関係のみが問題となり，$q^+ > 0$ より $\xi - Tx < 0$ の場合は $y(\xi)^+ = 0$，$\xi - Tx \geq 0$ の場合は $y(\xi)^+ = \xi - Tx$ が第 2 段階問題の最適解となる．ここに新たな変数 $\chi = Tx$ を導入する．変数 χ は入札変数と呼ばれ，リコース関数 $Q(x, \xi)$ は，入札変数 χ を変数とする関数 $\psi(\chi, \xi)$ の形式で表すことができる．以下では，第 2 段階変数として $y(\xi)^+$ のみを考えるため，$y(\xi)^+$ を $y(\xi)$ と置き換える．

$$
Q(x, \xi) \;=\; \psi(\chi, \xi) = \min\{q^\top y(\xi) \mid y(\xi) \geq \xi - \chi, y(\xi) \geq 0\} \tag{3.1}
$$

同様に，リコース関数の期待値 $\mathcal{Q}(x) = \mathrm{E}_{\tilde{\xi}}[Q(x, \tilde{\xi})]$ も入札変数 χ を変数とする関数 $\Psi(\chi)$ として表すことができる．また，入札変数 χ を変数とするリコース関数 $\psi(\chi, \xi)$(3.1) が $\chi^\top = (\chi_1, \ldots, \chi_{m_2})^\top$ の成分ごとに $\psi_i(\chi_i, \xi_i)$ へと分離可能であることは，以下のように明らかである．

$$
\begin{aligned}
\psi(\chi, \xi) &= \min\{q^\top y(\xi) \mid y(\xi) \geq \xi - \chi, y(\xi) \geq 0\} \\
&= \sum_{i=1}^{m_2} \min\{q_i y(\xi)_i \mid y(\xi)_i \geq \xi_i - \chi_i, y(\xi)_i \geq 0\} \\
&= \sum_{i=1}^{m_2} \psi_i(\chi_i, \xi_i)
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

次の仮定をおく．

仮定 3.1 確率変数ベクトル $\tilde{\xi}$ の各成分 $\tilde{\xi}_i, i = 1, \ldots, m_2$ は有限な離散分布に従い，互いに独立であるものとする．

仮定 3.2 $\tilde{\xi}_i = \xi_i^{s_i}$ となる確率を $\mathrm{Prob}(\tilde{\xi}_i = \xi_i^{s_i}) = p_i^{s_i} > 0, s_i = 1, \ldots, |\Xi_i|$ とする．確率変数 $\tilde{\xi}_i$ のとりうる値は全て正であり，上に有界である．すなわち $0 < \xi_i^1, \ldots, \xi_i^{|\Xi_i|} < \infty$ とする．

上記の仮定 3.2 において，確率変数のとりうる値が正であることは，必ずしも必要ではないが，第 4 節の解法アルゴリズムの記述が簡明になるため導入した．確率変数ベクトル $\tilde{\xi}$ の台 Ξ は $\Xi = \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_{m_2}$ と示すことができる．仮定 3.1，3.2 より，入札変数 χ を変数とするリコース関数の期待値 $\Psi(\chi)$ も $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_{m_2})^\top$ の成分ごとに分離可能であることが示される．

$$
\Psi(\chi) \;=\; \sum_{s=1}^{S} p^s \psi(\chi, \xi^s)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s_1=1}^{|\Xi_1|} \cdots \sum_{s_{m_2}=1}^{|\Xi_{m_2}|} p_1^{s_1} \cdots p_{m_2}^{s_{m_2}} \sum_{i=1}^{m_2} \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_2} (\sum_{s_1=1}^{|\Xi_1|} \cdots \sum_{s_{m_2}=1}^{|\Xi_{m_2}|} p_i^{s_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m_2} p_j^{s_j}) \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{s_i=1}^{|\Xi_i|} p_i^{s_i} \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{m_2} \Psi_i(\chi_i) \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

以上の議論より，問題 (SPRS) は仮定 3.1，3.2 の下で Tx に対する ξ の超過量のみを問題にする場合，問題 (SPRST) へと変換することができる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SPRST): min} & c^\top x + \Psi(\chi) \\
\text{subject to} & Ax = b \\
& x \geq 0 \\
& \chi = Tx \\
& \Psi(\chi) = \sum_{i=1}^{m_2} \Psi_i(\chi_i) \\
& \Psi_i(\chi_i) = \sum_{s_i=1}^{|\Xi_i|} p_i^{s_i} \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}), i = 1, \ldots, m_2 \\
& \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}) = \min\{q_i y(\xi_i^{s_i})_i \mid y(\xi_i^{s_i})_i \geq \xi_i^{s_i} - \chi_i, y(\xi_i^{s_i})_i, \geq 0\}, \\
& \quad s_i = 1, \ldots, |\Xi_i|, i = 1, \ldots, m_2
\end{array}
$$

3.2. 分散を考慮した場合の定式化

問題 (SPR) より導かれた問題 (SPRST) を考える．入札変数 χ を変数とするリコース関数 $\psi(\chi, \xi)$ は，分離可能であり $\psi(\chi, \xi) = \sum_{i=1}^{m_2} \psi_i(\chi_i, \xi_i)$ であるため，$\psi_i(\chi_i, \xi_i), i = 1, \ldots, m_2$ の分散を目的関数に含む問題 (SPRST-V) を次のように定義する．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(SPRST-V): min} & c^\top x + \sum_{i=1}^{m_2} \Psi_i(\chi_i) + \lambda \sum_{i=1}^{m_2} \mathrm{Var}[\psi_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] \\
\text{subject to} & Ax = b \\
& x \geq 0 \\
& \chi = Tx \\
& \Psi_i(\chi_i) = \sum_{s_i=1}^{|\Xi_i|} p_i^{s_i} \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}), i = 1, \ldots, m_2 \\
& \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}) = \min\{q_i y(\xi^{s_i})_i \mid y(\xi_i^{s_i})_i \geq \xi_i^{s_i} - \chi_i, y(\xi_i^{s_i})_i, \geq 0\}, \\
& \quad s_i = 1, \ldots, |\Xi_i|, i = 1, \ldots, m_2
\end{array}
$$

前と同様に，問題 (SPRST-V) の凸 2 次計画緩和問題 (RSPRST-V) を次のように定義することができる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(RSPRST-V):} & \min & c^\top x + \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{s_i=1}^{|\Xi_i|} p_i^{s_i} q_i y(\xi_i^{s_i})_i + \sum_{i=1}^{m_2} \mathrm{Var}[q_i y(\tilde{\xi}_i)_i] \\
& \text{subject to} & Ax = b \\
& & x \geq 0 \\
& & \chi = Tx \\
& & y(\xi_i^{s_i})_i \geq \xi_i^{s_i} - \chi_i, s_i = 1, \ldots, |\Xi_i|, i = 1, \ldots, m_2 \\
& & y(\xi_i^{s_i})_i \geq 0, s_i = 1, \ldots, |\Xi_i|, i = 1, \ldots, m_2
\end{array}
$$

3.3. リコース関数の期待値と分散

Ahmed [1] は，ばらつきの指標に分散を用いた場合，リコース関数の分散が第 1 段階変数の非凸関数になることを示した．本節では，確率変数に対して第 1 段階変数の値が小さくなる場合のみを考え，リコース関数の分散が区分的凸 2 次関数となる場合にその平方完成形を示す．入札変数 χ_i と確率変数 $\tilde{\xi}_i$ の実現値 ξ_i が与えられたリコース関数 $\psi_i(\chi_i, \xi_i) = \min\{q_i y(\xi)_i \mid y(\xi_i)_i \geq \xi_i - \chi_i, y(\xi_i)_i \geq 0\}, i = 1, \ldots, m_2$ の期待値と分散を考える．まず $\psi_i(\chi_i, \xi_i)$ において，$q_i = 1$ とした (3.4) を考える．

$$
\bar{\psi}_i(\chi_i, \xi_i^s) = \min\{y(\xi^s)_i \mid y(\xi_i^s)_i \geq \xi_i^s - \chi_i, y(\xi_i^s)_i \geq 0\}, s = 1, \ldots, |\Xi_i|, i = 1, \ldots, m_2 \quad (3.4)
$$

第 2 段階問題の目的関数の係数が正である (1 と定めた) ため，リコース問題 (3.4) の最適解 $y(\xi_i^s)_i^*$ は以下のようになる．

$$
y(\xi_i^s)_i^* = \begin{cases} \xi_i^s - \chi_i & \xi_i^s - \chi_i \geq 0 \text{ の場合} \\ 0 & \xi_i^s - \chi_i < 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (3.5)
$$

問題 (3.4) は，確率計画問題 (SPRST) および (SPRST-V) において，需要に相当する確率変数 ξ_s に対して, 入札変数 χ_i の値を供給と考えると，需要に対する供給の不足分を第 2 段階変数によって補うものと解釈できる．リコース関数 (3.4) の期待値は，次のように計算できる．

$$
\mathrm{E}_{\tilde{\xi}_i}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = \sum_{s=1}^{|\Xi_i|} p_i^s y(\xi_i^s)_i^* = \sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s (\xi_i^s - \chi_i) \quad (3.6)
$$

補題 3.1 リコース関数 $\bar{\psi}_i(\chi_i, \xi_i)$ の分散は次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] &= \sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s \left(1 - \sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s\right) \left(\chi_i - \frac{\sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s \xi_i^s}{\sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s}\right)^2 \\
&+ \sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s (\xi_i^s)^2 - \frac{\left(\sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s \xi_i^s\right)^2}{\sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s}
\end{aligned}
$$

証明

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] \\
= & \sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s \left(\xi_i^s - \chi_i\right)^2 - \left(\sum_{\{s|\xi_i^s \geq \chi_i\}} p_i^s \left(\xi_i^s - \chi_i\right)\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \chi_i^2 - 2\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \xi_i^s \chi_i + \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s (\xi_i^s)^2 - \Bigg(\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} (p_i^s)^2 \chi_i^2 + \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} (p_i^s)^2 (\xi_i^s)^2 \\
&\quad + \sum_{\{s_1|\xi_i^{s_1} \ge \chi_i\}} \sum_{\{s_2|\xi_i^{s_2} \ge \chi_i, s_2 \ne s_1\}} p_i^{s_1} p_i^{s_2} \xi_i^{s_1} \xi_i^{s_2} - 2 \sum_{\{s_1|\xi_i^{s_1} \ge \chi_i\}} \sum_{\{s_2|\xi_i^{s_2} \ge \chi_i, s_2 \ne s_1\}} p_i^{s_1} p_i^{s_2} \xi_i^{s_1} \chi_i \\
&\quad + \sum_{\{s_1|\xi_i^{s_1} \ge \chi_i\}} \sum_{\{s_2|\xi_i^{s_2} \ge \chi_i, s_2 \ne s_1\}} p_i^{s_1} p_i^{s_2} \chi_i^2 - 2 \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} (p_i^s)^2 \xi_i^s \chi_i \Bigg) \\
&= \left\{ \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s - \left(\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \right)^2 \right\} \chi_i^2 - 2 \Bigg(\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \xi_i^s - \sum_{\{s_1|\xi_i^{s_1} \ge \chi_i\}} \sum_{\{s_2|\xi_i^{s_2} \ge \chi_i, s_2 \ne s_1\}} p_i^{s_1} p_i^{s_2} \xi_i^{s_1} \\
&\quad - \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} (p_i^s)^2 \xi_i^s \Bigg) \chi_i + \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s (\xi_i^s)^2 - \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} (p_i^s)^2 (\xi_i^s)^2 \\
&\quad - \sum_{\{s_1|\xi_i^{s_1} \ge \chi_i\}} \sum_{\{s_2|\xi_i^{s_2} \ge \chi_i, s_2 \ne s_1\}} p_i^{s_1} p_i^{s_2} \xi_i^{s_1} \xi_i^{s_2} \\
&= \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \left(1 - \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \right) \chi_i^2 - 2 \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \xi_i^s \left(1 - \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \right) \chi_i + \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s (\xi_i^s)^2 \\
&\quad - \left(\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \xi_i^s \right)^2 \\
&= \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \left(1 - \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \right) \left(\chi_i - \frac{\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \xi_i^s}{\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s} \right)^2 + \sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s (\xi_i^s)^2 - \frac{\left(\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s \xi_i^s \right)^2}{\sum_{\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}} p_i^s}
\end{aligned}
$$

補題3.1より，$\mathrm{Var}[\psi_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = (q_i)^2 \mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ となり，$\mathrm{E}_{\tilde{\xi}_i}[\psi_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = q_i \mathrm{E}_{\tilde{\xi}_i}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ である．また, 確率変数 $\tilde{\xi}_i$ のとりうる値 $\xi_i^s (s = 1, \ldots, |\Xi_i|)$ について，シナリオの添字を付け替えることによって，$\xi_i^1 < \xi_i^2 < \cdots < \xi_i^{|\Xi_i|}$ が成立するものとする．これより，$\xi_i^s \ge \chi_i$ を満たすシナリオの集合 $\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\}$ が固定される範囲すなわち $\chi_i \in (\xi_i^s, \xi_i^{s+1}], s = 1, \ldots, |\Xi_i| - 1$ において，リコース関数 $\bar{\psi}_i(\chi_i, \xi_i)$ の分散 $\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ は χ_i の凸 2 次関数となることがわかる．続いて $\chi_i \in [0, \infty)$ における，$\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ の形状を調べる．

- $\chi_i \in [0, \xi_i^1]$ の場合，$\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = \mathrm{Var}[\tilde{\xi}_i - \chi_i] = \mathrm{Var}[\tilde{\xi}_i]$(定数) となる．
- $\chi_i \in (\xi_i^s, \xi_i^{s+1}], s = 1, \ldots, |\Xi_i| - 1$ の場合，$\{s|\xi_i^s \ge \chi_i\} = \{j|s + 1 \le j \le |\Xi_i|\}$ であるため，$a_i^s := \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \left(1 - \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j\right)$, $g_i^s := \frac{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j}$, $h_i^s := \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 - \frac{\left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)^2}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j}$ とおくと，$\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = a_i^s (\chi_i - g_i^s)^2 + h_i^s$ は凸 2 次関数である．
- $\chi_i \in (\xi_i^{|\Xi_i|}, \infty)$ の場合，$\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = 0$ となる．

これより $\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ を区分的に以下のように定める．

$$
\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = \begin{cases} V_i^0(\chi_i) := \mathrm{Var}[\tilde{\xi}_i] & \chi_i \in [0, \xi_i^1] \text{ の場合} \\ V_i^s(\chi_i) := a_i^s (\chi_i - g_i^s)^2 + h_i^s & \chi_i \in (\xi_i^s, \xi_i^{s+1}], s = 1, \ldots, |\Xi_i| - 1 \text{ の場合} \\ V_i^{|\Xi_i|}(\chi_i) := 0 & \chi_i \in (\xi_i^{|\Xi_i|}, \infty) \text{ の場合} \end{cases} \tag{3.7}
$$

$\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ の連続性に関しては，次の補題が成り立つ．

補題 3.2 $\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ は $\chi_i \in [0, \infty)$ において連続である.

証明 区間 $\chi_i \in (\xi_i^{s-1}, \xi_i^s], s = 2, \ldots, |\Xi_i|$ における右端の値 $V_i^{s-1}(\xi_i^s)$ を求める.

$$
\begin{aligned}
& V_i^{s-1}(\xi_i^s) \\
= & \sum_{j=s}^{|\Xi_i|} p_i^j \left(1 - \sum_{j=s}^{|\Xi_i|} p_i^j\right) \left(\xi_i^s - \frac{\sum_{j=s}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j}{\sum_{j=s}^{|\Xi_i|} p_i^j}\right)^2 + \sum_{j=s}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 - \frac{\left(\sum_{j=s}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)^2}{\sum_{j=s}^{|\Xi_i|} p_i^j} \\
= & \left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j + p_i^s\right) \left(1 - \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j - p_i^s\right) (\xi_i^s)^2 - 2\xi_i^s \left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j + p_i^s \xi_i^s\right) \left(1 - \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j - p_i^s\right) \\
& + \left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 + p_i^s (\xi_i^s)^2\right) - \left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j + p_i^s \xi_i^s\right)^2 \\
= & \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \left(1 - \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j\right) (\xi_i^s)^2 - 2\xi_i^s \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j) \left(1 - \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j\right) + \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 - \left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)^2
\end{aligned}
$$

$s = |\Xi_i|$ の場合，$\{j \mid |\Xi_i|+1 \le j \le |\Xi_i|\}$ を満たすシナリオ j は存在しないため，$V_i^{|\Xi_i|-1}(\xi_i^{|\Xi_i|}) = 0$ となり，これは $V_i^{|\Xi_i|}(\chi_i)$ の $\chi_i \in (\xi_i^{|\Xi_i|}, \infty)$ における値と等しい．次に区間 $\chi_i \in (\xi_i^s, \xi_i^{s+1}], s = 1, \ldots, |\Xi_i| - 1$ における $V_i^s(\chi_i)$ の ξ_i^s への右極限の値を求める.

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\Delta \to +0} V_i^s(\xi_i^s + \Delta) \\
= & \lim_{\Delta \to 0} \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \left(1 - \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j\right) \left\{(\xi_i^s + \Delta) - \frac{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j}\right\}^2 + \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 - \frac{\left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)^2}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j} \\
= & \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \left(1 - \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j\right) (\xi_i^s)^2 - 2\xi_i^s \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j) \left(1 - \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j\right) + \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 - \left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)^2
\end{aligned}
$$

$s = 1$ の場合，$\lim_{\Delta \to +0} V_i^1(\xi_i^1 + \Delta) = \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 - \left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)^2 = \mathrm{Var}[\tilde{\xi}_i] = V_i^0(\chi)$ となる．$V_i^{s-1}(\xi_i^s) = \lim_{\Delta \to +0} V_i^s(\xi_i^s + \Delta), s = 1, \ldots, |\Xi_i|$ となり，両者が一致することから連続であることが示された．次の系 3.1 が成り立つ.

系 3.1 $g_i^s < g_i^{s+1}, h_i^s \ge h_i^{s+1}, s = 0, \ldots, |\Xi_i| - 2$ が成立する.

証明

$$
\begin{aligned}
g_i^{s+1} - g_i^s &= \frac{\sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j}{\sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j} - \frac{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j} = \frac{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j - \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j} \\
&= \frac{p_i^{s+1} \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j - p_i^{s+1} \xi_i^{s+1} \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j} = \frac{p_i^{s+1} \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j - \xi_i^{s+1})}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j} > 0 \\
h_i^s - h_i^{s+1} &= \sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 - \frac{\left(\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)^2}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j} - \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j (\xi_i^j)^2 + \frac{\left(\sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)^2}{\sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j} \\
&= \frac{p_i^{s+1} \left(\xi_i^{s+1} \left(\sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j\right)^2 - \left(\sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j \xi_i^j\right)\right)^2}{\sum_{j=s+1}^{|\Xi_i|} p_i^j \sum_{j=s+2}^{|\Xi_i|} p_i^j} \\
&\ge 0
\end{aligned}
$$

例 3.1 問題 (SPRST-V) と (RSPRST-V) において，制約 $Ax = b$ を含まず，$T = I$ である場合を考える．第 1 段階変数 x は消去され，入札変数 χ と第 2 段階変数を有する問題に変換される．第 1 段階費用を $c = 1$，確率変数のとりうる値を $\Xi = \{2, 4, 6, 8\}$, $p^1 = p^2 = p^3 = p^4 = \frac{1}{4}$，第 2 段階費用を $q = 0.5$, $\lambda = 4$ とする．$\mathrm{E}[\bar{\psi}(\chi, \tilde{\xi})]$ と $\mathrm{Var}[\bar{\psi}(\chi, \tilde{\xi})]$ のグラフを描くと，次の図 1 のようになる．期待値は区分的線形凸関数である．分散項は，区分的凸 2 次関数であるが，χ の定義域全体 $[0, \infty)$ では非凸関数になる．Ξ に含まれる要素 2，4，6，8 の値を境界として分割してみると，それぞれの区間で凸 2 次関数となることがわかる．問題 (SPRST-V) と (RSPRST-V) それぞれの目的関数を χ の関数として図 2 に表す．(SPRST-V) の目的関数が非凸関数であるのにに対し，(RSPRST-V) の目的関数は凸であり，(SPRST-V) の目的関数に対する下界を与えている．(RSPRST-V) の目的関数は，$\chi < 7$ では (SPRST-V) の目的関数値と一致しない．

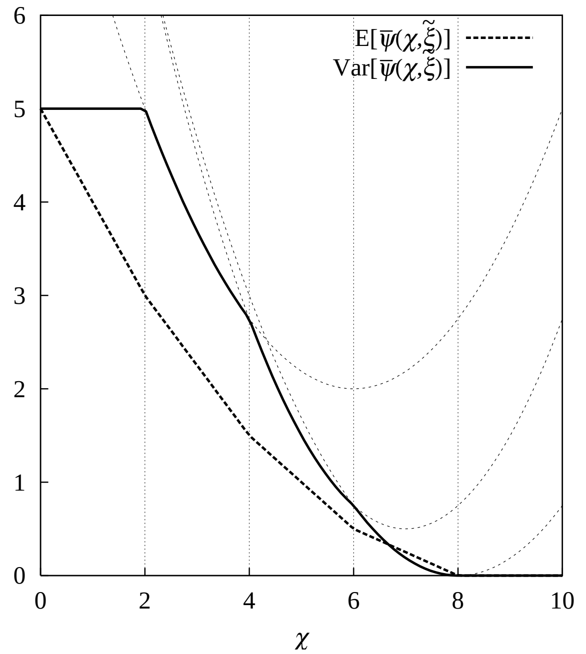

図 1: リコース関数の期待値 $\mathrm{E}[\bar{\psi}(\chi, \tilde{\xi})]$ と分散 $\mathrm{Var}[\bar{\psi}(\chi, \tilde{\xi})]$

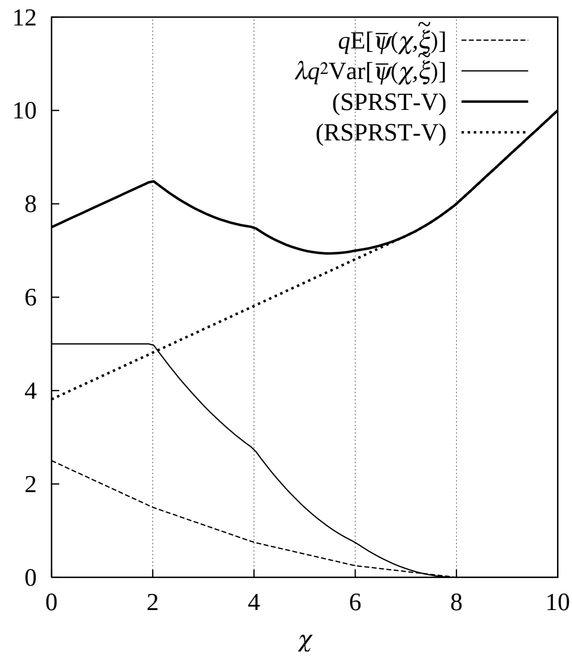

図 2: 問題 (SPRST-V) と (RSPRST-V) の目的関数値

4. 入札変数の定義域の分割による分枝限定法

4.1. 下界を与える関数

例 3.1 より，(SPRST-V) の目的関数は一般的には凸関数でないが，変数の取りうる区間を制限することによって，元問題を複数の凸 2 次計画問題へと分割することができる．入札変数 $\chi_i, i = 1, \ldots, m_2$ がとりうる値について $\xi_i^0 = 0, \xi_i^{|\Xi_i|+1} = +\infty$ と定め，区間 $\chi_i \in [\xi_i^s, \xi_i^{s+1}], s = 0, \ldots, |\Xi_i|$ を全て列挙し，それぞれの区間で $\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = V_i^s(\chi_i)$ と与えれば，(SPRST-V) は $\chi_i \in [\xi_i^s, \xi_i^{s+1}]$ において凸 2 次計画となる．従って，全ての区間 $\chi_i \in [\xi_i^s, \xi_i^{s+1}], s = 1, \ldots, |\xi_i|, i = 1, \ldots, m_2$ において (SPRST-V) を解いて解を求め，比較することによって厳密解を求めることが可能である．しかし，このような全列挙によると，列挙すべき区間の総数は $\prod_{i=1}^{m_2}(|\Xi_i| + 1)$ となるため，計算の手間が非常に大きい．そこで，入札変数のとりうる

定義域の分割による分枝限定法を開発することによって，全列挙に比べ少ない回数の子問題を解くことにより，元問題の最適解を求めることができることを示す．

分枝限定法における分枝操作により，入札変数 χ_i がとりうる定義域が $\chi_i \in [\xi_i^j, \xi_i^{k+1}], j \leq k$ に限定された子問題を解く．この場合，(SPRST-V) における分散項は $\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = V_i^s(\chi_i), \chi_i \in [\xi_i^s, \xi_i^{s+1}], s = j, \ldots, k$ となり，区間 $\chi_i \in [\xi_i^s, \xi_i^{s+1}]$ では χ_i の凸 2 次関数であるが，全体として非凸関数となる．そのため，(SPRST-V) の $\chi_i \in [\xi_i^j, \xi_i^{k+1}], j \leq k$ における緩和問題を求める．緩和問題の条件としては，元問題の実行可能解が緩和問題の実行可能解となることと，緩和問題の目的関数が元問題の目的関数の下界を与えることが挙げられる．よって，$\chi_i \in [\xi_i^j, \xi_i^{k+1}], j \leq k$ において，$\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = V_i^s(\chi_i), \chi_i \in [\xi_i^s, \xi_i^{s+1}], s = j, \ldots, k$ の下界を与える関数を求める．関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ を次のように定義する．

- 関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ は点 $(\xi_i^j, V_i^j(\xi_i^j)), (g_i^k, V_i^k(g_i^k))$, を通る凸 2 次関数である．
- 関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ の軸は $\chi_i = g_i^j$ である．

関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ の χ_i^2 に対する係数を $\bar{a}_i^{j,k+1}$，定数項を $\bar{h}_i^{j,k+1}$ とすると，$L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ は次のように表すことができる．

$$L_i^{j,k+1}(\chi_i) = \bar{a}_i^{j,k+1}(\chi_i - g_i^j)^2 + \bar{h}_i^{j,k+1} \tag{4.1}$$

係数 $\bar{a}_i^{j,k+1}$ と定数項 $\bar{h}_i^{j,k+1}$ を以下のように定める．関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ は点 $(\xi_i^j, V_i^j(\xi_i^j)), (g_i^k, V_i^k(g_i^k))$ を通るため，(4.2), (4.3) を満たす．

$$V_i^j(\xi_i^j) = \bar{a}_i^{j,k+1}(\xi_i^j - g_i^j)^2 + \bar{h}_i^{j,k+1} \tag{4.2}$$

$$V_i^k(g_i^k) = \bar{a}_i^{j,k+1}(g_i^k - g_i^j)^2 + \bar{h}_i^{j,k+1} \tag{4.3}$$

$g_i^j - \xi_i^j = g_i^k - g_i^j$ となる場合 $(\xi_i^j - g_i^j)^2 = (g_i^k - g_i^j)^2$ となり，$\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ の単調減少性より，$V_i^j(\xi_i^j) > V_i^k(g_i^k)$ であるため，(4.2), (4.3) を満たす $\bar{a}_i^{j,k+1}$ と $\bar{h}_i^{j,k+1}$ は存在しない．よって，$g_i^j - \xi_i^j \neq g_i^k - g_i^j$ の場合を考える．このとき，(4.2), (4.3) を満たす $\bar{a}_i^{j,k+1}$ と $\bar{h}_i^{j,k+1}$ は (4.4), (4.5) のように求められる．

$$\bar{a}_i^{j,k+1} = \frac{V_i^j(\xi_i^j) - V_i^k(g_i^k)}{(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^k - g_i^j)^2} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\bar{h}_i^{j,k+1} &= V_i^j(\xi_i^j) - \bar{a}_i^{j,k+1}(\xi_i^j - g_i^j)^2 \\
&= \frac{V_i^j(\xi_i^j)\{(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^k - g_i^j)^2\} - (\xi_i^j - g_i^j)^2\{V_i^j(\xi_i^j) - V_i^k(g_i^k)\}}{(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^k - g_i^j)^2} \\
&= \frac{(\xi_i^j - g_i^j)^2 V_i^k(g_i^k) - (g_i^k - g_i^j)^2 V_i^j(\xi_i^j)}{(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^k - g_i^j)^2}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$k = j$ の場合，$L_i^{j,k+1}$ は $V_i^j(\chi_i)$ と一致する．

$$\bar{a}_i^{j,k+1} = \bar{a}_i^{j,j+1} = \frac{V_i^j(\xi_i^j) - V_i^j(g_i^j)}{(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^j - g_i^j)^2} = \frac{a_i^j((\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^j - g_i^j)^2)}{(\xi_i^j - g_i^j)^2} = a_i^j \tag{4.6}$$

$$\bar{h}_i^{j,k+1} = \bar{h}_i^{j,j+1} = \frac{(\xi_i^j - g_i^j)^2 V_i^j(g_i^j) - (g_i^j - g_i^j)^2 V_i^j(\xi_i^j)}{(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^j - g_i^j)^2} = V_i^j(g_i^j) = h_i^j \tag{4.7}$$

$g_i^j - \xi_i^j > g_i^k - g_i^j$ の場合，(4.4) より，$\bar{a}_i^{j,k+1} > 0$ となるため，$L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ は凸関数になる．逆に $g_i^j - \xi_i^j < g_i^k - g_i^j$ の場合，$L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ は凹関数になる．よって，$g_i^j - \xi_i^j > g_i^k - g_i^j$ が成り立つ場合の関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ を考える．関数 $V_i^j(\chi_i), V_i^k(\chi_i)$ と $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ の関係を図 3 に示す．

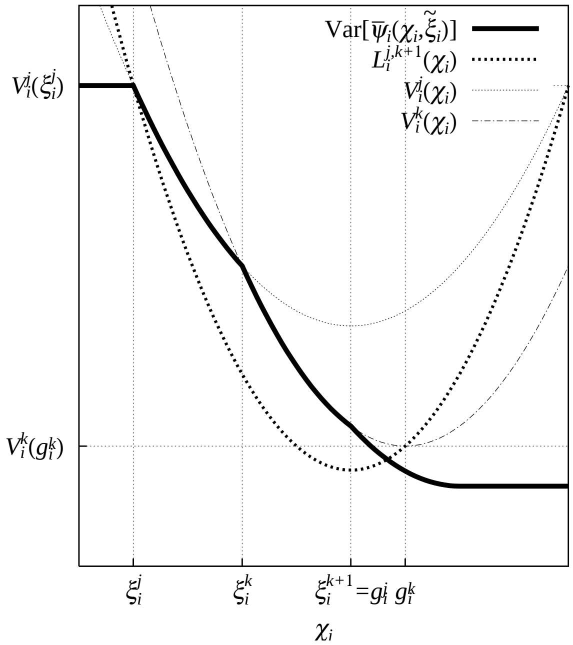

図 3: 関数 $V_i^j(\chi_i), V_i^k(\chi_i)$ と $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$

このように図3から，$g_i^j - \xi_i^j > g_i^k - g_i^j$ が成り立つ場合は関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ が分散 $\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = V_i^s(\chi_i), \chi_i \in [\xi^s, \xi^{s+1}], s = j, \ldots, k$ の下界を与えることが期待でき，次の定理に示される．

定理 4.1 条件 $g_i^j - \xi_i^j > g_i^k - g_i^j$ が成り立つ場合は関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ が分散 $\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] = V_i^s(\chi_i), \chi_i \in [\xi^s, \xi^{s+1}], s = j, \ldots, k$ の下界を与える．

証明 $k = j$ の場合，$V_i^j(\chi_i)$ と $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ は一致するため，$j < k < |\Xi_i|$ とし，$L_i^{j,k+1}(\chi_i) \le V_i^s(\chi_i), \chi_i \in [\xi^s, \xi^{s+1}], s = j, \ldots, k$ を示す．

以下に背理法を用いて証明する．区間 $[\xi_i^p, \xi_i^{p+1}], j \le p \le k$ において，$L_i^{j,k+1}(\xi_i^p) \le V_i^j(\xi_i^p)$ かつ $L_i^{j,k+1}(\xi_i^{p+1}) > V_i^j(\xi_i^{p+1})$ が成り立つと仮定する．すなわち，$\chi_i \in [\xi_i^p, \xi_i^{p+1}]$ において，$L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ と $V_i^j(\chi_i)$ が交わると仮定する．このとき $g_i^j - \xi_i^j > g_i^k - g_i^j$ であるため，$L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ は凸関数であり，$0 > \frac{d}{d\chi_i} L_i^{j,k+1}(\xi_i^p) > \frac{d}{d\chi_i} V_i^p(\xi_i^p)$ となる．また $g_i^j < g_i^p$ であるため，$0 = \frac{d}{d\chi_i} L_i^{j,k+1}(g_i^j) > \frac{d}{d\chi_i} V_i^p(g_i^j)$ かつ $\frac{d}{d\chi_i} L_i^{j,k+1}(g_i^p) > \frac{d}{d\chi_i} V_i^p(g_i^p) = 0$ が成り立つ．これより，$L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ の最小値 $L_i^{j,k+1}(g_i^j)$ は $V_i^p(\chi_i)$ の最小値 $V_i^p(g_i^p)$ より大きいことがわかる．よって，以下の不等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
V_i^p(g_i^p) &= h_i^p \\
&< L_i^{j,k+1}(g_i^j) \\
&= \frac{(\xi_i^j - g_i^j)^2 V_i^k(g_i^k) - (g_i^k - g_i^j)^2 V_i^j(\xi_i^j)}{(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^k - g_i^j)^2} \\
&< \frac{(\xi_i^j - g_i^j)^2 V_i^k(g_i^k) - (g_i^k - g_i^j)^2 V_i^k(g_i^j)}{(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^k - g_i^j)^2} \ (V_i^k(g_i^k) < V_i^j(\xi_i^j) \text{ より}) \\
&= V_i^k(g_i^k) = h_i^k \ (V_i^k(\chi_i) \text{ の最小値})
\end{aligned}
$$

不等式 $h_i^p < h_i^k$ は，系 3.1 に反する．よって仮定を満たす p は存在せず，区間 $[\xi_i^j, \xi_i^k]$ において下界を与えることが示された．

例 4.1 例 3.1 と同様に，確率変数のとりうる値を $\Xi = \{2, 4, 6, 8\}$, $p^1 = p^2 = p^3 = p^4 = \frac{1}{4}$ とした場合を考える．下界を与える関数 $L(\chi)$ は，次の図 4, 5,6 に示されている．この場合，区間 $[\xi_i^j, \xi_i^{k+1}]$ の $j, k (j \leq k)$ のとり方を変えることで，${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通りの組合せに対して，[0,2], [0,4], [0,6], [0,8], [2,4], [2,6], [2,8], [4,6], [4,8], [6,8] の 10 通りの区間での下界を与えることができる．区間 [0,2] では $L^{0,1}(\chi) = V^0(\chi) = \mathrm{Var}[\tilde{\xi}]$ であり，$V^0(\chi)$ における χ^2 の係数が $a^0 = 0$ となるため，$L^{0,1}(\chi) = 5$ と定数値になることに注意されたい．しかし，すべての区間に対して必ずこのような下界が与えられるとは限らない．$L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ が凸 2 次関数となるためには，$j = k$ の場合を除くと $\bar{a}_i^{j,k+1}$ が正でなければならない．$\bar{a}_i^{j,k+1} < 0$ ならば凹関数となるため，下界を与えない可能性がある．$\bar{a}_i^{j,k+1}$ の分子は，$V_i^j(\chi_i), V_i^k(\chi_i)$ が χ_i の単調減少関数で $\xi_i^j > g_i^k$ であることから，常に $V_i^j(\xi_i^j) - V_i^k(g_i^k) > 0$ となる．よって，分母について $(\xi_i^j - g_i^j)^2 - (g_i^k - g_i^j)^2 > 0$ の条件を満たすときのみ $\bar{a}_i^{j,k+1}$ の値が正になる．これより $g_i^j - \xi_i^j > g_i^k - g_i^j$ が成り立つときのみ下界を与える凸関数 $L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ を定義することが可能である．この条件は，$p_i^{s_i} = 1/|\Xi_i|, s_i = 1, \ldots, |\Xi_i|$ かつ $s = 1, \ldots, |\Xi_i| - 1$ において，$\xi_i^{s_i+1} - \xi_i^{s_i}$ が一定値のときに成り立つ．

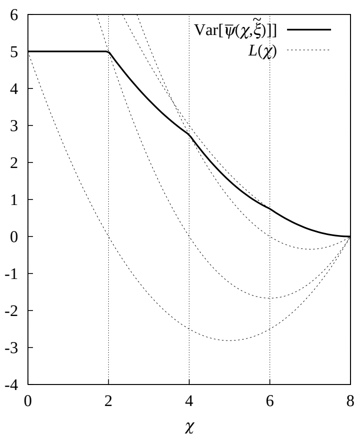

図 4: 分散と区間 [0,8], [2,8], [4,8], [6,8] での下界

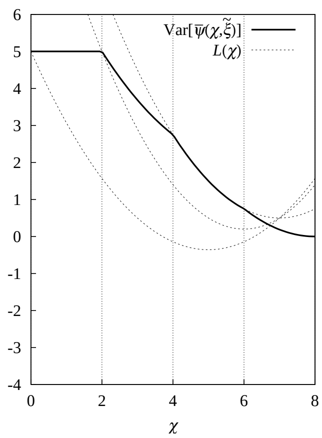

図 5: 分散と区間 [0,6], [2,6], [4,6] での下界

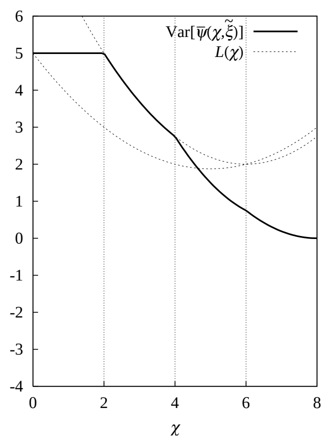

図 6: 分散と区間 [0,4], [2,4] での下界

4.2. 分枝方法

問題 (SPRST-V) に対する分枝限定法の解法アルゴリズムを示す．(SPRST-V) における分散項 $\sum_{i=1}^{m_2} \mathrm{Var}[\psi_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ を $\sum_{i=1}^{m_2} q_i^2 \theta_i, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, m_2$ と置き換えた問題 (P_0) を解く．新たな変数 θ_i は $\theta_i \geq \mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)]$ を満たすものであるが，問題 (P_0) においてはこの制約を緩和する．

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{P}_0):\ \min & c^\top x + \displaystyle\sum_{i=1}^{m_2} \Psi_i(\chi_i) + \lambda \sum_{i=1}^{m_2} q_i^2 \theta_i \\
\text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \\
& \chi = Tx \\
& (0 =) \xi_i^0 \leq \theta_i \leq \xi_i^{|\Xi_i|+1} (= +\infty), i = 1, \ldots, m_2 \\
& \Psi_i(\chi_i) = \displaystyle\sum_{s_i=1}^{|\Xi_i|} p_i^{s_i} \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}), i = 1, \ldots, m_2 \\
& \psi_i(\chi_i, \xi_i^{s_i}) = \min\{q_i y(\xi)_i \mid y(\xi)_i \geq \xi_i - \chi_i, y(\xi)_i, \geq 0\}, s_i = 1, \ldots, |\Xi_i|, i = 1, \ldots, m_2
\end{array}
$$

分枝限定法のアルゴリズムにおいては，入札変数 $\chi_i, i=1,\ldots,m_2$ の定義域を分割することにより分枝を行う．

いま，問題 (P_0) に分枝操作を加えることによって得られた子問題 (P_M) において，入札変数 χ_i の定義域に関する制約 $\chi_i \in [\xi_i^j, \xi_i^{k+1}]$ と分散に対する下界制約 $\theta_i \geq L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ が与えられているものとする．ここで $k=j$ ならば，関数 $L_i^{j,j+1}(\chi_i)$ は正確な分散の値を与えるため，$j<k$ の場合を考える．また $k=|\Xi_i|$ ならば，$\chi_i \in [\xi_i^j, \xi_i^{k+1}]$ における分散の下界として，$\theta_i \geq 0$ が与えられているものとする．問題 (P_M) を解いて，解 $\chi_i^*, i=1,\ldots,m_2$ を求める．このときある i について，$\theta_i < \mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i^*, \tilde{\xi}_i)]$ という関係が得られるものとする．続いて $\chi_i^* \in [\xi_i^s, \xi_i^{k+1}]$ を満たす最大の s $(j \leq s \leq k)$ を求め，区間を $[\xi_i^j, \xi_i^s], [\xi_i^s, \xi_i^{k+1}]$ に分け，問題 (P_M) を子問題 (P_{M+1}) と (P_{M+2}) に分解する．入札変数の値が $\chi_i^* = \xi_i^j$ となる場合は $s=j+1$ と定め，区間を $[\xi_i^j, \xi_i^{j+1}], [\xi_i^{j+1}, \xi_i^{k+1}]$ と分割する．

子問題 (P_{M+1}) に対しては，制約 $\theta_i \geq L_i^{j,s}(\chi_i)$ と $\chi_i \leq \xi_i^s$ を追加する．すなわち元の制約 $\chi_i \in [\xi_i^j, \xi_i^{k+1}]$ において，上限を $k=s-1$ と更新する．

子問題 (P_{M+2}) に対しては，$k<|\Xi_i|$ の場合，制約 $\theta_i \geq L_i^{s,k+1}(\chi_i)$ と $\xi_i^s \leq \chi_i$ を追加し，$k=|\Xi_i|$ の場合，$\chi_i \in [\xi_i^s, \xi_i^{|\Xi_i|+1}]$ での分散の下界が 0 であることから，制約 $\xi_i^s \leq \chi_i$ のみを追加する．すなわち元の制約 $\chi_i \in [\xi_i^j, \xi_i^{k+1}]$ において，下限を $j=s$ と更新する．

このように，変数 χ_i の区間の分割を続けていくと，最終的に入札変数がとりうる値に関する制約 $\chi_i \in [\xi_i^j, \xi_i^{k+1}]$ において，$j=k$ となるため，$\theta_i \geq L_i^{j,k+1}(\chi_i)$ がリコース関数に対する正確な近似となる．確率変数 $\tilde{\xi}$ の各成分の最大値が有限であり．さらにとりうる値の総数も有限であるとき，分枝が無限に繰り返されることはないため，アルゴリズムは有限回の反復で終了する．

以上をまとめると次のようになる．

変数の定義域の分割による分枝限定法のアルゴリズム

手順 0 $\mathcal{P}=\{\mathrm{P}_0\}, TMPCOST=+\infty, N=0$ とする．許容誤差 $\varepsilon>0$ が与えられている．

手順 1 $\mathcal{P}=\phi$ ならば終了．

手順 2 $\mathcal{P}$ から問題 (P_M) を選択し，$\mathcal{P}=\mathcal{P}\setminus\{\mathrm{P}_M\}$ とする．

手順 3 (P_M) を解き，その最適解を $x^*, \chi_i^*, \theta_i^*, i=1,\ldots,m_2$ とする．(P_M) が実行不可能あるいは $c^\top x^* + \sum_{i=1}^{m_2}\Psi_i(\chi_i^*) + \lambda\sum_{i=1}^{m_2} q_i^2\theta_i^* \geq TMPCOST$ ならば，手順 1 へ．

手順 4 分散項について $\lambda\sum_{i=1}^{m_2} q_i^2\theta_i^* \geq \lambda\sum_{i=1}^{m_2} q_i^2 \mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i^*, \tilde{\xi}_i)] - \varepsilon$ となる場合，暫定目的関数値が $c^\top x^* + \sum_{i=1}^{m_2}\Psi_i(\chi_i^*) + \lambda\sum_{i=1}^{m_2} q_i^2 \mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i^*, \tilde{\xi}_i)] < TMPCOST$ を満たすならば $TMPCOST = c^\top x^* + \sum_{i=1}^{m_2}\Psi_i(\chi_i^*) + \lambda\sum_{i=1}^{m_2} q_i^2 \mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i^*, \tilde{\xi}_i)]$ として手順 1 へ．

手順 5 $i^* = \max_{i=1,\ldots,m_2}(\mathrm{Var}[\bar{\psi}_i(\chi_i, \tilde{\xi}_i)] - \theta_i^*)$ によって i^* を求め，入札変数 χ_{i^*} を分枝変数とする．問題 (P_M) において，χ_{i^*} の定義域 $\chi_{i^*} \in [\xi_{i^*}^j, \xi_{i^*}^{k+1}]$ が与えられているものとする．$\chi_{i^*}^* \in [\xi_{i^*}^s, \xi_{i^*}^{k+1}]$ を満たす最大の s $(j \leq s \leq k)$ を求める．ただし $\chi_{i^*}^* = \xi_{i^*}^j$ となる場合は $s=j+1$ と定める．問題 (P_M) を問題 (P_{N+1}) と (P_{N+2}) に分解する．P_M に制約 $\theta_{i^*} \geq L_{i^*}^{j,s}(\chi_{i^*})$ と $\chi_{i^*} \leq \xi_{i^*}^s$ を追加した問題を (P_{N+1}) とする．(P_M) に制約 $\xi_{i^*}^s \leq \chi_{i^*}$ を加え，$k<|\Xi_{i^*}|$ の場合はさらに $\theta_{i^*} \geq L_{i^*}^{s,k+1}(\chi_{i^*})$ を追加した問題を (P_{N+2}) とする．$\mathcal{P}=\mathcal{P}\cup\{\mathrm{P}_{N+1}, \mathrm{P}_{N+2}\}, N=N+2$ とし手順 1 へ．

5. 電気事業への応用

電気事業においては，電力需要などの不確実性を考慮し，電力取引市場からの電力購入などを含めて，経済的な電源供給を計画することが求められている．中長期的な電力供給計画モデルにおいては，発電費用と電力購入費用の総和を最小化する．通常，電力需要の値は年間の各時間における負荷を大きさの順に配列して得られる負荷持続曲線あるいはその線形近似が用いられている．需要の変動の不確実性を考慮した電力供給計画問題 (Murphy, Sen, and Soyster[11]) を以下に示す．この問題では n_0 個の発電設備により供給を行う．負荷持続曲線を図 7 のように，m_2 の領域に分割して，領域 $j, j = 1, \ldots, m_2$ の需要量を確率変数 $\tilde{\xi}_j$ とし，領域 j の持続時間を t_j とする．確率変数 $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{m_2}$ の実現値を $\xi_1, \ldots, \xi_{m_2}$ とし，それらの台を $\Xi_1, \ldots, \Xi_{m_2}$ とする．これらをまとめて $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{m_2})^\top$ と表すと，$\tilde{\xi}$ の台 Ξ は $\Xi = \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_{m_2}$ と表すことができる．

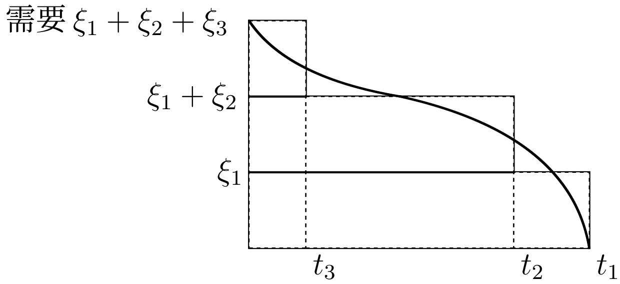

図 7: 負荷持続曲線

第 1 段階において決定する変数は，発電設備 i の容量 w_i および需要領域 j における出力 x_{ij} である．第 1 段階決定変数の個数は $n_1 = n_0 + n_0 \times m_2$ となる．発電設備 i の単位容量あたりの資本費，単位出力あたりの運転費をそれぞれ c_i, v_i とする．第 1 段階における制約条件は，各発電設備が出力の上限を上回らないことである．確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値 ξ が与えられた後に，需要を満たすことができなかった場合，第 2 段階における決定として電力市場などからの電力購入量 $y_j(\xi)$ を決める．需要領域 j における単位電力あたりの購入価格を q_j とする．全体の目的関数は，第 1 段階の発電費用と第 2 段階の電力購入費用の期待値の総和であり，総費用を最小化する計画を求める．第 2 段階の制約条件は，各領域の需要が各発電設備の出力と市場などからの電力購入によって満たされるという条件になる．

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n_0} c_i w_i + \sum_{i=1}^{n_0}\sum_{j=1}^{m_2} v_i t_j x_{ij} + \Psi(\chi) \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m_2} x_{ij} \le w_i, i = 1, \ldots, n_0 \\
& x_{ij} \ge 0, i = 1, \ldots, n_0, j = 1, \ldots, m_2 \\
& \chi_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{m_2} x_{ij}, i = 1, \ldots, n_0 \\
& \Psi(\chi) = \mathrm{E}_{\tilde{\xi}}[\psi(\chi, \tilde{\xi})] \\
& \psi(\chi, \tilde{\xi}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m_2} \psi_i(\chi_i, \tilde{\xi}) \\
& \psi_i(\chi, \xi) = \min \left\{ \displaystyle\sum_{j=1}^{m_2} q_j t_j y_j(\xi) \;\middle|\; \begin{array}{l} y_j(\xi) + \chi_j \ge \xi_j, j = 1, \ldots, m_2 \\ 0 \le y_j(\xi), j = 1, \ldots, m_2 \end{array} \right\}, \xi \in \Xi
\end{array}
\right.
$$

問題のデータを次のように与えた.

表 1: 問題のデータ

$c =$	$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (200, 500, 380, 400, 450)$
$v =$	$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = (30, 10, 20, 15, 18)$
$t =$	$(t_1, t_2, t_3, t_4) = (6, 24, 10, 12)$
$q =$	$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (40, 45, 50, 60)$
$\Xi_1 =$	$\{1.4,\ 1.6,\ 1.8,\ 2.0,\ 2.2,\ 2.4,\ 2.6,\ 2.8,\ 3.0,\ 3.2\ \}$
$\Xi_2 =$	$\{8.0,\ 8.1,\ 8.2,\ 8.3,\ 8.4,\ 8.5,\ 8.6,\ 8.7,\ 8.8,\ 8.9\ \}$
$\Xi_3 =$	$\{2.1,\ 2.15,\ 2.20,\ 2.25,\ 2.30,\ 2.35,\ 2.40,\ 2.45,\ 2.50,\ 2.55\}$
$\Xi_4 =$	$\{3.1,\ 3.2,\ 3.3,\ 3.4,\ 3.5,\ 3.6,\ 3.7,\ 3.8,\ 3.9,\ 4.0\ \}$

この問題に対し，リスク尺度として電力購入費用の分散項 $\lambda \sum_{i=1}^{n_1} \mathrm{Var}[\psi_i(\chi, \tilde{\xi})]$ を導入し，分枝限定法と列挙法による解法の比較を行う．数理計画モデリング言語 AMPL [6] によって分枝限定法と列挙法の解法アルゴリズムを実装し，計算実験を行った (CPU: Intel Core 2 Duo E8500, 3.16GHz)．分枝限定法の手順 3 および列挙法においては，ILOG CPLEX 10.0 の 2 次計画法ソルバを用いた．許容誤差を $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ とし，手順 2 における列挙木上の問題選択には，奥行優先則を適用した．結果を表 2 に示す．計算時間と子問題数は，リスク尺度パラメータ λ を 0 から 0.049 まで 0.001 間隔で増加させた合計 50 問題を解いた値を表す．分枝限定法で生成される子問題数は，全列挙法に比べ少なく，計算時間も短縮される．

表 2: 計算結果 (合計 50 問題)

設備数	需要領域数	シナリオ数	列挙法		分枝限定法	
n_0	m_2	$\prod_{i=1}^{m_2} \lvert\Xi_i\rvert$	時間 (sec)	子問題	時間 (sec)	子問題
3	2	100	102.5	5000	81.2	3908
4	3	1000	1017.1	50000	288.0	13604
5	4	10000	10177.1	500000	2116.4	99226

パラメータ λ の値を変化させた 50 問題における子問題生成数を図 8，9，10 に示す．

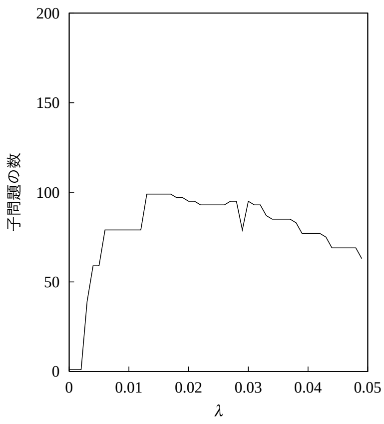

図 8: λ と子問題数 (100 シナリオ)

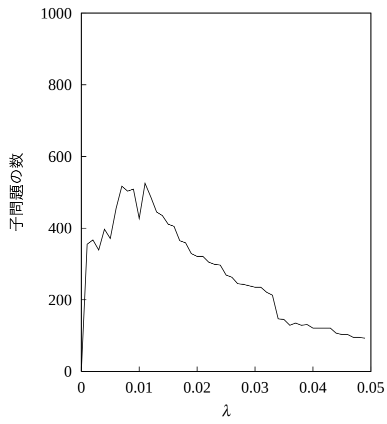

図 9: λ と子問題数 (1000 シナリオ)

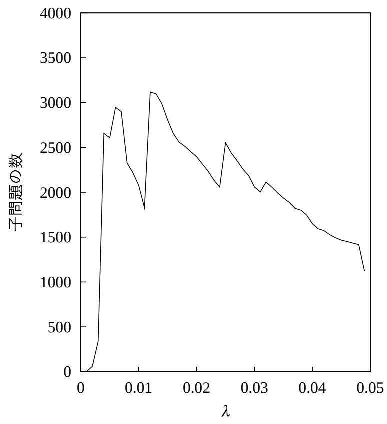

図 10: λ と子問題数 (10000 シナリオ)

パラメータの値が $\lambda=0$ の場合，問題は分散を考慮しない凸計画である2段階確率計画問題となるため解かれた問題の数は1であり，λ の値の変動に応じて生成される子問題数は変化する．続いて，最適費用と分散の関係を調べる．リスク尺度パラメータ λ を変化させ，横軸に分散，縦軸に期待費用をとり，2次元平面上に表示する．点線は本論文で開発したモデルの最適目的関数値である．比較対象として，凸計画である目標値からの上方半分散 $\sum_{s=1}^{|\Xi_i|} p_i^s [q_i y_i^s - R^*]_+^2$ (R^*：目標値) を分散の代用として用いたモデルを考える．ただし，目標値 R^* には分散を考慮しない2段階確率計画問題の最適目的関数値を与えた．図 11, 12, 13 では，上方半分散モデルを解いて得られた解を用いて真の分散を計算し直して2次元平面上に実線で示した．これより，開発した手法によると，費用の分散が等しい解の中で費用の期待値が最も小さい解を求めることができ，同時に費用の期待値が等しい解の中で最も分散が小さい解を求めることができる．本論文では非凸型問題を扱っているため，従来の効率的フロンティアとは異なり，必ずしも連続な曲線とはならないことに注意されたい．

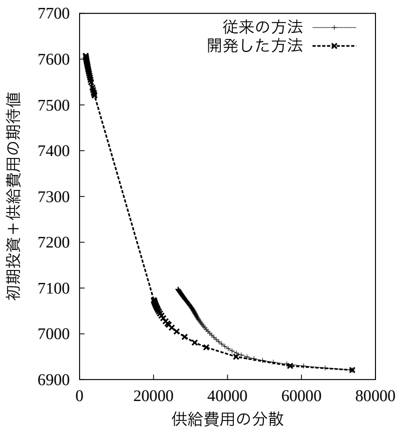

図 11: 期待値と分散 (100 シナリオ)

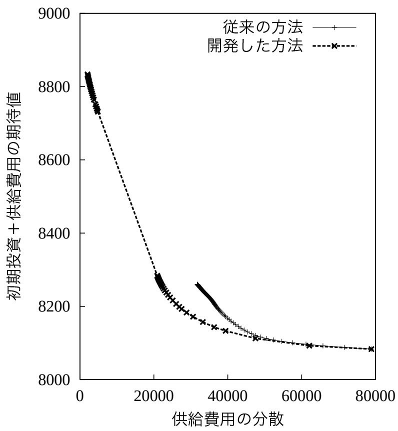

図 12: 期待値と分散 (1000 シナリオ)

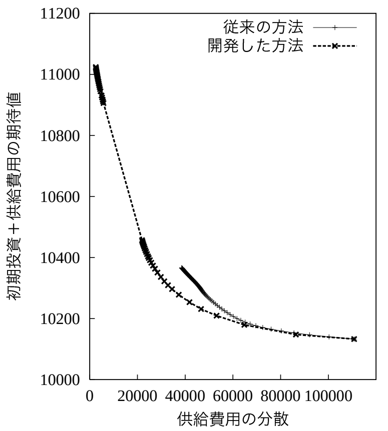

図 13: 期待値と分散 (10000 シナリオ)

6. おわりに

本論文では，確率変数が独立であるという条件の下で分散を考慮した2段階確率計画モデルにおいて，分枝限定法に基づく厳密解法を示した．数値実験から，分枝限定法により全列挙法と比べて効率的に解を求めることが可能であることが示された．この解法により，従来の上方半分散モデルでは求められなかった効率的フロンティアの一部を求めることが可能になった．今後の課題としては，問題に含まれる確率変数が独立でない場合の分析，また強い下界の導出，さらに他の現実問題への応用可能性を広げることなどがあげられる．

参考文献

[1] S. Ahmed: Convexity and decomposition of mean-risk stochastic programs. *Mathematical Programming*, **106** (2006), 433-466.

[2] D. Bai, T. Carpenter, and J. Mulvey: Making a case for robust optimization models. *Management Science*, **43** (1997), 895-907.

[3] J.F. Benders: Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems. *Numerische Mathematik*, **4** (1962), 238-252.

[4] J.R. Birge and F.V. Louveaux: *Introduction to Stochastic Programming* (Springer-Verlag, New York, 1997).

[5] G.B. Dantzig: Linear programming under uncertainty. *Management Science*, **1** (1955), 197-206.

[6] R. Fourer, D.M. Gay, and B.W. Kernighan: *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming* (Scientific Press, 1993).

[7] P. Kall and S.W. Wallace: *Stochastic Programming* (John Wiley & Sons, New York, 1994).

[8] M. Laguna: Applying robust optimization to capacity expansion of one location in telecommunications with demand uncertainty. *Management Science*, **44** (1998), S101-S110.

[9] S.A. Malcolm and S.A. Zenios: Robust optimization of power systems capacity expansion under uncertainty. *Journal of Operational Research Society*, **45** (1994), 1040-1049.

[10] J.M. Mulvey, R.J. Vanderbei, and S.A. Zenios: Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, **43** (1995), 264-281.

[11] F.H. Murphy, S. Sen, and A.L. Soyster: Electric utility capacity expansion planning with uncertain load forecasts. *IIE Transactions*, **14** (1982), 52-59.

[12] S. Takriti and S. Ahmed: On robust optimization of two-stage systems. *Mathematical Programming*, **99** (2004), 109-126.

[13] T. Shiina and J.R. Birge: Multi-stage stochastic programming model for electric power capacity expansion problem. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **20** (2003), 379-397.

[14] T. Shiina, Y. Tagaya, and S. Morito: Stochastic programming with fixed charge recourse. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **50** (2007), 299-314.

[15] R. Van Slyke and R.J.-B. Wets: L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic linear programs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **17** (1969), 638-663.

椎名 孝之
千葉工業大学
〒275-0016 千葉県習志野市津田沼 2-17-1
E-mail: `shiina.takayuki@it-chiba.ac.jp`

ABSTRACT

TWO-STAGE STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEM CONSIDERING VARIANCE

Takayuki Shiina *Chiba Institute of Technology*
Yu Tagaya *Canon IT Solutions*
Susumu Morito *Waseda University*

We study the two-stage stochastic programming problem considering variance, where the traditional expected minimization objective is replaced by one that explicitly addresses cost variability. It is shown that the problem is a nonconvex minimization problem by Ahmed (2006). In this paper, we propose an exact branch-and-bound algorithm to solve the problem. The model is applied to the power system capacity expansion problem under uncertain power demand. Computational experiments illustrate the effectiveness of the model in deriving the efficient frontier.