

独立分散最適化によるネットワークにおける性能劣化パラドックスとその大きさ

亀田 壽夫
筑波大学

(受理 2004 年 3 月 8 日; 再受理 2005 年 1 月 14 日)

和文概要 Internet や GRID など、多数の独立した個人や企業体が共用するネットワークや分散システムが社会の根幹をなしてきている。各個人や組織体は独立しているため、(経路選択や負荷割り当て等に関する)分散した意志決定により、独自の工夫で使用効率やコスト削減を追求すると、いわゆる神の見えざる手によるがごとく、全体として良い方向へ導かれるとの期待が持たれる。また、全体的な意志決定による上意下達的な割り当てによるよりも、互いの切磋琢磨により、諸側面のより多くの進歩が期待される。しかし、独立意志決定分散には、ゲームの理論における囚人のディレンマのように、全ての個体が努力した結果かえって全ての個体に対してコストや応答性能の劣化がおこるといった可能性が危惧される。特に、ネットワークにおける Braess のパラドックスのように、ネットワークや分散システムに新たに設備を増設したり、結合度を増したりして、各個体の意志決定の自由度が増すと、かえって、全ての個体に対する効用が低下してしまう場合がいくつか報告されている。

本稿は、独立分散意志決定をするネットワークや分散システムにおいて、そのような劣化が起こる場合、その大きさが、どの程度になりうるかについて、これまでのいくつかの研究成果を概観する。

キーワード: ゲーム理論, 通信, 交通, Nash 均衡, Wardrop 均衡, Pareto 非効率, congestion game

1. はじめに

[ネットワーク] 大規模なネットワークというとまず思い浮かぶのに、道路交通網がある。それは、非常に多くの道路から構成され、無数の車が通過する。あまり交通量が少なく使用効率が低いのも、混雑し通過時間がかかり過ぎるのも問題である。道路交通網に関連した言葉に、information highway があり、Internet 等に代表される情報ネットワークを意味する。Internet は、中継点である、非常に多くの、ノード (node, router) を繋ぐ通信線から形成されるネットワークを、車ならぬパケット (packet) が通り抜けていく。道路交通網と同様に、あまり通行量が少なく使用効率が低いのも、混雑し通過時間がかかりすぎるのも問題である。ネットワークの各部分に、適当な通行量があり、混雑が少なく、車ないしパケット(以下合わせてユーザと呼ぶことにする)が適当な時間内で通過していれば、問題がないが、そのような良好な状態がいつも保持されるとは限らない。そのために、ネットワークに何らかの制御を加える必要がある。制御とは、具体的には、各ユーザを通過させる経路の選択、ネットワークを通過させるユーザの通行量の決定(フロー制御)等がある。昨今話題となっている GRID(通信ネットワークを通じて分散配置された計算資源を共用する方式([16]))等の分散コンピュータシステムにおいて、計算資源の使用効率を高めるための負荷配置問題(例えば、[26, 32, 49])も、それと等価なネットワークの経路選択問題がある。本稿では、経路選択とそれと等価である負荷割り当ての問題を扱う。フロー制御においても同様なパラドックスが示されているが([20, 21])本稿では扱わない。

[独立分散意志決定] しかし、いずれのネットワークも大規模であることが多く、その場合全体的な包括的制御を決めることは困難である。一方、いずれのネットワークも、独立した意志決定をするユーザないし機関に共用される。道路交通網は、個々のマイカードライバーがあり、バスやトラック運行会社がある。Internet には、私企業であるプロバイダ (Internet service provider)、やその他の大学・研究機関などが参入している。いずれも、独立の意志決定主体と見なされる。

個々の独立な意志決定主体が、それぞれに関わるコスト低減を追究することにより、全体の効用がもたらされるということが一般に信じられている。経済現象については、各自が自分に関わるコストのみを追求すると、Adam Smith [45,46] による、いわゆる神の見えざる手 (Invisible Hand) によって、社会全体が最良の効用を有する状態に導かれるという考えが広く信じられているようである。大規模なネットワークのように、その全体的な制御が非常に困難に思われる場合には、このような信仰のもとでは、各ユーザが自己目的のみを追究する独立分散管理により、問題が分割・分散・小規模化され、より容易に解決されることが、期待されることになる。

[パラドックス] ところが、このような信仰に対する非常に逆説的な現象を、明確な形で示したのが、後述する Braess パラドックスである。本解説は、そのような逆説的な現象の、被害の大きさに関する研究成果のいくつかについて述べる。

一方、現時点までは、それらのパラドックスにおける被害すなわち応答性能の劣化の程度としてはそれほど大きなものが示されたようには見えない。すでに、Internet がそれぞれ独立したプロバイダや組織体に共用され、オンライン POS(販売時点情報管理) システムが互いに独立したコンビニチェーン等に共用されていた状況でも、このような問題は指摘されたようではない。あるいは、問題が存在しても被害が軽微なので注意を呼ばないのかもしれない。

しかし、今後、共用する組織体の独自のコスト追求が次第に深刻化することが予想され、また共用システムが大規模化し、参加ユーザ数も組織体もますます数多く幅広くなることが予想されるので、このような問題について検討し、できるだけ多くのできるだけ確かな知見を得るための努力が必要であると考えられる。

1.1. 意志決定の独立分散

意志決定の独立分散には異なる度合いが考えられる。すなわち、上述のようなシステムにおける、使用要求主体(ユーザ)の大きさに応じて、意志決定の独立分散の様々な程度と、それに対応する性能向上ないしコスト削減目標が考えられる。

(A)[集中的意志決定]: システム全体に対して単一の目標が設定され、それを追求するため集中的に意志決定が行われる。システム全体を代表する単一の集中意志決定者が、システム全体の全ユーザに対するコスト(例えば、全てのジョブ、パケットに対する平均応答時間ないし通過時間)の最小化を追求し、各設備へのジョブの割り当て等の決定を行う。この目標が遂行された状態を、全体最適状態 (overall optimum, system optimum) と呼ぶ。これは、システム全体が、一企業体などの単一の組織に集中的に使用される場合に相当すると考えられる。

(B)[意志決定の完全な独立分散]: システム内に限りなく到来する各使用単位、ジョブ、パケット(を操るユーザ)が、それぞれ独立に意志決定をし、それ自身のコスト(例えば、応答時間・通過時間の期待値)を最小にしようとする。一使用単位は全体に対して非常に小さいので、一使用単位だけの決定が全体に及ぼす影響が無視できるような場合である(このような使用単位を non-atomic であるということがある)。各単位が、それぞれの意志決定を変え

てももうこれ以上の目標追求の向上が望めないという均衡状態が考えられる．この状態を，個別最適状態 (individual optimum, user optimum) と呼ぶ．これは，一般に Wardrop 均衡 (Wardrop equilibrium) と呼ばれるものに相当する ([39, 50], 等) ．

(C)[意志決定の中間的独立分散]: システム内に限りなく到来する各使用単位，ジョブ，パケット (を操るユーザ) が，ある程度の大きさの有限個 ($m > 1$) の独立な組織体に分割所属し，各組織体にそれぞれ一意志決定者が対応する．各意志決定者は，互いに独立に，その代表する一組織体に属する全ての使用単位，ジョブ，パケットなどにわたるコスト (例えば，平均応答時間) を最小にしようとする．各組織体がかなりの大きさになるので，各意志決定者の決定は，システム全体に無視できない大きさの影響を有する (このような意志決定者を atomic であるということがある) ．各組織体が，それぞれの意志決定を変えてももうこれ以上の目標追求の向上が望めないという均衡状態が考えられる．この状態を，ここでは，グループ最適状態 (group optimum, class optimum) と呼ぶ．これは，一般に Nash 均衡 (Nash equilibrium) と呼ばれるものに相当する ([35, 37], 等) ．これは，システム全体が，少数の企業体など，有限数の組織に共用される場合に相当すると考えられる ．

意志決定者の数 m が 1 のとき ($m = 1$)，意志決定の中間的分散 (C) は，集中的意志決定 (A) に相当し，意志決定者の数 m が限りなく大きくなると ($m \rightarrow \infty$)，意志決定の中間的分散 (C) は，意志決定の完全な分散 (B) に限りなく近づく ([19]) ．(B) や (C) の場合は，意志決定者が複数あり，ゲーム (特に，congestion game と呼ばれているもの (例えば [40, 42])) と見なされる ．また，経済システムと対比すると，(A) は独占状態，(B) は完全競争状態，(C) は寡占状態に対応すると見なされる ．

1.2. Pareto 非効率とパラドックス

システムの状態に対して，各ユーザの，そして，各意志決定主体に対するコスト (効用値) が定まるとする ．例えば，ネットワークの各ユーザの通過経路，ユーザの通行量が決められると，各ユーザの通過時間 (あるいはその期待値) が決まり，そのユーザに関わる意志決定主体に対するコストが定まる ．工学などでは，各ユーザないし意志決定主体に対するコストの総和ないし加算平均のような単一の指標値を，システムの状態を評価する基準として用いることが多い ．しかし，システムの各状態について単一の指標値の大小が得られても，全ての意志決定主体に対するコストの大小が同じでない限り，状態間の絶対的な優劣は付けがたい ．

絶対的な優劣は，次のように，Pareto 最適 (optimal) ・ Pareto 非効率 (inefficient)，等の概念を用いて述べられる ．システムにユーザ $1, 2, \dots, m$ がおり，状態 S_a において，ユーザ i のコストが C_i^a であるとする ．システムの他の状態 S_b があり，それにおけるユーザ i のコストを C_i^b とする ．全ての i に対して， $C_i^a \geq C_i^b$ ，および，ある i に対して， $C_i^a > C_i^b$ が成り立つ場合，状態 S_b は状態 S_a よりも Pareto 優位 (superior) であり，状態 S_a は Pareto 非効率である ．状態 S_a よりも Pareto 優位な状態がシステム内に存在しない場合，状態 S_a は，Pareto 最適である ．Pareto 最適な状態間には絶対的な優劣は付けがたい ．

全体最適状態は明らかに Pareto 最適である ．しかし，個別最適状態・グループ最適状態が Pareto 最適である場合もあるが (例えば [1, 7])，一般にそうであるとはいえず，Pareto 非効率である可能性がある ．たとえば，囚人のディレンマと呼ばれている例がある ．2 人の囚人が告白に対し，自分の利益だけを考えて行動すると，共に重い罪が科される Nash 均衡状態に陥いる (例えば [37]) ．意志決定主体のコストが連続である場合，グループ最適状態 (Nash 均衡) が一般的に Pareto 非効率であることが示されている ([13, 44]) ．かくて，上に述べた，独立分散管理の有効性に対する，一般の人の信頼は，実際には損なわれることになる ．

[Pareto 強非効率とパラドックス] さらに, Pareto 強非効率・Pareto 強優位, 等の概念を次のように定義する. 全ての i に対して, $C_i^a > C_i^b$ が成り立つ場合, 状態 S_b は状態 S_a よりも Pareto 強優位であり, 状態 S_a は Pareto 強非効率である. すなわち, ある Nash 均衡の状態が Pareto 強非効率であるということは, 全ての意志決定主体にとってのコストが, その Nash 均衡状態におけるよりも, より良いという, 別の Pareto 強優位な状態があり得るということである. しかし, その Pareto 強優位な状態というのが, 現実的なものでなかったり, あるいは, コストの違いがさほど大きくなければ, その Pareto 強非効率さは, あまり気にならないことになる. ところが, ある Nash 均衡状態に対して, Pareto 強優位な状態が存在することのある意味での現実的な例を初めて示したのが, Braess パラドックス ([5]) である. 本稿は, 独立分散意志決定をするネットワークや分散システムにおいて, そのような逆説的な全ての意志決定主体にとってのコスト劣化 (パラドックス) が起こる場合, その大きさが, どの程度になりうるかについて, これまでのいくつかの研究成果を概観する.

一方, システムに結合を加えていつもパラドックスが生ずるわけではなく, 期待されるようにすべてのユーザに対して効用が向上することもあり得る. 効用が限りなく向上する例も議論されている ([23]).

2. Braess パラドックス

[Braess ネットワーク] Braess [5] は, 4つのノード, 1 始点 (0), 2 つの中継点 (1,2), 1 終点 (3) からなるネットワークを考えた (図 1). 図 1 左に示すように, リンク結合前は, ネットワークには 0-1-3 と 0-2-3 の, 各々2本のリンクからなる, 2本のパス (path) があり, 図 1 右に示すように, リンク結合後は, それらに, 3本のリンクからなる, パス 0-1-2-3 が加わり3本になる.

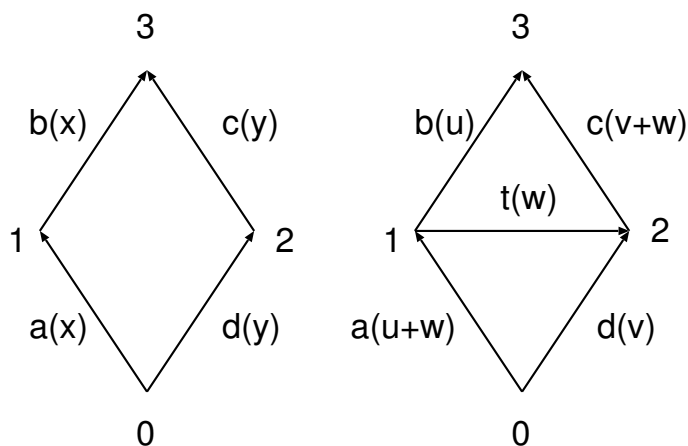


図 1: Braess ネットワーク

無数のユーザが, 始点から終点までネットワークを通過していく. 各リンクの通過時間は, そのリンクを通過するユーザ数の時間的割合で決められる. 各ユーザは, 最短の通過時間のパスを通過しようとする. 均衡状態は, Wardrop 均衡, すなわち, 個別最適状態であり, 1 始点 1 終点のみであるので, 使われるどのパスも同じコスト (通過時間) となる. 図 1 に示すように, 各リンクの通過量を η とすると, リンク 01, 13, 23, 02, 12 のコスト (通過時間) が, それぞれ, $a(\eta)$, $b(\eta)$, $c(\eta)$, $d(\eta)$, $t(\eta)$ と表されるとする. また, ネットワークの

総通過量を X とする．結合前は2本のパス 0-1-3 と 0-2-3 それぞれに, x, y の通過量があり ($x + y = X$), 結合後は3本のパス 0-1-3, 0-2-3, 0-1-2-3 それぞれに, u, v, w の通過量があるとする ($u + v + w = X$). C_o と C_c を, それぞれ, ネットワークにリンク 1-2 が追加される前と後の, パスのコストとする. $k = C_c/C_o$ とする. すなわち, k は, リンクを加える前後のコスト比を表す.

[Braess パラドックス] Braess [5] は, $a(\eta) = c(\eta) = 10\eta$, $b(\eta) = d(\eta) = \eta + 50$, $t(\eta) = \eta + 10$, $X = 6$ の場合, $C_o = 83$, $C_c = 92$ となり, $k = C_c/C_o = 1.1084\dots$ となることを示した (図 1 参照). すなわち, リンクを加えることにより, 全てのユーザのコスト (通過時間) が約 1.1 倍になる例を示した. リンクを加えるということは, 各意志決定主体にとって選択の自由度が増すことと, 新たな投資を意味する. それにもかかわらず, 全ての意志決定者, ユーザにとってコストが劣化するということは, 非常に逆説的に見える. そこで, この現象がパラドックスと呼ばれる. さらに, このようなパラドックスが実際に起こる例が観測された ([29]). ここに, 上述のパラドックス, すなわち, より Pareto 優位な状態の現実的な例が, 現実の道路交通網のモデルとして, 具体的に初めて示された.

[Cohen-Kelly パラドックス] Braess のネットワークでは, 線形のコスト関数が考えられたが, 待ち行列ネットワークで用いられるコスト関数は一般に非線形である. Cohen と Kelly [10] は, 次に示す場合を考えた. λ, ϕ をシステムパラメータとし, $X = 2\lambda$, リンク流量 η に対して, $b(\eta) = d(\eta) = 2$, $t(\eta) = 1$, $a(\eta) = c(\eta) = 1/(\phi - \eta)$ ($0 \leq \eta < \phi$ の場合. その他の場合, $a(\eta), c(\eta)$ は無限大). ここで, $2\lambda > \phi - 1 > \lambda > 0$ を仮定すると, 次のことが示された: $C_o = 1/(\phi - \lambda) + 2 < 3 = C_c$, すなわち, $1 < k < 3/2$. これもパラドックスであるといえる. 1.5 倍を超えない劣化の程度である.

[Braess ネットワークの関連研究] これ以後徐々に, 経済学者 Samuelson [43] を含む, 数多くの人々の関心を呼ぶようになり, 上述の Cohen と Kelly [10] を含む関連研究が続々となされた (例えば, [6, 9, 11, 12, 17, 18, 33, 34, 38, 47, 48]). また, Braess のネットワークと同じトポロジを持つシステムにおける, Braess パラドックスと類似の逆説的な現象が, 力学系や電気回路にも見られることが示され, 科学誌 *Nature* に発表された ([8]). しかし, 関連研究の殆どは, 個別最適状態 (Wardrop 均衡) に関するものであり, 多くは Braess のネットワークと同じトポロジのネットワークあるいはそれを一般化したものを扱っている. また, 後述する弱いパラドックスしか示していないものもある.

さらに, Braess ネットワークと類似のトポロジのネットワークについて, グループ最適状態 (Nash 均衡) においても, パラドックスが存在する例が示されている ([30]). さらに, Korilis 他 [31] は, 1 始点 1 終点のネットワークにおいて, 同種のグループが存在する場合に, パラドックスが発生しないためのある十分条件を示している.

[Wardrop 均衡のネットワークのパラドックスの大きさの限界] 一方, 近年に至るまで, 本稿の主眼とする問題である, パラドックスの大きさがどの程度にまで成り得るかについて, 検討結果が得られていなかったようである. 近年になって, 図 1 に示すトポロジの一般的 Braess ネットワークについて, 関数 a, c が単調増加で, b, d, t が非減少である場合, $k < 2$ である, すなわち, パラドックスの大きさが 2 倍を超えないことが示された ([22]). さらに, Braess のネットワークがより大きなネットワークに埋め込まれている場合でも, 埋め込まれたネットワークのパラドックスの大きさが, やはり 2 倍を超えない例が示されている ([22]). 一方, 2 倍を超える例はまだ示されていない. より一般的な結果として, 1 始点 1 終点のネッ

トワークにおいて、ノード数が n の場合、リンクコストが非減少であると、リンク (複数も可) をつけ加えることによる、パラドックスの大きさは、 $\lfloor n/2 \rfloor$ 倍を超えないことが示されている ([41])。最悪のケースの例を図 2 に示す。図の左は、3 本の (垂直な薄い破線で示すところ) リンクが加えられる前、図の右は、3 本のリンク (垂直上向きな濃い実線の矢印で示す) が加えられた後を示す。この図はパラドックスの大きさを見やすくするため、ノード以外にもリンクを結ぶ点があるかのように記してあるが、本図では、ノードは、3 本以上のリンクが交わる (可能性のある) 点のみとする。よって、本図には、 A, B, C, D, E, F, G, H の 8 個のノードがあることになる。ネットワークへの総流量は 4 であるとする。極細の線はそこに流量がなく、太目の実線は流量があることを示す。左図では、 $ABH, ACDH, AEFH, AGH$ の 4 本のパスが使われ各々が流量 1 となり、右図では、 $ACBH, AEDH, AGFH$ の 3 本のパスが使われ各々が流量 $4/3$ となる。左図で 0、右図で 1 を付してある線は、流量が 1 以内はコスト 0、流量が 1 を超えるとコスト 1 となる。左図でも 1 右図でも 1 が付してある線は、流量にかかわらずコスト 1 である。結合されるリンク (垂直上向きな濃い実線の矢印) のコストは 0 である。本図には、8 個のノードがあるのに対して、 $C_0 = 1, C_1 = 4$ となり、パラドックスの最悪の大きさ $k = \lfloor 8/2 \rfloor = 4$ が実現されている。

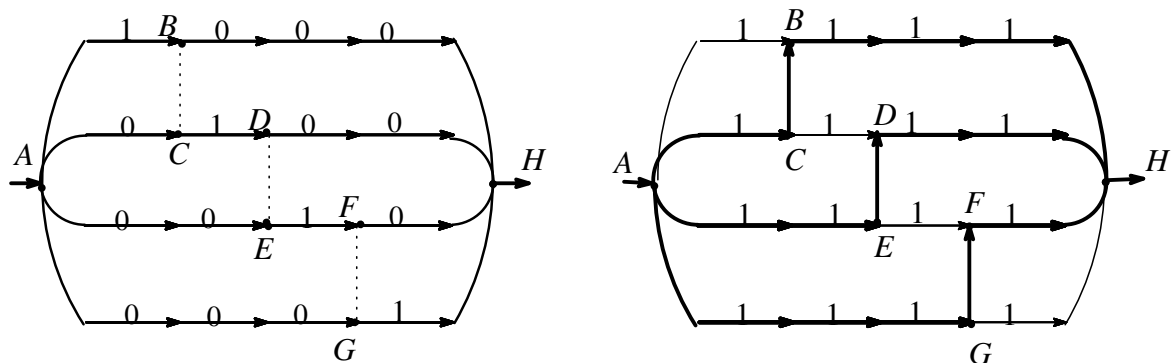


図 2: ノード数 8 の場合の最悪のパラドックス $k = 4$ をもたらすネットワーク

以上のように、ネットワークのノード数が有限の場合、パラドックスの大きさが、限りある場合のみ報告されてきた。しかし、異なったトポロジーのグループ別最適状態にあるネットワークにおいて、パラドックスの大きさが、限りなく大きくなる場合が発見されている ([28])。それについては、パラドックスの大きさの指標について論じた後で述べる。

3. パラドックスの大きさの指標

[パラドックスの大きさの指標] Braess ネットワークのように、1 始点 1 終点のみ有し、各個別最適状態 (Wardrop 均衡) では、どのユーザのコスト (通過時間) も同じになるので、結合を加える前と後のユーザのコストの比較は上述のように簡単である。しかし、その他の場合は、各ユーザのコストが異なるのが一般的であり、その場合のパラドックスの大きさをここで定義する。このような定義が、これまで検討されていないようであり、そのことは、これまで、パラドックスないし Pareto 優劣の大きさについてあまり議論がなされてこなかったことを示唆するものと思われる。1.2. 節に引き続き、Pareto 強非効率・Pareto 強優位、等の概念を考える。結合を加える前の状態を S^b 、後の状態を S^a とする。ユーザのコストは正であるとする。実際、本稿で扱う例では、全てコストが正である。各ユーザ i に対して、 $k_i = C_i^a / C_i^b$ なる k_i を考える。全ての i に対して $k_i > 1$ のとき、 S^b が S^a より Pareto 強優位で

あり，パラドックスが発生したことになる． $k_{min} = \min_p k_p$ なる k_{min} を定義する．全ての i に対して $k_i > 1$ であることと $k_{min} > 1$ であることは同等である．逆にある i に対して $k_i \leq 1$ すなわち $k_{min} \leq 1$ の場合は， S^b が S^a より Pareto 強優位ではなく，パラドックスとはならない．このように k_{min} の大きさによりパラドックスであるかが判定される．そこで，さらに進んで， k_{min} をパラドックスの大きさの程度を表す指標とする．2. 節で述べたネットワークでは，1 始点 1 終点のみ有し，各個別最適状態 (Wardrop 均衡) ではどのユーザの効用値 (コスト例えば通過時間) も同じになるので，全ての i に対して $k_i = k_{min} = k$ となり， k_{min} は k に縮退する．

[弱いパラドックス] 本稿で述べるパラドックスは，結合を加える前の状態 S^b が，後の状態 S^a より Pareto 強優位である．しかし，状態 S^b が，状態 S^a より Pareto 強優位でない場合でも，状態 S^b における全ユーザにわたるコスト (例えば，全てのジョブ，パケットに対する平均応答時間ないし通過時間) が S^a におけるものよりも劣化する場合があり ([26, 51])，それも逆説的に見える．しかし，その場合には，結合を加えたことにより，必ずしも，全てのユーザのコストが劣化するとは限らず，かえってコストが改善するユーザもあり得る．従って，そのような逆説の場合は，真のパラドックスといえず，弱いパラドックスと呼ぶことにする．2. 節で述べたケースでは必ず $k_i = k$ であったが，一般にはそうなるとは限らない．結合を加えたことによる，各ユーザ i に対するコストの変化の程度 k_i が等しくない場合に，全ユーザに対するコストの総和・平均値等のみについて逆説的結果を示している研究成果は，弱いパラドックスを示しているに止まっている可能性があり，本稿ではそのような研究成果については，ほとんど触れない．明らかに，(強い) パラドックスが発生する場合には，必ず弱いパラドックスも発生しているが，弱いパラドックスが発生するからといって，本稿でいうパラドックスが発生するとはいえない．

4. 各ユーザのコストが必ずしも等しくならないシステム — 分散システムのネットワークにおけるパラドックス

Braess パラドックスが注目されるようになってから，30 年以上にわたって，パラドックスについてかなりの数の論文が出たが，ほとんどが Braess ネットワークと類似のトポロジーを持つネットワークか，同じように，始点終点の対が一つだけで，各ユーザが同様であるネットワークに関するものようである．このような場合は，結合を加えたことによる，各ユーザ i に対するコストの変化の程度 k_i が等しい．結合を加えたことによる，各ユーザ i に対するコストの変化の程度 k_i が等しくない可能性を含むシステムについて，パラドックスの大きさについて論じたものに，以下に示す，分散コンピュータシステムに関するものがある．

2. 節で示したような Braess ネットワークやその拡張と異なるトポロジーのネットワーク，すなわち，分散コンピュータシステムのグループ別最適状態においても，パラドックスが発生する例が発見された ([25])．その種のパラドックスは，以下に示すように，システムが対称的なときにも起こり，その場合が特に逆説的に見える．また，パラドックスの大きさが，限りなく大きくなる場合が発見されている．

4.1. 対称的分散システムに対する解析的な結果

システムを記述するパラメータが各ユーザに対して等しい場合でも，Nash 均衡において各ユーザのコストが等しくなるかどうかは分からない．すなわち，等しくなることはまだ証明されていないようである．対称的な分散システムのネットワークにおけるパラドックスについてできる限りの数理的な結果が得られているが ([28])，その基本的な結果は，次の 4.1.1.

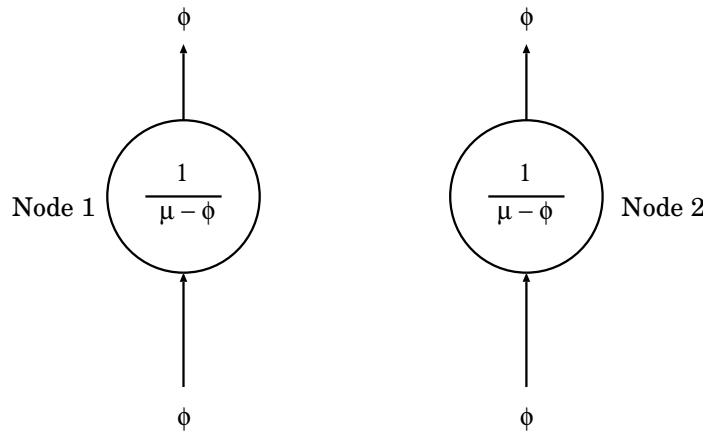


図 3: 分散システムモデル-独立

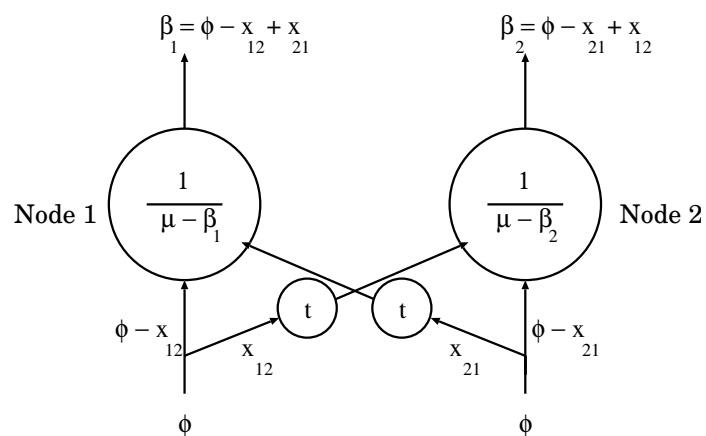


図 4: 分散システムモデル-相互結合

節に示す簡単なモデルを用いて示すことができる．一般的な結果は付録に示す．いずれも，結果的には，グループ最適状態において，対称的なシステムパラメータ値を持つユーザ間では，コストは等しくなっている．すなわち，全ての i に対して， $k_i = k_{min} = k$ となる．

4.1.1. パラドックスの簡単な例

図 3, 4 に示される，簡単な対称な分散システムのモデルを考える． μ は各コンピュータ(ノード)の処理能力， ϕ は，各ノードへのジョブ到着率を表す． T_i は ノード i に到着するジョブの応答時間の平均を表す．各ノードにそれぞれ意志決定者がおり，他ノードへ転送するジョブの割合 x_{ij} ($i \neq j$) を決め，自ノードに到着するジョブに関するコスト T_i のみを最小化しようとする．均衡状態は，グループ最適状態である．

図 3 に示す，ネットワーク結合されていない場合は，他ノードへジョブを転送することができず，グループ最適状態では，

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{\mu - \phi} \quad (M/M/1) .$$

図 4 に示すように，ネットワーク結合された後は，ノード i から ノード j ($i \neq j$) に転送されるジョブの割合を x_{ij} とする．すなわち，

$$0 \leq x_{ij} \leq \phi, i, j = 1, 2 (i \neq j) \tag{4.1}$$

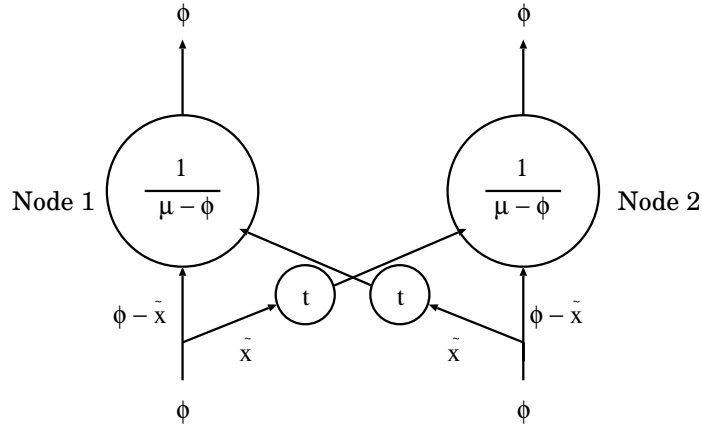


図 5: 分散システムモデル– Nash 均衡, $\tilde{x}_{ij} = \tilde{x}_{ji} = \tilde{x} \geq 0$

$x = (x_{12}, x_{21})$ と表す．関係 (4.1) を満たすベクトル x の集合を C で表す．
 x の値によらず，ジョブの転送に t の時間がかかるとすると，

$$T_i(x) = \frac{1}{\phi} \sum_k x_{ik} T_{ik}(x), \quad (4.2)$$

$$\text{ただし } T_{ii}(x) = \frac{1}{\mu - \beta_i}, T_{ij}(x) = \frac{1}{\mu - \beta_j} + t \quad (j \neq i). \quad (4.3)$$

ここで， β_i は次のように与えられる．

$$\beta_i = \phi_i - x_i + x_j \quad (i \neq j). \quad (4.4)$$

$T_{ik}(x)$ は，ノード i に到着し，ノード k で処理されるジョブに対する平均応答時間である．
 ネットワーク結合された後は，グループ最適状態 (図 5) の解 (Nash 均衡解) を \tilde{x} とすると，

$$T_i(\tilde{x}) = \min_{x_{ij}} T_i(x_{ij}, \tilde{x}_{ji}), (i \neq j).$$

\tilde{x} は次のように求められる．

(i) $t > \phi/(\mu - \phi)^2$ の場合: $\tilde{x} = \tilde{x}_{ij} = 0$, $T_i(\tilde{x}) = \frac{1}{\mu - \phi}$.

T_i の値はネットワーク結合前と同じであり，パラドックスは生じない．

(ii) $0 < t \leq \phi/(\mu - \phi)^2$ の場合:

$\tilde{x} = \tilde{x}_{ij} = \{\phi - t(\mu - \phi)^2\}/2 \geq 0$, $T_i(\tilde{x}) = \frac{1}{\mu - \phi} + E$. ただし, $E = \frac{t}{2\phi} \{\phi - t(\mu - \phi)^2\} \geq 0$.

E がネットワーク結合前より大きい部分を表し， $E > 0$ がパラドックスの発生を示す．すなわち，全ての意志決定者に関わるコストが劣化する．したがって， $0 < t < \phi/(\mu - \phi)^2$ が，このモデルにおいてパラドックスが発生するための必要十分条件ということになる．

[上記の \tilde{x} , $T_i(\tilde{x})$ の導出] (4.2) と (4.4) から，

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} = -\frac{\mu - x_j}{(\mu - \phi + x_i - x_j)^2} + \frac{\mu - \phi + x_j}{(\mu - \phi - x_i + x_j)^2} + t \quad (i \neq j). \quad (4.5)$$

(4.5) から, $\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ が $x \in C$ なる x_i に対して単調増加であることが分かる. もし次式を満たす \bar{x} が得られると,

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial x_i} \right|_{x=\bar{x}} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.6)$$

その \bar{x} はグループ最適化の解となる. (4.5) および $d = x_1 - x_2$ とすることにより,

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} - \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \frac{2\mu - (\phi + d)}{(\mu - \phi - d)^2} - \frac{2\mu - (\phi - d)}{(\mu - \phi + d)^2} = \frac{2d}{(\mu - \phi)^2 - d^2} \left\{ \frac{2\mu(\mu - \phi)}{(\mu - \phi)^2 - d^2} + 1 \right\}, \quad (4.7)$$

(4.6) が成り立つと, (4.7) から, $d = 0$. すると, (4.5) から

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} = \frac{2x_i - \phi}{(\mu - \phi)^2} + t = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.8)$$

よって,

$$x_i = \frac{1}{2} \{ \phi - t(\mu - \phi)^2 \}, \quad i = 1, 2. \quad \text{ただし, } t \leq \frac{\phi}{(\mu - \phi)^2}. \quad (4.9)$$

上述から, これが唯一解であることが分かる (場合 (ii)). これと (4.2) から, $T_i(\bar{x})$ が得られる. $t > \frac{\phi}{(\mu - \phi)^2}$ (場合 (i)) に対しては, (4.8) より, $x_i = 0$ ($i = 1, 2$) のとき,

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} = t - \frac{\phi}{(\mu - \phi)^2} > 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.10)$$

$\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ が x_i について単調増大であるので, $\bar{x}_i = 0, i = 1, 2$, はグループ最適化の解である.

この場合の解の唯一性は概略次のように示される. $\bar{x}_1 > 0$ としよう. d の定義と (4.5) と t に関する条件 (ii) から, $d < 0$ でなければならず, \bar{x}_2 が零でないことになる. \bar{x}_2 について上と同様な議論をすると, $d > 0$ となり, 矛盾である. よって, $\bar{x} = \mathbf{0}$ は, 唯一のグループ最適解である.

より一般的な場合の解の存在と唯一性については, [2, 24, 28, 36] 参照. □

全体最適状態, 個別最適状態の解は, システムパラメータ値によらず, (i) の場合と同様である. 従って, Braess ネットワークの場合と異なり, 個別最適状態においてはパラドックスは発生しない.

結合する以前の平均応答時間に対する, 結合後の平均応答時間の大きさの比が, パラドックスの大きさ k と考えられる. これを特に $k(\mu, \phi, t)$ と記す.

$$k(\mu, \phi, t) = 1 + \frac{\frac{t}{2\phi} \{ \phi - t(\mu - \phi)^2 \}}{\frac{1}{\mu - \phi}}.$$

パラドックスの大きさは, ϕ, μ が変わらなければ, $t = \phi/[2(\mu - \phi)^2]$ の時最大になり,

$$\max_t k(\mu, \phi, t) = 1 + \frac{\phi}{8(\mu - \phi)}.$$

したがって、到着率 ϕ が処理能力 μ に近づくにつれ、パラドックスは、限りなく大きくなり得ることが分かる．例えば、 $\max_t \Delta(1.00001, 1, t) - 1 = 12500$ (1250000% 性能劣化)，等．

したがって、非対称なシステムを含む任意のシステムのパラドックスのどの大きさに対しても、それより大きいパラドックスを持つ対称的な分散システムが存在することになり、対称的なシステムがパラドックスの最悪のケースをもたらすということになる．パラドックスの大きさが有限になるシステム群 (後述するような一般的表現で自然に記述されるもので、一般的でない特異なケースを含まないもの) については、後出の 5. 節で述べるが、やはり、各群において、対称的なシステムがパラドックスの最悪のケースをもたらしている．

4.1.2. 対称的な分散システムのパラドックスに関する一般的な結果

前節のモデルを、ノード数、ジョブタイプの性質、ノード処理時間、通信時間に関する仮定を一般化したものについて解析的結果が得られている ([28])．詳細は付録に示す．

5. 非対称な分散コンピュータシステムに対するパラドックス

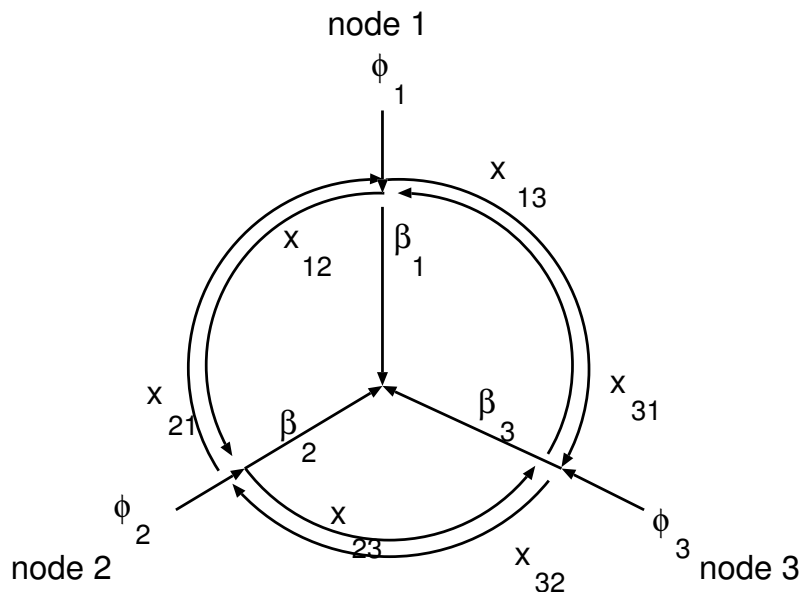


図 6: 非対称なパラメータの場合を含む分散コンピュータシステムのモデル ($m = 3$)

4.1. 節で述べた対称的な分散システムのモデルを、非対称に拡張したものを考える．4.1. 節の冒頭に述べたことに関して、システムを記述するパラメータが各ユーザについて等しくない場合には、Nash 均衡において、各ユーザのコストが一般的には等しくなるとは考えられない．本節では、 m 個のノード、 $1, 2, \dots, m$ ，からなるシステムを考える ([26, 49])．ジョブは到着ノード i によってグループ $i = 1, 2, \dots, m$ に分類され、ノード i に到着率 ϕ_i でポアソン到着する．そのうち、割合 x_{ii} のジョブがノード i で処理される．さらに、そのうち、割合 x_{ij} ($i \neq j$) のジョブが通信線を通じてノード j に送られ、そこで処理される．すなわち、 $\sum_p x_{ip} = \phi_i$ ， $x_{ij} \geq 0$ ， $i, j = 1, 2, \dots, m$ が制約条件である． x_i がベクトル $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ を表し、 x がベクトル (x_1, x_2, \dots, x_m) を表す．すなわち、 $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}, \dots, x_{mm})$ である．制約条件を満たす x の集合を C で表す． $\Phi = \sum_p \phi_p$ とする．各ノードごとに意志決定者 i ($i = 1, 2, \dots, m$) がいて、制約条件内で、 x_{ij} ($j = 1, 2, \dots, m$) を最適化するために決定する．結果としてノード i には $\beta_i = \sum_q x_{qi}$ の負荷がかかることになる．このシステムは、終点

を共通にする m 個の始点-終点对のネットワークと等価である ($m = 3$ の場合を図 6 に示す). 各矢印の脇に書かれた変数は, その矢印を通過するジョブの流量を表す). 負荷が β_i のときのノード i において処理されるジョブの待ち時間も含んだ平均滞在時間は $D_i(\beta_i)$ と表され凸増加関数と仮定する. ジョブをノード i からノード j ($j \neq i$) へ転送するのに要する時間の期待値は $G_{ij}(x)$ で表される. ノード i に到着するジョブの応答時間(システム滞在時間)の期待値は,

$$T_i(x) = \sum_k x_{ik} T_{ik}(x), \text{ ただし, } T_{ii}(x) = D_i(\beta_i), \text{ および, } j \neq i \text{ に対し } T_{ij}(x) = D_j(\beta_j) + G_{ij}(x).$$

グループ最適状態 (Nash 均衡) \tilde{x} は次を満たす (例えば, [25]).

$$\tilde{T}_i = T_i(\tilde{x}) = \min_{x_i} T_i(\tilde{x}_{-(i)}; x_i), \text{ 制約条件: } (\tilde{x}_{-(i)}; x_i) \in C. \quad (5.1)$$

ただし $(\tilde{x}_{-(i)}; x_i)$ は, \tilde{x} の要素のうち \tilde{x}_i に対応する要素を x_i に置き換えてできた $m \times m$ 次元のベクトルを表す. グループ最適状態 (Nash 均衡) \tilde{x} の存在と唯一性については, [2,3] 参照.

次の2つの節で, パラドックスの大きさが限られる非対称な分散システムのいくつかのグループに関する理論的結果と数値実験による結果を示す. いずれも, (一般的表現で自然に記述されるもので, 一般的でない特異なケースを含まない) どのシステム群においても, 対称なシステムの場合に, パラドックスの大きさを示す指標値が最大になることを示している.

5.1. 線形ノードコストの2ノードモデル

ここでは, パラドックスの最悪のケースの値が有限でありかつ数理的に求められる, 非対称なシステムを含む, システム群についての結果を示す. それは, 線形ノードコストと固定通信コストの2ノードモデルである ([27]). これより一般的なモデルは, 未だ数理的に性質が求められていないようである. これは, 付録に示すように, 対称的モデルに関してかなり一般的な結果が得られているのと, 極めて対照的である. したがって, より一般的なモデルについては, 数値実験を行って検討し, 結果を後の5.2.節で示す.

[モデルと仮定] 2つのノードからなるシステムを考える (即ち, $m = 2$). 各ノードにおけるコストは, 負荷がそれぞれ β_1 および β_2 の場合, $D_1(\beta_1) = a + b\beta_1$ および $D_2(\beta_2) = c + d\beta_2$ ($a \geq 0, c \geq 0$) であるとする. 通信コストは, $G_{12} = G_{21} = t$ (> 0) と固定される. 以下, 添字について簡略化するために, $\xi = \phi_1, \eta = \phi_2$ とおく. t を可変であると考え, システムは (a, b, c, d, ξ, η) の値の組で記述される. 全ての (a, b, c, d, ξ, η) の値の組を \hat{S} で表す. また, 各ノードを表すパラメータ値が全て等しいとき (すなわち $a = c, b = d, \xi = \eta$), システムが完全に対称であるということにする.

[2ノード線型モデルの諸性質] モデルの簡単さ故, いくつかの性質は簡単に導かれる. このモデルにおいて Nash 均衡は存在し唯一である. $b + d \leq 0$ の場合はパラドックスが発生しない. すなわち, 通信線をもたらし結果両方のノードの意志決定者のコストが劣化することはない, 等. パラドックスの発生条件や最悪のケースについては, モデルの簡単さにもかかわらず, あまり簡単に求められていない. 最悪のケースについては, 次のような結果が得られている.

$S_{bd\xi\eta}$ は, $b, d, \xi, \eta \geq 0, a = c \geq 0$ であるシステム群を表す.

S_{ac} は $a, c \geq 0, b = d \geq 0, \xi = \eta \geq 0$ であるシステム群を表す.

\tilde{S} を次のように定義する. $\tilde{S} = S_{bd\xi\eta} \cup S_{ac}$.

すると次の性質が得られる。

- I. システム群 \tilde{S} 内のどのシステムに対しても, そのシステムのパラドックスの大きさ k_{min} よりも小さくないパラドックスの大きさを持つ完全対称システムが \tilde{S} 内に存在する。
- II. 2 ノード線型モデルのパラドックスの最悪ケースは, 完全対称システムによって実現され, 最悪のパラドックスの大きさは, $9/8$ である。

この2つの性質は, 広く一般に \hat{S} について成立することが期待される。しかし, \tilde{S} をより \hat{S} に近づける努力が行われているが, 完全に一致させる見通しは容易ではなさそうである。

このように, かなり特殊な条件でのみ一般的な数理的性質が求められている。しかし, 非常に限られた場合ではあるが, 完全対称システムがパラドックスの最悪のケースを与えることを, 厳密に見ることができる。この厳密さは, 次に示すような数値実験をいくら重ねても完全には到達できないことはいうまでもない。

5.2. 非線形ノードコスト多ノードモデル

$m \geq 2$ 個のノードからなる分散コンピュータシステムを考える。負荷 β_i のときのノード i におけるコスト (平均遅延) は, $D_i(\beta_i) = \frac{1}{\mu_i - \beta_i}$ ($\beta_i < \mu_i$ の場合。それ以外の場合は無限) であるとする。通信コスト $G_{ij}(x)$ については次の (A) と (B) の2つの場合を考える。

(A) $G_{ij}(x) = \frac{t}{1 - \lambda t}$, $j (\neq i)$, ただし $\lambda t < 1$ の場合。その他の場合は無限。

ここで, $\lambda = \sum_p \sum_{q, (q \neq p)} x_{pq}$ は, 通信線を通ずる通信量。システム全体で, 1本の通信路が共用される。

(B) $G_{ij}(x) = \frac{t}{1 - x_{ij}t}$, $j (\neq i)$, ただし $x_{ij}t < 1$ の場合。その他の場合は無限。システム全体で, $m(m-1)$ 本の通信線がある。

いずれの場合にも, t は通信路に待ちがないときの通信時間を表す。 $1/t$ が通信路容量となる。さらに, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$ および $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ と表す。

5.2.1. 数値実験

グループ最適状態を求めるのに, 次に示すアルゴリズムを用いた。 ϕ, μ, t の値が与えられたとして,

- 初期化 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in C$.

- x^n ($n = (k-1)m + i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots$) を

$(x_1^{n-1}, \dots, x_{i-1}^{n-1}, x_i^n, x_{i+1}^{n-1}, \dots, x_m^{n-1})$ として求める。このステップを収束まで繰り返す。

ただし $x_i^n = \arg \min_{x_i} T_i(x_1^{n-1}, \dots, x_{i-1}^{n-1}, x_i, x_{i+1}^{n-1}, \dots, x_m^{n-1})$.

上記モデルについて, このアルゴリズムは, 収束すれば, グループ最適状態を与える。それより, ノード i の意志決定者のグループ最適状態コスト $\tilde{T}_i(\phi, \mu, t)$: 値 ϕ, μ, t が求まる。ノード等のコストが線形の場合に, その収束性は示されている ([4])。我々が検討した全ての場合に, アルゴリズムは収束した。 μ_i, ϕ , の値の組み合わせに対して, グループ最適状態において, 通信線パラメータ t の値が $t \geq t^\infty$ の場合に, 通信線が使われないようになる t^∞ の値がある。

次の関係が成り立つ時に, パラドックスが生ずることになる。

$$k_i(\phi, \mu, t) > 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \text{ただし } 0 < t < t^\infty. \quad (5.2)$$

ここで $k_i(\phi, \mu, t) = \frac{\tilde{T}_i(\phi, \mu, t)}{\tilde{T}_i(\phi, \mu, t^\infty)}$, および $\tilde{T}_i(\phi, \mu, t)$ は, 通信パラメータの値 ϕ, μ, t のときのグループ最適状態における, ノード i の意志決定者に対するコストを表す. すなわち, (5.2) は, 通信容量が増し, 通信パラメータの値 t が t^∞ から t に減少すると, かえって, 全てのノードの意志決定者に対するコストが増加することを示している.

パラドックスの大きさ $k_{\min}(\phi, \mu, t)$ の最大値 $\Gamma(\mu, \phi)$ は次のように表される.

$$\Gamma(\mu, \phi) = \max_t \{ \min_i \{ k_i(\phi, \mu, t) \} \}. \quad (5.3)$$

次節において μ と ϕ の値の各組み合わせに対して, Γ の値を求めたものを示す.

5.2.2. 数値実験結果

いくつかの $m \geq 2$ の場合に対して, μ と ϕ の値のいろいろな組み合わせを網羅的に調査した. 通信路 (A) の場合の一例を図 7 左に, 通信路 (B) の場合の一例を図 7 右に示す. いずれの場合も $\phi_1 = 1$ とするが一般性は失われない. 横軸は, μ_1 の値を示し, 縦軸はパラドックスの最大値 Γ を示す. 実線は, μ_1 に対し, 完全対称なシステム, すなわち全ての i について $\mu_i = \mu_1$ および $\phi_i = 1$ の場合の Γ の値を示し, 波線は, μ_1 に対し, μ_1 が同じ非対称なシステム, すなわち μ_1 以外の全ての μ_i や ϕ_i の値の組み合わせのうち, 最大の Γ をもたらすものを示す. 図 7 左は, ノード数 $2(m = 2)$, 通信線が (A) の場合を示し, 図 7 右は, ノード数 $4(m = 4)$, 通信線が (B) の場合を示す. いずれも, μ_1 が $1 (= \phi_1)$ に近づくにつれ, パラドックスの最大値 Γ が増大し, 極限值に近づく. 対称なシステムがその極限值に近づくのは明白に見える. その極限の値を超える, 非対称なシステムのパラドックスの最大値 Γ (波線の値) がないことも観察される. すなわち, それぞれのシステム群内のどの非対称なシステムに対しても, そのパラドックスの大きさよりも少なくないパラドックスの大きさを与える完全対称システムがその群内に存在することが分かる. ここで示す場合の他にも, 様々なシステム群について同様な数値的検討が行なわれたが, 全て同様な傾向が示された ([14, 15]). これらの数値的結果は, パラドックスの最大値が有限な, 非対称なシステムを含む (一般的表現で自然に記述されるもので, 一般的でない特異なケースを含まない) システム群の内, パラドックスの最大値が, その群内の完全対称システムによってもたらされることを示している.

6. おわりに

ネットワークやシステムなど, 複数の使用者 (個人や組織体) が共用し, それぞれ各自のコスト削減を追求する場合に, 囚人のディレンマや Braess のパラドックスのように, 全ての使用者にコスト増大がおこる可能性が危惧される. この動機から, ネットワークの経路選択や分散コンピュータシステムの負荷割り当てに関する独立分散意志決定において, 結合を加え各意志決定者の決定の自由度が増すと, 全て各意志決定者のコストが劣化するというパラドックスの最大値に関する, 数値的および数理的な結果について概観した. また, パラドックスの Pareto 非効率等の概念との関連について考察し, パラドックスの大きさを表す一つの指標を示した.

意志決定が完全に独立分散された, 個別最適状態のネットワークに対しては, 有限個のノード (頂点) に対して, パラドックスの最大の大きさには限りがあることが示されていることを見た. 一方, GRID 等の分散コンピュータのネットワークシステムの最適負荷均衡の場合には, 個別最適状態では, パラドックスは発生しないが, 意志決定が中間的分散された, グループ最適状態においては, パラドックスが発生することがある. パラドックスは限りな

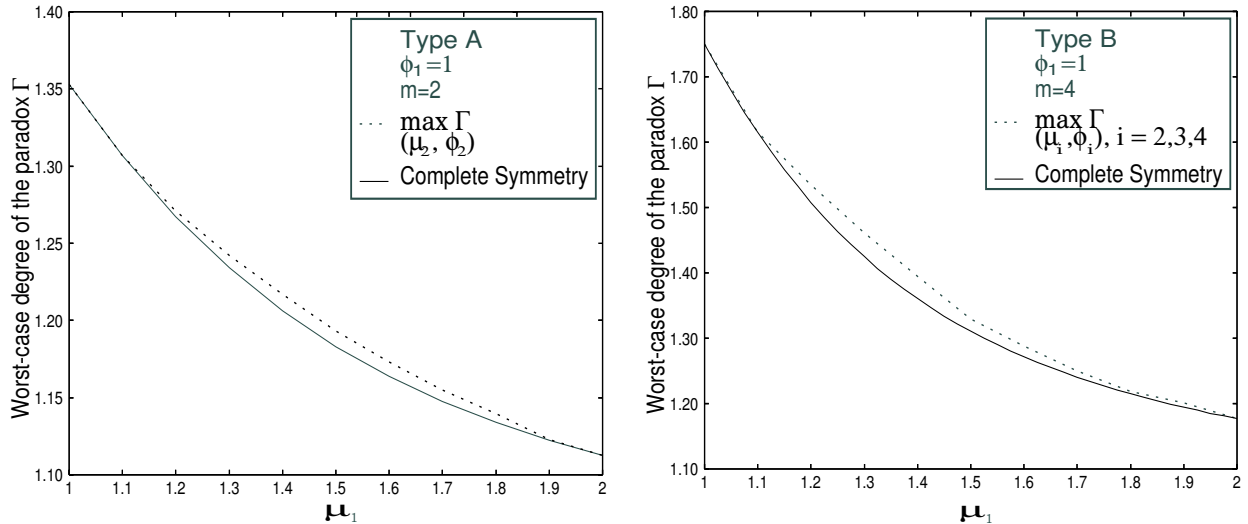


図 7: 完全対称システムと非対称システムに対するパラドックスの最大値の比較

く大きくなり得る．また，諸種のシステム群の全てについて，パラドックスの最大値はその群内の完全対称システムによってもたらされるという，数理的および数値実験結果を概観した．すなわち，上記の指標のもとでは，最大のパラドックスは，対称なシステムによってもたらされるという一般的な傾向が推測される．また，対称的なシステムについてはかなり一般的な解析的結果が得られているのを見た．しかし，非対称システムについては，対照的に解析が困難であり，特殊な場合に限られ，数値実験に頼られることになった．

本稿で述べた方向(ネットワークの経路選択やそれと等価な分散システムの負荷割り当て)の研究においても，顕在しないし潜在している問題は限りなくあるように思われる．ここで扱ったのは，静的ないし準静的制御に関するものであり，動的制御については問題が遙かに困難になるように思われるが，何らかの見通しが得られることが期待される．本稿で扱わなかったネットワークのフロー制御におけるパラドックスの追究も今後の問題である．

なお，著者による論文のいくつかは URL [52] からも見ることができる．

付録

A 対称的分散システムのパラドックスに関する一般的な結果

4.1. 節のモデルを，ノード数，ジョブタイプの性質，ノード処理時間，通信時間に関する仮定を一般化したものについて得られている解析的結果を以下に示す ([28]) ．

モデルと仮定

4.1.1. 節で述べたモデルを，次のように拡張した．まず，システムは $m (\geq 2)$ 台のノード(ホストあるいはコンピュータ)とそれらを結ぶ通信線とからなる．各ノード $i, i = 1, 2, \dots, m$ に到着するジョブは n 個のタイプ $k, k = 1, 2, \dots, n$ に分類される．したがって， mn 個の異なるジョブクラス R_{ik} がある．すなわち，各グループ R_{ik} は，そのジョブが外部からまず到着するノード i とジョブのタイプ k によって識別される．各ノードは，到着も処理能力も等しいとする．タイプ k のジョブは，各ノードに等しい割合 ϕ_k で到着する．各ノードへの総到着率は $\phi (= \sum_k \phi_k)$ である．時間の尺度を $\phi = 1$ となるように調整するが，一般性は失われない．

タイプ k ジョブが各ノードで受ける (待ち時間を含まない) 平均処理時間は, ノードによらず $1/\mu_k$ である. $\rho_k = \phi_k/\mu_k$ および $\rho = \sum_k \rho_k$ とする.

ノード i に到着するタイプ k ジョブのうち, 割合 x_{ijk} が通信線を通じて別のノード j ($j \neq i$) に送られそこで処理される. 残りの割合 $x_{iik} = \phi_k - \sum_{q(\neq i)} x_{iqk}$ が, はじめに到着したノード i で処理される. したがって, 全ての i, j, k に対して,

$$\sum_q x_{iqk} = \phi_k, \quad 0 \leq x_{ijk} \leq \phi_k. \quad (\text{A.1})$$

m 次元ベクトル x_{ik} , mm 次元ベクトル x_k , mmn 次元ベクトル x を次のように定義する. $x_{ik} = (x_{i1k}, \dots, x_{imk})$, $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 全ての成分が制約条件 (A.1) をみたすベクトル x の集合を C と表す. x が意志決定の対象となる.

意志決定が x で表される時, ノード i への負荷 β_i は,

$$\beta_i = \beta_i(x) = \sum_{p,r} \mu_k^{-1} x_{pir}. \quad (\text{A.2})$$

タイプ k ジョブによるノード i に対する負荷 $\beta_i^{(k)}$ は,

$$\beta_i^{(k)} = \beta_i^{(k)}(x) = \sum_p \mu_k^{-1} x_{pik}. \quad (\text{A.3})$$

明らかに $\beta_i = \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(2)} + \dots + \beta_i^{(n)}$.

[仮定 II1] タイプ k ジョブのノード i における (待ち時間を含む) 平均処理時間 $F_{ik}(\beta_i)$ (すなわちコスト関数) は, $\mu_k^{-1} D(\beta_i)$ と表され, $D_i(\beta_i)$ は β_i の狭義の増加関数, 狭義の凸関数であり, 連続微分可能である.

[仮定 II2] タイプ k ジョブを, はじめに到着したノード i からノード j ($i \neq j$) へ移送するために要する (待ち時間を含む) 平均通信遅れ (コスト) $G_{ijk}(x)$ は, x の, 非減少, 凸, かつ, 連続微分可能な関数であり, $G_{iik}(x) = 0$ である.

グループ R_{ik} のジョブに対する平均応答時間は, 次のように表される.

$$T_{ik}(x) = \sum_j x_{ijk} T_{ijk}(x). \quad (\text{A.4})$$

ただし,

$$T_{iik}(x) = \mu_k^{-1} D(\beta_i(x)), \quad T_{ijk}(x) = \mu_k^{-1} D(\beta_j(x)) + G_{ijk}(x), \quad j \neq i. \quad (\text{A.5})$$

タイプ k ジョブ全体の平均応答時間, および, システム全体の平均応答時間は, それぞれ, 次のように表される.

$$T_k(x) = \frac{1}{m} \sum_i T_{ik}(x), \quad T(x) = \sum_k \phi_k T_k(x) = \frac{1}{m} \sum_{i,k} \phi_k T_{ik}(x). \quad (\text{A.6})$$

結果

(A) [集中的意志決定: 全体最適解] 全体最適解 \bar{x} は, 唯一存在し, 次のように与えられる: 全ての $i, j(\neq i), k$ に対して $\bar{x}_{ijk} = 0$ かつ $\bar{x}_{iik} = \phi_k$ (通信線は使われない). 平均応答時間は, 全ての i, k に対して

$$T_k(\bar{x}) = T_{ik}(\bar{x}) = \mu_k^{-1} D(\rho), T(\bar{x}) = \rho D(\rho).$$

(B) [意志決定の完全な分散: 個別最適解] 個別最適解 \hat{x} は, 唯一存在し, 全体最適解 \bar{x} と等しい. 従って, Braess ネットワークの場合と異なり, 個別最適状態においてはパラドックスは発生しない.

(C) [意志決定の中間的分散: グループ最適解] さらに, 通信線に関して次の仮定をおく.

[仮定 $\Pi 3$] $G_{ijk}(x)$ として次の関数を仮定する:

G-I 型: $G_{ijk}(x) = \omega_k^{-1} \underline{G}(\omega_k^{-1} x_{ijk})$ 到着ノード i , 処理ノード $j(\neq i)$, ジョブタイプ k の組合せごとに 1 本の通信線が用意される: 計 $m(m-1)n$ 本.

G-II(a) 型: $G_{ijk}(x) = \omega_k^{-1} \underline{G}(\sum_{p, q \neq p} \omega_k^{-1} x_{pqk})$ ジョブタイプ k ごとに 1 本の (そのタイプのジョブの転送を全て司る) バス型通信線が用意される: 計 n 本.

G-II(b) 型: $G_{ijk}(x) = \omega_k^{-1} \underline{G}(\sum_{p, q(\neq p), r} \omega_r^{-1} x_{pqr})$ システム全体に (全てのタイプのジョブの転送を全て司る) バス型通信線が 1 本用意される.

ただし, ω_k は定数, および, $\underline{G}(0) = 1$, $\underline{G}(x)$ は x の非減少, 凸, 微分可能関数とする.

注 A.1. ω_k^{-1} はタイプ k ジョブを到着したノードから処理ノードに移送するに要する (待ち時間を含まない) 平均通信時間となる. \square

グループ最適解 \tilde{x} は, 全ての i, k に対して以下をみたす.

$$T_{ik}(\tilde{x}) = \min_{x_{ik}} T_{ik}(\tilde{x}_{-(ik)}; x_{ik}), \text{ 制約条件: } (\tilde{x}_{-(ik)}; x_{ik}) \in C.$$

ただし, $(\tilde{x}_{-(ik)}; x_{ik})$ は, mmn 次元ベクトル \tilde{x} の \tilde{x}_{ik} に対応する成分を x_{ik} で置き換えたものである.

$\tilde{g}_{ijk}(\cdot)$ を次のように定義する.

$$\tilde{g}_{ijk}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{ijk}} \left\{ \phi_k \sum_{p \neq i} x_{ipk} G_{ipk}(x) \right\}. \quad (\text{A.7})$$

仮定 $\Pi 3$ が成り立つとき, すべての $i, j(\neq i), k$ に対して $x_{ijk} = x_k$ であるような x に関して次のように記す.

$$G_k(x) = G_{ijk}(x) \text{ および } \tilde{g}_k(x) = \tilde{g}_{ijk}(x).$$

グループ最適解: $\Gamma_k = \rho_k^2 \sigma_k^{-1}$ および $\sigma_k = \phi_k / \omega_k$ と記す. グループ最適解 \tilde{x} は唯一存在し次のように与えられる:

G-I および G-II(a) 型の場合

(a) $\Gamma_k D'(\rho) \leq \underline{G}(0)$ なるグループ R_{ik} について, 全ての $i, j(\neq i)$ に対して $\tilde{x}_{ijk} = 0$, および $\tilde{x}_{iik} = \phi_k$. これは, 全体最適解 \bar{x} と同じである. 平均応答時間は, 全ての i, k に対して, 同じく,

$$T_k(\tilde{x}) = T_{ik}(\tilde{x}) = \mu_k^{-1} D(\rho), T(\tilde{x}) = \rho D(\rho).$$

(b) $\Gamma_k D'(\rho) > \underline{G}(0)$ なるグループ R_{ik} について, 全ての $i, j(j \neq i), k$ に対して $\tilde{x}_{ijk} = \tilde{x}_k$. ただし, \tilde{x}_k は次式の唯一解である.

$$\rho_k^2 \phi_k^{-1} (\phi_k - m \tilde{x}_k) D'(\rho) = \tilde{g}_k(\tilde{x}_k) = \sigma_k [\underline{G}(m(m-1)\omega_k^{-1}\tilde{x}_k) + \omega_k^{-1}(m-1)\tilde{x}_k \underline{G}'(m(m-1)\omega_k^{-1}\tilde{x}_k)] \quad (\text{A.8})$$

平均応答時間は, 全ての i, k について,

$$T_k(\tilde{\mathbf{x}}) = T_{ik}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mu_k^{-1} D(\rho) + \phi_k^{-1} (m-1) \tilde{x}_k G_k(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (\text{A.9})$$

G-II(b) 型の場合

グループ最適解は次のような手順で求められる. まず k の順序づけを次のようにする.

$$\Gamma_1 \geq \Gamma_2 \geq \dots \geq \Gamma_k \geq \dots \geq \Gamma_n. \quad (\text{A.10})$$

すると K について次の3通りの場合がある:

$$\Gamma_K D'(\rho) > \underline{G}(0), \Gamma_{K+1} D'(\rho) \leq \underline{G}(0) \quad (\text{A.11})$$

$$\text{または } \Gamma_n D'(\rho) > \underline{G}(0) \text{ (すなわち } K = n) \quad (\text{A.12})$$

$$\text{または } \Gamma_1 D'(\rho) \leq \underline{G}(0). \quad (\text{A.13})$$

(A.13) の場合: 唯一解として, 全ての k に対して $\tilde{x}_k = 0$, が得られる.

(A.11) か (A.12) の場合, 唯一解は次のように求められる: $F_k(X)$ を次のように定義する.

$$F_k(X) = \left\{ \sum_{l=1}^k \frac{\sigma_l [\Gamma_l D'(\rho) - \underline{G}(X)]}{m \Gamma_k D'(\rho) + (m-1) \omega_l^{-1} \underline{G}'(X)} \right\} - \frac{X}{m(m-1)}. \quad (\text{A.14})$$

$F_{\tilde{k}}(\tilde{X}_{\tilde{k}}) = 0$ かつ $[\Gamma_{\tilde{k}} D'(\rho) - \underline{G}(\tilde{X}_{\tilde{k}})] > 0$ をみたす $k = \tilde{k} \leq K$ なる最大の k と $X = \tilde{X}_{\tilde{k}} (> 0)$ を求める. そして, 次式 (A.15) を $k = 1, 2, \dots, \tilde{k}$ に対して用いて,

$$\sigma_k [\Gamma_k D'(\rho) - \underline{G}(\tilde{X}_{\tilde{k}})] = \omega_k^{-1} \tilde{x}_k [m \Gamma_k D'(\rho) + (m-1) \omega_k^{-1} \underline{G}'(\tilde{X}_{\tilde{k}})]. \quad (\text{A.15})$$

$\tilde{x}_k > 0, k = 1, 2, \dots, \tilde{k}$ および $\tilde{x}_{\tilde{k}+1} = \tilde{x}_{\tilde{k}+2} = \dots = \tilde{x}_n = 0$ を得る. これが唯一解である. 平均応答時間は, 全ての i, k について,

$$T_k(\tilde{\mathbf{x}}) = T_{ik}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mu_k^{-1} D(\rho) + \phi_k^{-1} (m-1) \tilde{x}_k G_k(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (\text{A.16})$$

従って, 次のような結論が得られる. 対称的分散コンピュータシステムにおいて, パラドックスの発生するための必要十分条件は $\Gamma_k D'(\rho) > 1$ を満たすジョブタイプ k が存在することである.

注 A.2. これより, パラドックスによる応答性能の劣化の可能性は, グループごとに異なり, $\Gamma_k (= \rho_k^2 / \sigma_k = \phi_k \omega_k / \mu_k^2)$ の値に依存することが示唆される. 到着率 (ϕ_k), 処理所要時間 (μ_k^{-1}), が大きいグループほど, また通信所要時間 (ω_k^{-1}) が小さいグループほど, パラドックスの可能性が高い.

さらに各ノードの利用率 ($\rho (= \sum_k \rho_k)$) が高い状況で, パラドックスが生じやすい.

上記パラメータのうち, 到着率 ϕ_k については, $\sum_k \phi_k = 1$ であるので, グループが細分化される (ジョブタイプ数 n が大きくなる) ほど, それぞれの ϕ_k が小さくなり, パラドックスの生じる可能性が低くなると推測される. 他方, ノード数 m の増加は, 通信線におよぼす可能性を除けば, 直接に大きな影響を及ぼすようには見えない.

□

参考文献

- [1] E. Altman, T. Başar, T. Jiménez, and N. Shimkin: Competitive routing in networks with polynomial cost. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47-1** (2002), 92–96.
- [2] E. Altman and H. Kameda: Equilibria for multiclass routing in multi-agent networks. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control* (Orlando, Florida, Dec. 2001), 604–609.
- [3] E. Altman, H. Kameda, and Y. Hosokawa: Nash equilibria in load balancing in distributed computer systems. *International Game Theory Review*, **4-2** (2002), 91–100.
- [4] T. Boulogne, E. Altman, and O. Pourtallier: On the convergence to Nash equilibrium in problems of distributed computing. *Annals of Operations Research* (to appear).
- [5] D. Braess: Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, **12** (1968), 258–268.
- [6] B. Calvert, W. Solomon, and I. Ziedins: Braess’s paradox in a queueing network with state-dependent routing. *Journal of Applied Probability*, **34** (1997), 134–154.
- [7] J.E. Cohen: Cooperation and self-interest: Pareto-inefficiency of Nash equilibria in finite random games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **95** (1998), 9724–9731.
- [8] J.E. Cohen and P. Horowitz: Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks. *Nature*, **352** (1991), 699–701.
- [9] J.E. Cohen and C. Jeffries: Congestion resulting from increased capacity in single-server queueing networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **5** (1997), 1220–1225.
- [10] J.E. Cohen and F.P. Kelly: A paradox of congestion in a queueing network. *Journal of Applied Probability*, **27** (1990), 730–734, .
- [11] S. Dafermos and A. Nagurney: On some traffic equilibrium theory paradoxes. *Transportation Research B*, **18** (1984), 101–110.
- [12] S. Dafermos and A. Nagurney: Sensitivity analysis for the asymmetric network equilibrium problem. *Mathematical Programming*, **28** (1984), 174–184.
- [13] P. Dubey: Inefficiency of Nash equilibria. *Mathematics of Operations Research*, **11-1** (1986), 1–8.
- [14] S.F. El-Zoghdy, H. Kameda, and J. Li: Numerical studies on a paradox for non-cooperative static load balancing in distributed computer systems. *Computer and Operations Research* (to appear).
- [15] S.F. El-Zoghdy, H. Kameda, and J. Li: Numerical studies on paradoxes in non-cooperative distributed computer systems. *Game Theory and Application*, **9** (2003), 1-16.
- [16] I. Foster and C. Kesselman: *The Grid: Blueprint for a New Computing Infrastructure* (Morgen Kaufmann, 1998).
- [17] M. Frank: The Braess paradox. *Mathematical Programming*, **20** (1981), 283–302.
- [18] M. Frank: Cost effective links of ladder networks. *Methods of Operations Research*, **45** (1984), 75–86.

- [19] A. Haurie and P. Marcotte: On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop equilibria. *Networks*, **15** (1985), 295–308.
- [20] A. Inoie, H. Kameda, and C. Touati: A paradox in flow control of M/M/m queues. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control* (Paradise Island, The Bahamas, Dec. 2004), 2768–2773.
- [21] A. Inoie, H. Kameda, and C. Touati: A paradox in flow control of M/M/n queues. *Computers and Operations Research* (2004) (to appear).
- [22] H. Kameda: How harmful the paradox can be in the Braess/Cohen-Kelly-Jeffries networks. In *Proceedings of the IEEE INFOCOM 2002* (New York, June 2002), 437–445.
- [23] H. Kameda: Bounds on benefits and harms of adding connections to noncooperative networks. In N. Mitrou, et al., (eds.): *NETWORKING 2004 — Proceedings of the 3rd International IFIP-TC6 Networking Conference (Athens, Greece, May 9-14, 2004), Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3042* (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2004), 405–417.
- [24] H. Kameda, E. Altman, and T. Kozawa: Braess-like paradoxes of Nash equilibria for load balancing in distributed computer systems. *Technical Report ISE-TR-98-157* (Institute of Information Sciences and Electronics, University of Tsukuba, 1998).
- [25] H. Kameda, E. Altman, T. Kozawa, and Y. Hosokawa: Braess-like paradoxes in distributed computer systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45-9** (2001), 687–1691.
- [26] H. Kameda, J. Li, C. Kim, and Y. Zhang: *Optimal Load Balancing in Distributed Computer Systems* (Springer, 1997).
- [27] H. Kameda, M. Ohta, and Y. Hosokawa: Effects of symmetry on paradoxical cost degradation in a Nash-non-cooperative system. In *Proceedings of IFAC Modeling and Control of Economic Systems* (Klagenfurt, Austria, Aug. 2001), 99–104.
- [28] H. Kameda and O. Pourtallier: Paradoxes in distributed decisions on optimal load balancing for networks of homogeneous computers. *Journal of the ACM*, **49-3** (2002), 407–433.
- [29] W. Knödel: *Graphentheoretische Methoden und ihre Anwendungen* (Springer-Verlag, Berlin, 1969).
- [30] Y.A. Korilis, A.A. Lazar, and A. Orda: Architecting noncooperative networks. *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, **13** (1995), 1241–1251.
- [31] Y.A. Korilis, A.A. Lazar, and A. Orda: Avoiding the Braess paradox in noncooperative networks. *Journal of Applied Probability*, **36** (1992), 11–222.
- [32] J. Li and H. Kameda: Load balancing problems for multiclass jobs in distributed/parallel computer systems. *IEEE Transactions on Computers*, **47** (1998), 322–332.
- [33] Y. Masuda and S. Whang: Capacity management in decentralized networks. *Management Science*, **48** (2002), 1628–1634.
- [34] J.D. Murchland: Braess’s paradox of traffic flow. *Transportation Research*, **4** (1970), 391–394.
- [35] J.F. Nash, Jr.: Equilibrium points in N -person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36** (1950), 48–49.
- [36] A. Orda, R. Rom, and N. Shimkin: Competitive routing in multiuser communication networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **1** (1993), 614–627.

- [37] M.J. Osborne and A. Rubinstein: *A Course in Game Theory* (The MIT Press, Cambridge, Mass., 1994).
- [38] E.I. Pas and S.L. Principio: Braess's paradox: Some new insights. *Transportation Research B*, **31** (1997), 265–276.
- [39] M. Patriksson: *The Traffic Assignment Problem – Models and Methods* (VSP, Utrecht, 1994).
- [40] R.W. Rosenthal: A class of games processing pure-strategy Nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, **2** (1973), 65–67.
- [41] T. Roughgarden: Designing networks for selfish users is hard. In *Proceedings of the 42nd Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science* (2001), 472–481 (to appear in a special issue of *Journal of Computer and System Sciences*).
- [42] T. Roughgarden and É. Tardos: Bounding the inefficiency of equilibria in nonatomic congestion games. *Games and Economic Behavior*, **47-2** (2004), 389–403.
- [43] P.A. Samuelson: Tragedy of the open road: Avoiding paradox by use of regulated public utilities that charged corrected Knightian tolls. *Journal of International and Comparative Economics*, **1** (1992), 3–12.
- [44] S. Smale: Optimizing several functions. In *Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology (Manifolds Tokyo 1973)* (University of Tokyo Press, Tokyo, Japan, 1973), 69–75.
- [45] A. Smith: *The Wealth of Nations, Book IV, Ch. II* (Modern Library, 1776).
- [46] アダム スミス【著】 水田洋【監訳】 杉山忠平【訳】: 国富論 < 4 > (岩波書店, 2001) .
- [47] R. Steinberg and W.I. Zangwill: The prevalence of Braess's paradox. *Transportation Science*, **17-3** (1983), 301–318.
- [48] A. Taguchi: Braess's paradox in a two terminal transportation network. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **25-4** (1982), 376–388.
- [49] A.N. Tantawi and D. Towsley: Optimal static load balancing in distributed computer systems. *Journal of the ACM*, **32-2** (1985), 445–465.
- [50] J.G. Wardrop: Some theoretic aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineering, Part 2*, **1** (1952), 325–378.
- [51] Y. Zhang, H. Kameda, and K. Shimizu: Parametric analysis of optimal load balancing in distributed computer systems. *Journal of Information Processing* (Information Processing Society of Japan), **14-4** (1992), 433–441.
- [52] 亀田, 他: http://www.osdp.cs.tsukuba.ac.jp/~kameda/posted_papers.html.

亀田 壽夫

筑波大学大学院 システム情報工学研究科

〒 305-8573 つくば市天王台 1-1-1

E-mail: kameda@osdp.cs.tsukuba.ac.jp

ABSTRACT

**BOUNDS ON THE DEGREE OF PARADOXICAL PERFORMANCE DEGRADATION
IN NONCOOPERATIVE NETWORKS**

Hisao Kameda
University of Tsukuba

Networks, like the Internet, and distributed systems, like GRID, are shared by a number of independent users and organizations that may be regarded as independent/noncooperative decision makers. It may be expected that the entire performance of the networks will be guided to overall improvement, by the, so-called, Invisible Hand of God, if each decision maker pursues unilaterally its own performance objective by means of noncooperative decisions on, say, routing and/or load balancing. In addition, noncooperative and competitive decision making by independent decision makers will be preferred in many respects to top-down overall decision making. Nevertheless, mutually independent noncooperative decision making may bring about situations where all decision makers may suffer lower benefits than some other ways of decision making may do, as exemplified by the prisoners' dilemma mentioned in game theory. In particular, the Braess paradox shows the existence of cases where, under the scheme of independent decision making, if the degree of freedom of choices for each decision maker increases by adding new connections and/or facilities to the network, all decision makers suffer degradation of their utilities. Other examples of similar degradation have also been reported. We call such phenomena of degradation of utilities 'paradoxes.'

This article gives an overview on various research results on the paradoxes with emphasis on the possible degrees of performance degradation in such paradoxes.