日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research Society of Japan
2005 年 48 巻 12-25



# 2 次錐計画問題によるロバスト・トラッキングエラー最小化

稲場 広記　　水野 眞治　　中田 和秀
東京工業大学

(受理 2004 年 6 月 18 日; 再受理 2004 年 11 月 11 日)

**和文概要**　近年，金融市場におけるポートフォリオ選択問題に対し，市場パラメータの不確実性を考慮したロバスト最適化モデルが提案されている．本稿では，そのひとつであるロバスト・トラッキングエラー最小化モデルを凸計画問題の一種である 2 次錐計画問題に帰着できることを示す．2 次錐計画問題は近年開発された内点法により効率良く解くことができる．本稿の後半では実際に数値実験を行い，得られた最適化モデルが従来のモデルよりも効率的に解けることを実証する．

**キーワード**: 金融，リスク管理，ロバスト最適化，2 次錐計画問題

## 1. はじめに

金融市場におけるポートフォリオ選択問題とは，投資対象となるいくつかの金融資産に対し，リスクを抑えながらリターンが最大となるような投資比率（ポートフォリオ）を決める問題である．あるいは，一定のリターンを保証しながら，リスクが最小となるポートフォリオを決める問題である．ポートフォリオ選択問題に最初に数理的なモデルを提唱したのが，Markowitz[11] であった．Markowitz は，ポートフォリオのリターンとリスクをそれぞれ各資産の収益率の期待値と分散共分散行列を使って表現し，最低限得たい期待収益率を与えたとき，分散を最小にするポートフォリオを求める問題が凸 2 次計画問題となることを示した．

最近では，投資目的に応じて VaR や下半分散など様々なリスクを最小化させるモデル [7] が提案されている．その中で，トラッキングエラー最小化モデルは，投資家が目標となるポートフォリオ（ベンチマーク）の動きと連動するポートフォリオを構築したいときに用いられる．例えば，日経 225 や TOPIX などのインデックスに連動するポートフォリオを構築したい場合，インデックスを組成するポートフォリオ (市場平均ポートフォリオ) をベンチマークとして採用すればよい．投資家がこのモデルを選ぶ理由のひとつとして，CAPM 理論 [10] により，危険資産で構成される効率的なポートフォリオが市場平均ポートフォリオになると結論づけられた理論的背景が挙げられる．そのため，できるだけインデックスと連動するようなポートフォリオを構築したいと考える投資家は少なからず存在する．こういった運用手法をパッシブ運用と呼び，投資の実務の一分野として確立されている．以上の観点から，トラッキングエラー最小化モデルを研究することは非常に意義深いと考え，本稿の議論の対象とする．

平均分散モデルに代表されるポートフォリオ最適化が理論的な成功を収めたにもかかわらず，実務家はこの数理的モデルを避ける傾向にある．その理由のひとつとして，平均分散モデルから得られるポートフォリオを実際に運用した際，多くの場合に理論的なパフォーマ

ンスと実際のパフォーマンスとで，ずれが生じてしまうからである．その一番の原因は，モデルにおいて市場パラメータ（各資産の収益率の期待値および分散共分散行列）が既知であると仮定していることにある．すなわち，市場パラメータを既知として最適なポートフォリオを求めたとしても，実際のパフォーマンスは市場パラメータのずれに影響を受けてしまい，そのポートフォリオの最適性は保証されないのである．それゆえ，市場パラメータを精度良く推定する必要があるが，ヒストリカルデータから推定する場合に平均値のくもり [10] など無視することのできない事実があり，精度の良い推定は難しい．また，どのような推定法をとってみても，必ず推定誤差は存在してしまう．

以上の問題点を踏まえて，近年ではロバスト最適化という手法を用いて，市場パラメータの不確実性や推定誤差に対して頑強な (robust) ポートフォリオを構築するモデルが提案されている．凸最適化へのロバスト最適化は，Ben-tal と Nemirovski[1] によって提案され，ロバスト制御の分野でも Ghaoui[5] などによって研究されている．また，ポートフォリオ選択問題へのロバスト最適化の応用は，すでにいくつかの文献で発表されている．Goldfarb と Iyengar[6] は，平均分散モデルの拡張版のマルチファクターモデルに対するロバスト最適化モデルが，不確実性集合に楕円体を定義することにより，内点法を用いて効率よく解くことのできる 2 次錐計画問題に帰着できることを示した．また，様々なリスク指標や不確実性集合に対しても同様に研究がなされている．例えば，Lobo[9] はリスク指標と不確実性集合にそれぞれトラッキングエラーと楕円体を採用し，トラッキングエラー最小化モデルの期待収益率に関する制約式が半正定値制約に帰着できることを示した．さらに，Costa と Paiva[4] は不確実性集合を多面体で定義したロバスト・トラッキングエラー最小化モデルが LMI(線形行列不等式) の枠組みで解けることを示した．

本稿の着眼点は，Lobo[9] など既存の研究において，半正定値計画問題として定式化されているトラッキングエラー最小化モデルを，より単純な構造を持つ 2 次錐計画問題として定式化することにある．半正定値計画問題や LMI は，同じ問題のサイズの 2 次錐計画問題よりも解く時間が多くかかるということが知られている．また，半正定値計画問題は 2 次錐計画問題を含むクラスの問題であるので，後者から前者への変換は容易であっても，前者から後者の変換が必ずしも可能とはいえない．そこで，本稿では不確実性集合に楕円体を採用したトラッキングエラー最小化モデルに焦点をおき，既存の研究では半正定値計画問題として定式化されているこのモデルが，2 次錐計画問題に帰着できることを示す．その結果，ポートフォリオの計算時間が短縮されたことが本稿の最大の貢献である．今回，定式化に関しては 2 つの方法を採用する．一方は，Lobo[9] を参考に問題を一旦，半正定値計画問題に帰着したあと，行列の変換により 2 次錐計画問題に定式化する．もう一方は，トラッキングエラーが実数の絶対値に対して制約を課すことから，絶対値の性質を使って 2 次錐計画問題に定式化する．

本稿の構成は，以下のとおりである．2 節では，トラッキングエラー最小化モデルに対するロバスト最適化モデルが 2 次錐計画問題に帰着できることを示す．3 節では，2 節で定式化したロバスト・トラッキングエラー最小化モデルを使い数値実験を行う．この実験では，本稿によって定式化された 2 種類の 2 次錐計画問題によるモデルと既存の半正定値計画問題によるモデルを使い，それぞれの計算時間を比較する．4 節では，モデル構築と数値実験の結果を結論としてまとめる．

## 2. ロバスト・トラッキングエラー最小化モデル

1期間のポートフォリオ選択問題を考える．市場には投資対象となる資産が $n$ 個存在し，1期間後の各資産の収益率をベクトル $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, ..., r_n)^T \in \boldsymbol{R}^n$ で表す．ここで資産 $i$ の収益率 $r_i$ とは，資産 $i$ の時点0と時点1での価格 $P_i^0$ と $P_i^1$ を用いて $r_i = (P_i^1 - P_i^0)/P_i^0$ で定義される．たとえば，時点0で資産 $i$ に1円投資したとき，時点1では資産 $i$ は $(1 + r_i)$ 円の収益を生む．いま，収益率 $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^n$ は確率変数であるとし，その期待値と分散共分散行列をそれぞれ $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ とする．この $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ を市場パラメータと呼び，各資産の収益率分布を特徴づけている．また市場において，投資家が各資産に投資する配分率をポートフォリオ $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{R}^n$ で表し，$\mathbf{1}^T\boldsymbol{\phi} = 1$ を満たしているものとする．ただし，$\mathbf{1}$ はすべての要素が1である $n$ 次元ベクトルである．ベンチマークを構成する各資産の比率がポートフォリオ $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{R}^n$ で与えられているとする．このとき $\boldsymbol{\phi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ のトラッキングエラーは2つのポートフォリオにおける収益率の差を二乗したものの期待値で定義される．ここで分散共分散行列の定義より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma} &= \mathrm{E}[(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu})^T] \\
&= \mathrm{E}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T
\end{aligned}
$$

である．ゆえに $\boldsymbol{\phi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ のトラッキングエラーは

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[(\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}))^2] &= (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi})^T \mathrm{E}[\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T](\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}) \\
&= (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi})^T(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi})
\end{aligned}
$$

となる．このとき，ある制約のもとでトラッキングエラーが最小になるようなポートフォリオ $\boldsymbol{\phi}$ を求める最適化問題を考える．本稿では，制約として $\mathbf{1}^T\boldsymbol{\phi} = 1$ であることと，実務上の制約 (投資配分率の上限下限，あるいは元々一部の資産に投資しないことなどを表す制約) に対応する線形制約を $A\boldsymbol{\phi} \leq \boldsymbol{b}$ として課す．ただし $A \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$,$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$ である．以上より，トラッキングエラー最小化モデルは

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\min & (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi})^T(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}) \\
\text{s.t.} & \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi} = 1, \\
 & A\boldsymbol{\phi} \leq \boldsymbol{b}
\end{array}
\right.
\tag{2.1}
$$

と定式化できる．この問題をトラッキングエラー最小化モデルと呼ぶ．1期間後のパラメータ $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ が完全に分かっているときには，問題 (2.1) を解くことにより最適なポートフォリオが得られる．しかし，パラメータ $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ を前もって正確に知ることは不可能である．

Ben-tal と Nemirovski[1] は，パラメータが不確実なものであり，ある集合に含まれることが分かっているものと仮定し，パラメータが最悪な値をとったときについて最適化を行った．各資産の収益率の期待値 $\boldsymbol{\mu}$ と分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ がそれぞれ不確実性集合 $\mathcal{M} \subset \boldsymbol{R}^n$ と $\mathcal{S} \subset \boldsymbol{R}^{n\times n}$ に含まれるとき，問題 (2.1) のロバスト最適化モデルは

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\min & \max_{\{\boldsymbol{\Sigma}\in\mathcal{S},\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi})^T(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}) \\
\text{s.t.} & \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\phi} = 1, \\
 & A\boldsymbol{\phi} \leq \boldsymbol{b}
\end{array}
\right.
\tag{2.2}
$$

と定式化できる．この min-max 問題 (2.2) をロバスト・トラッキングエラー最小化モデルという．ここで，文献 [6][9] に従いパラメータ $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ は互いに影響を受けずに摂動すると仮定

する．その理由のひとつとして，期待値の誤差がそれほど大きくないものと仮定するならば，その誤差が分散に与える影響は少ないものと考えられるからである．$\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}$ とおいて，補助変数 $\nu, \lambda$ を導入することにより問題 (2.2) と等価な問題

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\min & \nu + \lambda \\
\text{s.t.} & \max_{\{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \le \lambda, \\
 & \max_{\{\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{S}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \le \nu, \\
 & \boldsymbol{1}^{\boldsymbol{T}} (\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) = 1, \\
 & A(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) \le \boldsymbol{b}, \\
 & \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}
\end{array}
\right. \tag{2.3}
$$

が得られる．

### 2.1. 半正定値計画問題への定式化

Lobo[9] は市場パラメータの期待収益率 $\boldsymbol{\mu}$ がある楕円体集合に入ると仮定したときに，問題 (2.3) における期待収益率 $\boldsymbol{\mu}$ に関する制約式が半正定値制約になることを証明した．そこでは，不確実性集合 $\mathcal{M}$ を正定値対称行列 $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ を用いて

$$
\mathcal{M} = \left\{ \boldsymbol{\mu} : (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{G} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \le 1 \right\} \tag{2.4}
$$

と定義している．ロバスト最適化において不確実性集合をどのように定義するかという問題は，[1] などにおいて活発に議論されている．しかし，多次元正規分布の信頼区間が楕円体になるなどの統計的な観点から，本稿では期待収益率 $\boldsymbol{\mu}$ の不確実性集合として楕円体集合のみを扱うこととする．

不確実性集合 $\mathcal{M}$ を式 (2.4) のように定義すれば，問題 (2.3) の期待収益率に関する制約式

$$
\max_{\{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \le \lambda \tag{2.5}
$$

は，以下の条件が成り立つことと同値である．

$$
(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{G} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) \le 1 \text{ を満たすすべての} \boldsymbol{\mu} \text{について} \boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} \le \lambda \text{となる．} \tag{2.6}
$$

さらに進む前に，次の補題を紹介する．

**補題 1 ($\mathcal{S}$-procedure)**[6][8] $F_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} + c_i \ (i = 0, ..., p)$ を $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ に関する 2 次関数とする．このとき

$$
\begin{bmatrix} c_0 & \boldsymbol{b}_0^T \\ \boldsymbol{b}_0 & \boldsymbol{A}_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{p} \tau_i \begin{bmatrix} c_i & \boldsymbol{b}_i^T \\ \boldsymbol{b}_i & \boldsymbol{A}_i \end{bmatrix} \succeq 0
$$

となる $\tau_i \ge 0 \ (i = 1, ..., p)$ が存在するならば，$F_i(\boldsymbol{x}) \ge 0 \ (i = 1, ...p)$ となるすべての $\boldsymbol{x}$ について，$F_0(\boldsymbol{x}) \ge 0$ が成り立つ．さらに $p = 1$ のとき，$F_1(\boldsymbol{x}_0) > 0$ となる $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}}$ が存在するならば，逆も成り立つ．ただし $\boldsymbol{P} \succeq 0$ は $\boldsymbol{P}$ が半正定値行列であることを意味する．

よって，$F_0(\boldsymbol{\mu}) = -\boldsymbol{\mu}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu} + \lambda, \ F_1(\boldsymbol{\mu}) = -(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{G} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) + 1$ として補題 1 を適用することにより，(2.6) が成り立つ必要十分条件は

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & -\tilde{\boldsymbol{\phi}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \end{bmatrix} - \tau \begin{bmatrix} 1 - {\boldsymbol{\mu}_0}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\mu}_0 & {\boldsymbol{\mu}_0}^T \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_0 & -\boldsymbol{G} \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{2.7}$$

を満たす $\tau \geq 0$ が存在することである．制約式 (2.7) は

$$\begin{bmatrix} \tau {\boldsymbol{\mu}_0}^T \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_0 - \tau + \lambda & -\tau {\boldsymbol{\mu}_0}^T \boldsymbol{G} \\ -\tau \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_0 & \tau \boldsymbol{G} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\boldsymbol{T}} \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{2.8}$$

と書くことができる．ここで次の補題を紹介する．

**補題 2 (Schur complement)**[2][9] 対称正定値行列 $V$ と対称行列

$$U = U^T = \begin{bmatrix} V & W \\ W^T & S \end{bmatrix}$$

について，以下が成り立つ．

$$U \succeq 0 \Longleftrightarrow S - W^T V^{-1} W \succeq 0.$$

よって，

$$S = \begin{bmatrix} \tau {\boldsymbol{\mu}_0}^T \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_0 - \tau + \lambda & -\tau {\boldsymbol{\mu}_0}^T \boldsymbol{G} \\ -\tau \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_0 & \tau \boldsymbol{G} \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{\boldsymbol{T}} \end{bmatrix},\ V = 1 \tag{2.9}$$

として補題 2 を適用することにより，制約式 (2.8) は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \\ 0 & \tau {\boldsymbol{\mu}_0}^T \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_0 - \tau + \lambda & -\tau {\boldsymbol{\mu}_0}^T \boldsymbol{G} \\ \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau \boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_0 & \tau \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{2.10}$$

となる．従って，期待収益率に関する制約式 (2.5) は半正定値制約 (2.10) と非負制約 $\tau \geq 0$ を用いて表現できる．詳細については [9] を参照されたい．

一方，Goldfarb と Iyenger[6] は，分散共分散行列の不確実性集合を特殊なノルムで定義することによって，問題 (2.3) の分散共分散行列に関する制約式

$$\max_{\{\boldsymbol{\Sigma} \in \mathcal{S}\}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\Sigma} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \leq \nu \tag{2.11}$$

が 2 次錐制約に帰着できることを示した．そこでは，市場パラメータの分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に対して，不確実性集合 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} + \boldsymbol{\Delta} \succ 0, \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}^T, ||\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}|| \leq \eta \right\} \tag{2.12}$$

と定義している．ただし，$\boldsymbol{\Sigma}_0 \succ 0$ であり，ノルム $||\boldsymbol{A}||$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の最大固有値を表し $||\boldsymbol{A}|| = \max_i |\lambda_i(\boldsymbol{A})|$ である．このとき，問題 (2.3) の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に関する制約式 (2.11) は，次の 2 次錐制約へ帰着できることが [6] で示されている．

$$\left\| \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ (1-\eta)\nu - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq (1-\eta)\nu + 1. \tag{2.13}$$

また，補題2を適用することにより制約式 (2.13) は半正定値制約として

$$\begin{bmatrix} (1-\eta)\nu+1 & & & 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ & \ddots & & \\ & & (1-\eta)\nu+1 & (1-\eta)\nu-1 \\ 2\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}} & & (1-\eta)\nu-1 & (1-\eta)\nu+1 \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{2.14}$$

と書くことができる．

よって，ロバスト・トラッキングエラー最小化モデル (2.2) は，パラメータの不確実性集合 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{S}$ を (2.4) と (2.12) とするとき，

$$\left|\begin{array}{ll} \min & \nu+\lambda \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \\ 0 & \tau\boldsymbol{\mu_0}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0}-\tau+\lambda & -\tau\boldsymbol{\mu_0}^T\boldsymbol{G} \\ \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau\boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0} & \tau\boldsymbol{G} \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & \tau \geq 0, \\ & \begin{bmatrix} (1-\eta)\nu+1 & & & 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ & \ddots & & \\ & & (1-\eta)\nu+1 & (1-\eta)\nu-1 \\ 2\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}} & & (1-\eta)\nu-1 & (1-\eta)\nu+1 \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & \boldsymbol{1^T}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi})=1, \\ & A(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi}) \leq \boldsymbol{b}, \\ & \tilde{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi} \end{array}\right. \tag{2.15}$$

として，半正定値計画問題に定式化できる．

### 2.2. 2次錐計画問題への定式化

この節では，半正定値制約式 (2.10) が2次錐制約に帰着できることを証明する．制約式 (2.10) の左辺の行列を $\boldsymbol{M}$ とおくと，$\boldsymbol{G}$ が正定値対称行列であるので $\boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{G}$ となる対称行列 $\boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}}$ と $\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}=(\boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}})^{-1}$ が存在し，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} \succeq 0 \iff & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{0}^T \\ 0 & 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{0}^T \\ 0 & 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \succeq 0 \\ \iff & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & \tau\boldsymbol{\mu_0}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu_0}-\tau+\lambda & -\tau\boldsymbol{\mu_0}^T\boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau\boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu_0} & \tau\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

となる．ここで，(2.16) の左辺の行列を $\tilde{\boldsymbol{M}}$ で表す．$\tau=0$ の場合，(2.7) より $\tilde{\boldsymbol{M}} \succeq 0$ の必要十分条件は，

$$\lambda \geq 0 \text{ かつ } \tilde{\boldsymbol{\phi}}=0 \tag{2.17}$$

である．次に，$\tau > 0$ の場合，$\tilde{\boldsymbol{M}}$ の右下の $(n \times n)$ 行列に対し，再び補題 2 を適用することにより，

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\mu_0} - \tau + \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \\ -\tau \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau \boldsymbol{G}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mu_0} \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\mu_0} - \tau + \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu_0} \\ -\tau \boldsymbol{\mu_0}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} & \tau^2 \boldsymbol{\mu_0}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\mu_0} \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\tau} \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{G}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\phi}} & \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \boldsymbol{\mu_0} \\ \boldsymbol{\mu_0}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} & -\tau + \lambda \end{bmatrix} \succeq 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} & z \\ z & -\tau + \lambda \end{bmatrix} \succeq 0 \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\phi}}, z = \boldsymbol{\mu_0}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}}$ である．制約式 (2.18) は $(2 \times 2)$ 行列の半正定値制約である．このとき $(2 \times 2)$ 対称行列について

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \succeq 0 \iff a \geq 0,\ c \geq 0,\ ac - b^2 \geq 0$$

が成り立つので，制約式 (2.18) は

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} &\geq 0, \\
-\tau + \lambda &\geq 0, \qquad (2.19) \\
(1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w})(-\tau + \lambda) - z^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

となる．このとき $\tau > 0$ と (2.19) を満たす変数 $(\tau, \lambda, z, \boldsymbol{w})$ の集合を考えると，

$$\begin{aligned}
&\left\{ (\boldsymbol{w}, \tau, \lambda, z) \mid 1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} \geq 0, -\tau + \lambda \geq 0, (1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w})(-\tau + \lambda) - z^2 \geq 0, \tau > 0 \right\} \\
&= \left\{ (\boldsymbol{w}, \tau, \lambda, z) \mid \exists x, y \in \boldsymbol{R}, 1 - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w} \geq x, -\tau + \lambda = y, xy - z^2 \geq 0, x \geq 0, y \geq 0, \tau > 0 \right\}
\end{aligned}$$

が成り立つので，制約式 (2.19) は追加変数 $x, y$ を導入することで

$$\begin{aligned}
\tau(1 - x) &\geq \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{w}, \\
y &= -\tau + \lambda, \\
xy &\geq z^2, \qquad (2.20) \\
x &\geq 0, \\
y &\geq 0
\end{aligned}$$

と置き換えることができる．また，制約式 (2.20) は $\tau = 0$ のとき制約式 (2.17) と同値なので，以下では $\tau \geq 0$ として考える．ここで次の補題を紹介する．

**補題 3** $x, y \geq 0$ のとき，双曲線制約 $\boldsymbol{z^T z} \leq xy$ は 2 次錐制約 $\left\| \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{z} \\ x-y \end{bmatrix} \right\| \leq x+y$ として表すことができる．

**証明：**$x, y \geq 0$ のとき，

$$\boldsymbol{z^T z} \leq xy \Leftrightarrow 4\boldsymbol{z^T z} \leq (x+y)^2 - (x-y)^2 \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{z} \\ x-y \end{bmatrix} \right\| \leq x+y.$$

補題 3 より (2.20) の中の不等式 $\tau(1-x) \geq \boldsymbol{w^T w}$, $xy \geq z^2$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{w} \\ \tau+x-1 \end{bmatrix} \right\| &\leq \tau - x + 1, \\ \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ x-y \end{bmatrix} \right\| &\leq x+y \end{aligned}$$

となり，2 次錐制約になる．以上より，制約式 (2.5) は

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{w} \\ \tau+x-1 \end{bmatrix} \right\| &\leq \tau - x + 1, \\ y &= -\tau + \lambda, \\ \left\| \begin{bmatrix} 2z \\ x-y \end{bmatrix} \right\| &\leq x+y, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ \tau &\geq 0, \\ \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \\ z &= \boldsymbol{\mu_0}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

と書くことができ，2 次錐制約と線形制約になることが示された．

一方，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に関しては 2.1 節の結果から，2 次錐制約 (2.13) になることが示されている．以上より，ロバスト・トラッキングエラー最小化モデル (2.2) は，パラメータ

の不確実性集合 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{S}$ を (2.4) と (2.12) とするとき，制約式 (2.13) と (2.21) より

$$\left|\begin{array}{ll}\min & \nu+\lambda \\ \text{s.t.} & \left\|\begin{bmatrix} 2\boldsymbol{w} \\ \tau+x-1\end{bmatrix}\right\| \le \tau-x+1, \\ & y=-\tau+\lambda, \\ & \left\|\begin{bmatrix} 2z \\ x-y\end{bmatrix}\right\| \le x+y, \\ & x\ge 0, \\ & y \ge 0, \\ & \tau\ge 0, \\ & \boldsymbol{w}=\boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \\ & z=\boldsymbol{\mu_0}^T\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \\ & \left\|\begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ (1-\eta)\nu-1\end{bmatrix}\right\| \le (1-\eta)\nu+1, \\ & \boldsymbol{1^T}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi})=1, \\ & A(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi})\le \boldsymbol{b}, \\ & \tilde{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi}\end{array}\right. \tag{2.22}$$

として，2 次錐計画問題に定式化できる．

**2.3. 2 次錐計画問題への定式化 – 絶対値の性質を利用した方法 –**

一方，問題 (2.2) を補助変数 $\nu,\lambda,t$ を導入して

$$\left|\begin{array}{ll}\min & \nu+\lambda \\ \text{s.t.} & t^2\le\lambda, \\ & \max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T\tilde{\boldsymbol{\phi}}\le t^2, \\ & \max_{\{\boldsymbol{\Sigma}\in\mathcal{S}\}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\Sigma}\tilde{\boldsymbol{\phi}}\le\nu, \\ & \boldsymbol{1^T}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi})=1, \\ & A(\tilde{\boldsymbol{\phi}}+\boldsymbol{\psi})\le \boldsymbol{b}, \\ & \tilde{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\psi}\end{array}\right. \tag{2.23}$$

とすると，より簡単な定式化で 2 次錐制約が得られる．ここで問題 (2.23) の期待収益率に関する制約式

$$\max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T\tilde{\boldsymbol{\phi}}\le t^2 \tag{2.24}$$

が不確実性集合 $\mathcal{M}=\left\{\boldsymbol{\mu}:(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0)^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0)\le 1\right\}$ のもと 2 次錐制約に帰着できることを証明しよう．ここで $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ は正定値対称行列である．$\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ をスカラーの 2 乗であると考えれば，制約式 (2.24) は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} & \max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}}|\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\mu}|^2\le t^2 \\ \Longleftrightarrow\ & \max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}}|\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\mu}|\le t \\ \Longleftrightarrow\ & \begin{cases}\max_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\mu}\le t, \\ \min_{\{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{M}\}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}^T\boldsymbol{\mu}\ge -t.\end{cases}\end{aligned} \tag{2.25}$$

以上より導き出された (2.25) は不確実性集合 $\mathcal{M}$ が (2.4) で表される楕円であるとき，簡単に

$$\begin{aligned} z + \|\boldsymbol{w}\| &\leq t, \\ z - \|\boldsymbol{w}\| &\geq -t \end{aligned}$$

と表すことができる．ただし，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}, z = \boldsymbol{\mu_0}^T\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ である．よって，問題 (2.23) における期待収益率 $\mu$ に関する制約式 (2.24) は 2 つの 2 次錐制約で

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{w}\| &\leq t - z, \\ \|\boldsymbol{w}\| &\leq t + z \end{aligned}$$

と書くことができる．また問題 (2.23) における制約式 $t^2 \leq \lambda$ は補題 3 より

$$\left\| \begin{bmatrix} 2t \\ \lambda - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq \lambda + 1,$$

となり，2 次錐制約になる．分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ に関する制約式は，2.1 節の結果 (2.13) を使うことにより 2 次錐制約になる．最終的に得られる問題は以下のような 2 次錐計画問題になる．

$$\left| \begin{array}{ll} \min & \nu + \lambda \\ \text{s.t.} & \left\| \begin{bmatrix} 2t \\ \lambda - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq \lambda + 1, \\ & \|\boldsymbol{w}\| \leq t - z, \\ & \|\boldsymbol{w}\| \leq t + z, \\ & \boldsymbol{w} = \boldsymbol{G}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \\ & z = \boldsymbol{\mu_0}^T\tilde{\boldsymbol{\phi}}, \\ & \left\| \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{\Sigma}_0^{\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ (1-\eta)\nu - 1 \end{bmatrix} \right\| \leq (1-\eta)\nu + 1, \\ & \boldsymbol{1^T}(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) = 1, \\ & A(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) \leq \boldsymbol{b}, \\ & \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}. \end{array} \right. \tag{2.26}$$

## 3. 数値実験

この節では，前節で定式化した 2 種類のロバスト・トラッキングエラー最小化モデル (2.22) と (2.26) について実際に数値実験を行い，既存の半正定値計画問題によるモデル (2.15) との計算時間の違いを確認する．本稿の狙いは，既存のロバスト・トラッキングエラー最小化モデルを 2 次錐計画問題に帰着させることで，以前のモデルよりも計算時間を短縮させることにある．つまり，ポートフォリオ最適化に対しロバスト最適化を適用することの是非を議論しているのではない．そのため，実際の市場データを用いてロバストポートフォリオのパフォーマンスを検証する，といった数値実験は本稿では割愛する．あくまでも本稿の主たる目的である計算時間の短縮のみに的を絞って，以下では数値実験を行う．またその一方で，2 次錐計画問題に定式化された 2 種類の問題 (2.22) と (2.26) についての比較・検討も行う．両者が変数変換して同値な問題になるといった，陽な関係を持つかどうかは現時点では不明

である．しかし，両者が計算機上でどのような振る舞いをするのかといった視点は非常に興味深い．そこで，計算時間を計測する実験と並行して，両者の最適値・最適ポートフォリオが一致するかどうかを確認し，それぞれの問題におけるソルバー上での変数と制約式の数を比較・検討する．

簡単のため，2.3 節と 2.4 節の 2 次錐計画問題によるモデル (2.22) 及び (2.26) をそれぞれ SOCP1 及び SOCP2，既存の半正定値計画問題によるモデル (2.15) を SDP と呼ぶ．SOCP1, SOCP2，SDP それぞれに対し，資産数 $n = \{5, 10, 50, 100, 500, 1000\}$ と段階的に設定し，その計算時間の変化を調べる．また，今回は最適解を得るまでの計算時間に着目したので，各実験におけるパラメータ $\boldsymbol{\mu_0}, \boldsymbol{\Sigma_0}$ は実際の金融市場のデータを用いて推定するのではなく，模擬的なデータ ($n$ 次元正規乱数を発生させてその標本平均，標本分散を採用) とした．同様に，パラメータ $\boldsymbol{G}, \eta$ については，以下のように設定した．期待収益率 $\boldsymbol{\mu}$ の不確実性集合 $\mathcal{M}$ の楕円体の形状を決めるパラメータ $\boldsymbol{G}$ については，

$$\boldsymbol{G} = \mathbf{diag}(\frac{1}{\sigma^2_{\hat{\mu}_i}}), \quad i = 1, ..., n \tag{3.1}$$

と設定した．ただし，$\sigma_{\hat{\mu}_i}$ は期待収益率の推定値 $\hat{\mu}_i$ の標準偏差を表し，記号 $\mathbf{diag}(a_i)$, $i = 1, ..., n$ は対角要素を $a_i$ とする $n \times n$ 対角行列を表す．また，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の不確実性集合 $\mathcal{S}$ を決めるパラメータ $\eta$ については簡単に $\eta = 0.5$ とおいた．さらに，実務上の制約 $A(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{\psi}) \leq \boldsymbol{b}$ として $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_i + \boldsymbol{\psi}_i = 0\ (i = 1, .., \lfloor n/2 \rfloor)$，すなわち $\boldsymbol{\phi}_i = 0\ (i = 1, .., \lfloor n/2 \rfloor)$ という制約を課した．ただし，記号 $\lfloor a \rfloor$ は $a$ を超えない最小の整数を意味する．この制約は実務上投資不可能な資産を規定することを意味している．SOCP1，SOCP2 および SDP を解くソルバーとしては SeDuMi[12] の Version 1.05 を使用し，PC(Pentium 4 - 2.59GHz, 512MB) 上で実行した．SeDuMi を使用する際，問題 (2.22)，(2.26) 及び (2.15) を主問題としてみなすか，双対問題としてみなすか 2 つの選択肢がある．ここではそれぞれ両方の問題を計算機上で解き，最も計算時間が速いほうを採用した．全てのモデルで双対問題として計算したほうが計算効率が上がったので，表 1 にある結果は全てのモデルを双対問題として計算した結果である．

資産数 $n$ を段階的に変えたとき SOCP1，SOCP2 および SDP の計算時間は表 1 の [CPU 時間] のようになった．資産数 $n$ が増加するにつれて，2 次錐計画問題のモデル (SOCP1, SOCP2) のほうが SDP よりも計算効率が良いことが見てとれる．資産数が 500 以上では，SOCP1,SOCP2 と SDP との時間差は 100 倍程度ある．ポートフォリオ選択問題を考えるときに対象とする資産数はすくなくとも 100 銘柄以上，可能ならば数千銘柄以上で解く事が好ましいと考えられるため，この計算時間の違いは無視することのできない差であるといえる．

SOCP1 と SOCP2 の計算時間を比較すると，どちらも甲乙つけがたい結果となった．実際に表 1 の [変数][線形制約] を比較すると，それぞれ約 $4n$ と約 $n$ となっている．いずれも多少の違いはあれどもほぼ一致した結果となり，計算時間に差がないことにも納得ができる．しかしながら，若干の計算時間の差があるのは線形制約のデータ構造の違い，あるいは 2 次錐制約の個数差に起因するものだろう．例えば，SOCP1 は $n+1$ 次元の 2 次錐制約がふたつと 2 次元の 2 次錐制約がひとつあるのに対し，SOCP2 は $n+1$ 次元の 2 次錐制約がひとつと $n$ 次元の 2 次錐制約がふたつ，2 次元の 2 次錐制約がひとつある．一方，このように計算時間やデータ構造に若干の違いはあったが，計算の結果，両者の最適値と最適解 (最適ポー

トフォリオ) は多くともそれぞれ $10^{-8}$ と $10^{-5}$ の差であり，ほぼ一致した．ゆえに，どちらのモデルを用いたとしても実用的には大差がないと結論付けられる．

表 1: 計算結果の比較

| | 資産数 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 変数 | SOCP1 | 35 | 56 | 216 | 416 | 2016 | 4016 |
| | SOCP2 | 33 | 54 | 214 | 414 | 2014 | 4014 |
| | SDP | 112 | 313 | 5513 | 21013 | 505013 | 2010013 |
| 線形制約 | SOCP1 | 10 | 15 | 55 | 105 | 505 | 1005 |
| | SOCP2 | 9 | 14 | 54 | 104 | 504 | 1004 |
| | SDP | 8 | 13 | 53 | 103 | 503 | 1003 |
| 反復回数 | SOCP1 | 12 | 12 | 14 | 16 | 20 | 25 |
| | SOCP2 | 14 | 12 | 15 | 17 | 19 | 21 |
| | SDP | 16 | 16 | 23 | 26 | 38 | 43 |
| CPU 時間 (秒) | SOCP1 | 0.281 | 0.125 | 0.219 | 0.453 | 15.234 | 131.016 |
| | SOCP2 | 0.156 | 0.140 | 0.234 | 0.484 | 14.359 | 97.422 |
| | SDP | 0.140 | 0.172 | 1.265 | 7.188 | 1437.641 | 11637.906 |

## 4. おわりに

本稿ではポートフォリオ選択問題の 1 種であるトラッキングエラー最小化モデルについてロバスト最適化をおこなった．そして，そのロバスト最適化モデルが 2 次錐計画問題に帰着できることを証明した．ロバスト・トラッキングエラー最小化モデルは，Lobo[9] により半正定値計画問題のクラスに定式化されていたが，より単純な構造を持つ 2 次錐計画問題に定式化できた．このことは，最適ポートフォリオの計算において大きなメリットとなり，数値実験を行うことにより本稿のモデルが従来の半正定値計画問題によるモデルよりも大幅に計算時間が改善されることを実証した．

## 謝辞

本稿の初稿に査読者から有益なコメントをいただいたことに感謝します．本研究の一部は，科学研究費 基盤研究 (A)16201033 ならびに 若手研究 (B) 14750049 から補助を受け行われました．

## 参考文献

[1] A. Ben-Tal and A. Nemirovski: Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, **23** (1998), 796-805.

[2] A. Ben-Tal and A. Nemirovski: *Lectures on Modern Convex Optimization* (SIAM, Philadelphia, 2001).

[3] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (SIAM, Philadelphia, 1994).

[4] O.L.V. Costa, A.C. Paiva: Rubust portfolio selection using linear-matrix inequalities. *Jornal of Economic Dynamics and Control*, **26** (2002), 889-909.

[5] L.E. Ghaoui and H. Lebret: Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *Journal on Matrix Analysis and Applications*, **18** (1997), 1035-1064.

[6] D. Goldfarb and G. Iyengar: Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Reserch*, **28** (2003), 1-38.

[7] 枇々木規雄: 金融工学と最適化 (朝倉書店, 2001).

[8] 岩崎 徹也: *LMI* と制御 (昭晃堂, 1997).

[9] M.S. Lobo: Robust and convex optimization with applications in finance. *Doctor thesis,* (The Department of Electrical Engineering and The Committee on Graduate Studies, Stanford University, 2000).

[10] D.G. Luenberger: *Investment Science* (Oxford University Press, NewYork, 1998).

[11] H. Markowitz: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* (John Wiley, NewYork, 1959).

[12] J.F. Sturm: Using SeDuMi 1.02, A Matlab Toolbox for Optimization over Symmmetric Cones. *Optimization Methods and Software*, **11-12** (1999), 625-653.

水野 眞治
東京工業大学社会理工学研究科
〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1
E-mail: `mizuno@me.titech.ac.jp`

## ABSTRACT

# ROBUST TRACKING ERROR OPTIMIZATION PROBLEMS BY SECOND-ORDER CONE PROGRAMMING

Hiroki Inaba Shinji Mizuno Kazuhide Nakata
*Tokyo Institute of Technology*

Recently, a robust optimization model is proposed to portfolio selection problems in a financial market in view of uncertainty of market parameters. Assuming that the uncertain parameters are not specified exactly but they are known to belong to a given set, the robust optimization problem is to find an optimal solution when the parameters take worst-case values.

We consider a robust tracking error optimization problem which is one of the portfolio selection problems. It is known that the problem is reduced to a semidefinite programming problem, meanwhile we reduce it to a second-order cone programming problem which has a more simple structure than that of a semidefinite programming problem. Both of semidefinite programming and second-order cone programming are one of convex optimization problems, and a second-order cone programming problem usually can be solved more easily than a semidefinite programming problem.

In the latter half of the paper, we present computational experiments, and we demonstrate that our model can be solved more quickly than the existing model, especially when the number of variables of a robust tracking error optimization problem is large.