日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌
Transactions of the Operations Research
Society of Japan
2005 年 48 巻 1-11

フィードバックのある資源配分問題

一森 哲男
大阪工業大学

森口 聡子*
科学技術振興機構, *CREST*

(受理 2003 年 5 月 26 日; 再受理 2004 年 10 月 29 日)

和文概要　本論文では新しいタイプの資源配分問題を扱った．活動に投入する資源の量を入力と考え，資源を投入した結果得られる効用を出力と考える．そして，出力に比例した量が再び資源として消費される．つまり，フィードバックのある資源配分問題である．活動への投入資源が連続値と離散値をとる場合をそれぞれ考えた．前者は非凸領域上の凹関数の最大化問題となるが，凸計画法問題に帰着できることを示した．また，後者の問題は NP 困難になることを述べ，動的計画法を用いて解けることを示した.

キーワード: 探索，資源配分，非線形計画，動的計画，離散最適化

1. はじめに

オペレーションズ・リサーチの揺籃期からの研究として探索理論がある．探索理論の初期の内容については多田 [12]，探索理論（捜索理論）の最近までの詳しい解説は飯田 [5] および飯田，宝崎 [6] に述べられている．この理論は隠れている目標物をいかにして発見するかを議論する．初期の研究として Koopman [9–11] の 3 部作はよく知られている．今日，理論的に最も重要とされているのは最後の論文 [11] で，これは手持ちの探索労力を，対象とする探索領域にどのように配分すれば，目標物の発見確率を最大にできるかを議論している．同じテーマで，探索領域を「離散化」した問題を Charnes と Cooper [1] が議論している．これは単純な非線形計画法の問題とも考えられるが，むしろ，資源配分問題のはじまりと考えられている．より，厳密にいえば，Koopman [8] の研究が資源配分問題の起源であろうが，ここでは「離散化」された領域が 2 つしかない.

資源配分問題では，手持ちの資源を複数の活動に配分する．各活動は受け取った資源の量に応じた効用を得る．そして，効用の総和を最大にする．つまり，効用の総和が最大になるように手持ちの資源を活動間でうまく配分する．詳しいことは茨木と加藤の文献 [4, 7] に述べられている.

さまざまなタイプの資源配分問題が研究されてきたが，どのタイプの資源配分問題でも必ず各配分量に非負条件が与えられ, 手持ち資源量に上限が設けられている．特に，非負制約と資源量に上限のみを制約とした問題を単純資源配分問題という．一方，効用をあらわす目的関数は分離形で，増加で凹と仮定することが多い．なぜならば，一般に, 資源を多く受け取ればそれだけ効用は大きくなり，その増加の割合は逓減するからである.

本論文では，今述べた最も基本的な単純資源配分問題にフィードバックを考慮した問題を扱う．例として，地雷撤去作業を考えてみると理解しやすい．地雷の埋まった土地を探索し，

*現在は上智大学に勤務.

地雷を発見する．このとき，探索者は発見した地雷を放置することはありえない．探索者は地雷の探索を中止し，これの撤去作業に移る．地雷を見つければ見つけるほど，撤去作業に労力が奪われ探索する労力が減少する．地雷の埋まった土地を活動対象と考え，探索と撤去作業に費やされた労力を資源，発見した地雷の数を効用と考える．このとき，得られた効用に比例して資源が消費される．つまり，フィードバックが発生している．このような例は枚挙にいとまがない．農園における，害虫の被害の発見と除去，ソフトウェアのバグの発見と修正，顧客の獲得とその保持などさまざまなものが考えられる．また，以前の研究にフィードバックを追加した問題も考えられる．例えば，Koopman [11] の考えた問題では，敵の潜水艦の発見で研究が終わっているが，実のところ，潜水艦の発見後は，これを放置することはできなく，探索は中止され攻撃を行うであろう．

これらは対象物を多く発見すればするほど，それに比例して発見した対象物を処理する労力が必要となってくる．著者の知る範囲では，フィードバックを考慮に入れた資源配分問題はこれまで研究されたことがない新しい研究のようである．

活動に投入する資源の量を入力と考え，資源投入した結果得られる効用を出力と考える．この出力に比例した量が再度，資源として消費される．このような意味で，我々の提案した問題をフィードバックのある資源配分問題と呼ぶ.

Charnes と Cooper [1] の問題などの標準的な資源配分問題は凸計画法の問題（凸領域上の凹関数の最大化）であるが，フィードバックのある資源配分問題はそうならない．具体的には，非凸領域上の凹関数の最大化問題となる．しかしながら，問題の特徴を活用することにより，この問題が凸計画法の問題に再定式化できることを数学的に示した．また，この問題の最適性の条件について調べた．数値例として，活動が 10 個の問題を解いてみた．次に，配分できる資源が離散値に限定されると，フィードバックのある資源配分問題は NP 困難であることを述べた．動的計画法で解けることを示し，再び，活動が 10 個の数値例を解いてみた.

2. 連続資源問題

この節では，活動に投入する資源は連続量と仮定する．投入資源が離散量の場合の議論は後で行う．まず，連続資源配分問題を定式化する．この問題に対し 2 つの重要な性質を導く.

1. この問題は非凸計画問題となるが，凸計画問題として再定式化が可能である.
2. この非凸計画問題の局所的最適解が大域的最適解になる.

また，この節の終わりに，フィードバックのある連続資源配分問題の簡単な数値例を与える．これは，離散資源配分問題の資源配分結果と比較するのにも用いる.

2.1. 凸計画法による再定式化

各活動 j に対し効用関数 $f_j(x_j)$ が定義され，非減少で微分可能な凹関数と仮定する．目的はこれらの効用関数の和の最大化である．資源は各活動の入力に使われるだけでなく，各活動のフィードバックにも使われる．この問題を次のように定式化してみる.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(FB)} & \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \\
& \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \{x_j + c_j f_j(x_j)\} \le Q, \\
& & x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n).
\end{array}
$$

この問題 (FB) の活動は全部で n 個存在する．定数 $c_j \ge 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ をフィードバック係数と呼ぶ．変数 x_j $(j = 1, \ldots, n)$ は活動 j に与えた資源の量つまり入力を示す．制約式の右辺の定数 Q は現在の手持ちの資源の総量である．簡単のため定数 Q は有限で正としておく．また，一般に，何の投資もしなければ，何も得られないので，各 j に対し $f_j(0) = 0$ と仮定する．

この問題 (FB) は凸計画問題とはなっていない．制約式の左辺に目的関数である凹関数が入っているため，実行可能領域は凸集合ではない．しかしながら，問題 (FB) は次のように凸計画問題 (CFB) に書き直すことができる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(CFB)} & \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \\
& \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (x_j + c_j y_j) \le Q, \\
& & y_j - f_j(x_j) \le 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \\
& & x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \\
& & y_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n).
\end{array}
$$

定理 1. 凸計画問題 (CFB) の任意の最適解 $(x_1^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ に対し $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ は問題 (FB) の最適解である．

証明 (CFB) で y_j を $f_j(x_j)$ で置き換えると (FB) がえられる．このとき，(CFB) に $f_j(x_j) \ge 0$ という制約が生じるが，これは削除できる．なぜならば，$f_j(x_j)$ は非減少で $f_j(0) = 0$ と仮定していたからである．

このことから，(CFB) の任意の最適解 $(x_1^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ が与えられたとき，すべての j に対し

$$y_j^* = f_j(x_j^*)$$

であれば，証明が終わる．よって，ある k に対し

$$y_k^* < f_k(x_k^*)$$

と仮定する．$y_k^* \ge 0$ なので，この仮定は $f_k(x_k^*) > 0$ となる．仮定として，$f_k(0) = 0$ なので，$f_k(x_k^*) > 0$ は $x_k^* > 0$ を意味する．

いま，開集合 $A := \{(x_k, y_k) \mid y_k < f_k(x_k),\, x_k > 0\}$ を考える．すると，上記のことから，点 (x_k^*, y_k^*) は A の内点である．よって，(x_k^*, y_k^*) を中心とした半径 $c_k\epsilon > 0$ の十分小さな開球

$$S_{c_k\epsilon}(x_k^*, y_k^*) := \{(x_k, y_k) \mid \| (x_k, y_k) - (x_k^*, y_k^*) \|_\infty < c_k\epsilon\}$$

をとり，$S_{c_k\epsilon}(x_k^*, y_k^*) \subset A$ となるようにできる。このとき，$(x_k^* - c_k\epsilon, y_k^* + \epsilon) \in S_{c_k\epsilon}(x_k^*, y_k^*)$ である．すなわち，適当に正の数 ϵ をとれば，

$$x_k^* - c_k\epsilon > 0, \quad y_k^* + \epsilon < f_k(x_k^* - c_k\epsilon)$$

となる．

次に，上記の ϵ を用いて，(CFB) の解として $(x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}, y_1^{**}, \ldots, y_n^{**})$ を以下のように定義する．

$$\begin{cases} x_k^{**} = x_k^* - c_k\epsilon \\ x_j^{**} = x_j^* & (j \neq k) \\ y_k^{**} = y_k^* + \epsilon \\ y_j^{**} = y_j^* & (j \neq k) \end{cases}$$

すると，上式より

$$y_k^{**} - f_k(x_k^{**}) \leq 0$$

が成り立つ．さらに，(CFB) の他の制約式も満足していることが容易に確認できるので，この解 $(x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}, y_1^{**}, \ldots, y_n^{**})$ は実行可能解である．さらに，目的関数に関しても

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{**} > \sum_{j=1}^{n} y_j^*$$

なので，$(x_1^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ の最適性に矛盾する．故に，$y_k^* < f_k(x_k^*)$ となる k は存在しない．　　（証明終り）

この定理 1 によれば，問題 (FB) の最適解を得るには，凸計画問題 (CFB) の最適解を求めればよいことが分かる．さらに，凸計画問題の局所的最適解は大域的最適解なので，問題 (CFB) の局所的最適解を求めれば，問題 (FB) の (大域的) 最適解が得られる．最近の非線形計画法のソフトウエアの性能および問題 (CFB) の単純な構造を考えると，(CFB) の局所的最適解を得ることは難しくない．よって，フィードバックのある資源配分問題の変数が実数値を取る場合は解決したと考える．

2.2. 非凸計画問題 (FB) の最適性

前節 2.1 で，一般には解きにくい非凸計画問題である (FB) の最適解を求めることは，解きやすい凸計画問題 (CFB) の最適解を求めることに帰着されることを述べた．一方，この非凸計画問題 (FB) の最適解に関して，非常に興味深い性質がある．つまり，問題 (FB) の局所的最適解が大域的最適解となっていることである．このことは，ある意味で，問題 (FB) が凸計画問題に等価であることを意味している．ここでは，この性質を導くことを考える．

まず，問題 (FB) の Kuhn-Tucker 条件 [2] を調べると以下のようになる．

定理 2 (Kuhn-Tucker 条件)．問題 (FB) の実行可能な解 $(x_1, \ldots, x_n)$ が局所的最適解となるための必要条件は，適当な制約想定のもとで

$$-f_j'(x_j) + \lambda\left(1 + c_j f_j'(x_j)\right) \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{2.1}$$

$$x_j\left\{-f_j'(x_j) + \lambda\left(1 + c_j f_j'(x_j)\right)\right\} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{2.2}$$

$$\lambda\left[\sum_{j=1}^{n}\{x_j + c_j f_j(x_j)\} - Q\right] = 0 \tag{2.3}$$

を満足する Kuhn-Tucker 乗数 $\lambda \geq 0$ が存在することである．

問題 (FB) の局所的最適解 $(x_1,\dots,x_n)$ に対し，一次独立制約想定が満足されていることを以下に示す．制約式 $\sum_{j=1}^n \{x_j+c_jf_j(x_j)\}-Q\le 0$ がアクティブにならない場合は自明なので，アクティブとする．$Q>0$ なので非負制約 $-x_j\le 0$ $(j=1,\dots,n)$ がアクティブになるのは高々 $n-1$ 個である．いま，一般性を失うことなく，最初の $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ 個の非負制約がアクティブとすれば，全部で $k+1$ 個のアクティブ制約の制約関数の勾配ベクトルは以下の $k+1$ 個

$$\overbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\dots\quad}^{k\text{ 個}},\quad\begin{bmatrix}1+c_1f'(0)\\1+c_2f'(0)\\1+c_3f'(0)\\\vdots\\1+c_nf'(x_n)\end{bmatrix}$$

となる．$1+c_nf'(x_n)>0$ なので，明らかにこれらのベクトルは一次独立である．よって，局所的最適解 $(x_1,\dots,x_n)$ では，一次独立制約想定が満たされている．このことにより，問題 (FB) の各局所的最適解に対し，式 (2.1),(2.2),(2.3) を満足する非負の Kuhn-Tucker 乗数 λ の存在が保証される．

一方，問題 (CFB) では明らかに Slater の制約想定が満たされている．以前同様に凸計画問題 (CFB) の Kuhn-Tucker 条件を調べると以下のようになる．

定理 3 (Kuhn-Tucker 条件)**.** 問題 (CFB) の実行可能な解 $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ が大域的最適解となるための必要十分条件は,

$$\lambda-f_j'(x_j)\mu_j\ge 0\quad(j=1,\dots,n), \tag{2.4}$$
$$-1+c_j\lambda+\mu_j\ge 0\quad(j=1,\dots,n), \tag{2.5}$$
$$x_j\left\{\lambda-f_j'(x_j)\mu_j\right\}=0\quad(j=1,\dots,n), \tag{2.6}$$
$$y_j\left(-1+c_j\lambda+\mu_j\right)=0\quad(j=1,\dots,n), \tag{2.7}$$
$$\lambda\left\{\sum_{j=1}^n(x_j+c_jy_j)-Q\right\}=0, \tag{2.8}$$
$$\mu_j\left\{y_j-f_j(x_j)\right\}=0\quad(j=1,\dots,n) \tag{2.9}$$

を満足する Kuhn-Tucker 乗数 $\lambda\ge 0$, $\mu_j\ge 0$ $(j=1,\dots,n)$ が存在することである．

式 (2.1),(2.2),(2.3) を満足する，問題 (FB) の実行可能解 x_j $(j=1,\dots,n)$ と非負の Kuhn-Tucker 乗数 λ の値をそれぞれ $\bar{x}_j$ $(j=1,\dots,n)$ と $\bar{\lambda}$ とおく．さらに

$$\bar{y}_j=f_j(\bar{x}_j),$$
$$\bar{\mu}_j=\frac{1}{1+c_jf_j'(\bar{x}_j)}$$

とおく．

ここで $x_j=\bar{x}_j$, $y_j=\bar{y}_j$, $\mu_j=\bar{\mu}_j$, $(j=1,\dots,n)$, $\lambda=\bar{\lambda}$ を問題 (CFB) の制約式および式 (2.4) から (2.9) に代入するとすべての式を満足していることが確かめられる．このことから $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)$ は (CFB) の大域的最適解であることが分かり，定理 1 より

$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ が (FB) の大域的最適解であることが分かる．以上のことより次の性質が得られる．

定理 4. 問題 (FB) の局所的最適解は大域的最適解となる．

2.3. 数値例

フィードバックのある連続資源配分問題がどのような問題であるかを明らかにするため，以下の例題を考える．文献 [1, 11] でも用いられているが，j 番目の活動の効用をあらわす関数として

$$f_j(x_j) = m_j\,(1 - \exp(-s_j x_j))$$

を採用してみる．ここで，定数 m_j と s_j は正としている．

活動の数は $n = 10$ とし，与えられた資源の上限は $Q = 10,000$ とする．各活動のパラメータ m_j, s_j, c_j を表 1 に示す．

表 1: m_j, s_j, c_j の値

j	m_j	s_j	c_j
1	30.0	5.5×10^{-4}	77.0
2	30.0	5.0×10^{-4}	80.0
3	30.0	4.5×10^{-4}	83.0
4	22.0	5.5×10^{-4}	77.0
5	22.0	5.3×10^{-4}	79.0
6	22.0	4.7×10^{-4}	81.0
7	22.0	4.5×10^{-4}	83.0
8	16.0	5.5×10^{-4}	77.0
9	16.0	5.0×10^{-4}	80.0
10	16.0	4.5×10^{-4}	83.0

表 2 に解を示す．この例では，入力に 53.7% の資源が費やされ，残りの 46.3% がフィードバックに費やされていることがわかる．

表 2: 入力，フィードバック，効用

活動 j	入力 x_j	フィードバック $c_j m_j(1 - e^{-s_j x_j})$	効用 $m_j(1 - e^{-s_j x_j})$
1	1,243.3	1,144.2	14.9
2	1,126.5	1,033.5	12.9
3	959.8	873.3	10.5
4	679.4	528.2	6.9
5	603.5	475.8	6.0
6	388.6	297.4	3.7
7	270.6	209.3	2.5
8	100.4	66.2	0.9
9	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0
総計	5,372.0	4,628.0	58.2

3. 離散資源問題

この節では，活動に投入する資源は離散量と仮定する．まず，このフィードバックのある離散資源配分問題を定式化し，この問題がNP 困難であることを示す．次に，この問題が動的

計画法により解けることを示す．

定式化のため，次の問題を考える．例えば，領域 j に，地雷探索のために x_j 人が配置されると，1 日で平均的に $f_j(x_j)$ 個の地雷が見つかると仮定する．また，1 人で 1 日当り除去できる地雷の平均個数を r_j とすれば，$\lceil f_j(x_j)/r_j \rceil$ 人の人間が必要となる．全体で Q 人の人間が利用できるならば，我々の問題は以下のように定式化できる．記号を統一するため $c_j = \frac{1}{r_j}$ とする．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(IFB)} & \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \\
& \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \{x_j + \lceil c_j f_j(x_j) \rceil\} \le Q, \\
& & x_j \in \boldsymbol{Z}_+ \quad (j = 1, \ldots, n).
\end{array}
$$

ここで，記号 $\boldsymbol{Z}_+$ は非負の整数の集合である．目的関数 $f_j(x_j)$ は以前同様，実数 $x_j \ge 0$ に対して定義され，実数値をとる非減少の凹関数である．フィードバック係数 $c_j \ge 0$ も実数とする．資源の総量 Q は正の整数とする．

まず，この問題が NP 困難であることを示す．任意の正の整数 a_j, d_j に対し，フィードバック係数 c_j を

$$
1 + c_j a_j = d_j \quad \text{すなわち} \quad c_j = \frac{d_j - 1}{a_j} \tag{3.1}
$$

となるように設定する．さらに $f_j(x_j) = a_j x_j$ と設定する．すると，整数制約を付加した，フィードバックのある離散資源配分問題 (IFB) のスペシャルケースが次の整数ナップサック問題 (IK) となる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(IK)} & \max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \\
& \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \le Q, \\
& & x_j \in \boldsymbol{Z}_+ \quad (j = 1, \ldots, n).
\end{array}
$$

よく知られているように，整数ナップサック問題は NP 困難 [3] であるので，整数制約を付加した，フィードバックのある離散資源配分問題 (IFB) は NP 困難となる．

次に，この問題が動的計画法を用いて解けることを示する．以下，表記を簡単化するため整数条件 $x_j \in \boldsymbol{Z}_+$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ は略し，関数 $g_j(x_j) = x_j + \lceil c_j f_j(x_j) \rceil$ を定義する．

動的計画法の漸化式を導くため，記号 $F_k(y)$ を定義する：

$$
F_k(y) = \max \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j) \quad \text{s.t.} \sum_{j=1}^{k} g_j(x_j) \le y. \tag{3.2}
$$

これは資源量の上限を整数値 $y \in \{0, 1, \ldots, Q\}$ に設定し，活動を $1, 2, \ldots, k$ に制限した場合 $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$ の効用の総和の最大値である．だから，$F_n(Q)$ が問題 (IFB) の最適目的関数値となる．

$F_k(y)$ を求める際，変数 x_k に着目して，つまり，$x_k \in \{0, 1, \ldots, Q\}$ なので，順に $x_k = 0$, $x_k = 1$, $x_k = 2$, ... と $y - g_k(x_k)$ が負となる直前まで調べて行けば，どこかで $F_{k-1}(y - g_k(x_k)) + f_k(x_k)$ の値が最大となり，その最大値が $F_k(y)$ となる．つまり

$$F_k(y) = \max_{x_k \in \{0, \ldots, q_{ky}\}} \{F_{k-1}(y - g_k(x_k)) + f_k(x_k)\} \tag{3.3}$$

となる．ここで，q_{ky} は $y - g_k(x_k) \geq 0$ を満たす x_k の 最大の整数値である．$f_k(0) \equiv 0$ と仮定しているので q_{ky} は 0 以上の整数である．また，$F_0(y) = 0$ $(y \in \{0, 1, \ldots, Q\})$ と定義している．この漸化式より容易に (IFB) の最適解が得られる．

この動的計画法による解法の計算量について考える．式 (3.3) の各 $F_k(y)$ を求めるのに，$f_k(1)$, $f_k(2)$, ... , $f_k(q_{ky})$ の値を求める必要がある．$q_{ky} \leq Q$ なので，各 $F_k(y)$ を求めるのに，$O(Q)$ 回の関数評価を行っている．よって，$F_n(Q)$ を求めるには $O(nQ^2)$ 回の関数評価が必要である．ただし，これらの関数の値が事前に入力データとして与えられているならば，この解法の時間計算量は $O(nQ^2)$ といえる．これは擬多項式時間となっている．扱っている問題が NP 困難であることから，多項式時間の解法を期待するのは困難である．

次に，以前の連続形の問題を離散形の問題にして解いてみる．以前同様，j 番目の活動の効用をあらわす関数として

$$f_j(x_j) = m_j (1 - \exp(-s_j x_j)) \tag{3.4}$$

を採用する．ここで，定数 m_j と s_j も以前のとおりで，表 1 の数値とする．フィードバック係数 c_j（表 1）と資源の総量 $Q = 10,000$ および活動の数 $n = 10$ も以前のままとする．計算した結果を表 3 に示す．

表 3: 入力，フィードバック，効用

活動 j	入力 x_j	フィードバック $\lceil c_j f_j(x_j) \rceil$	効用 $f_j(x_j)$
1	1,243	1,144	14.9
2	1,133	1,038	13.0
3	962	875	10.5
4	690	535	6.9
5	583	462	5.8
6	395	302	3.7
7	266	206	2.5
8	100	66	0.9
9	0	0	0.0
10	0	0	0.0
総計	5,372	4,628	58.2

連続形の場合と同一の効用関数を用いたことと, 資源の総量が大きいことからほぼ同一の結果が期待される．数値計算結果をみてもそのことは理解できる．今回の結果でも以前と同じく，入力に 53.7% の資源が費やされ，残りの 46.3% はフィードバックに費やされている．効用の総和も 58.2 と連続形の場合と同じ値となっている．

最後に，この実行結果に対する実行時間について簡単に述べる．この動的計画法による解法では，計算量が $O(nQ^2)$ といっても，確実に活動の数 n と資源の総量 Q に比例することは明らかである．残りの $O(Q)$ は不等式 $q_{ky} \leq Q$ から導かれたもので，q_{ky} が完全に Q に

表 4: 資源の総量と実行時間の関係

資源量 Q	実行時間 (単位：秒)	資源量 Q	実行時間 (単位：秒)
1,000	0.27	11,000	264.78
2,000	1.07	12,000	319.17
3,000	4.80	13,000	378.29
4,000	19.20	14,000	442.19
5,000	40.42	15,000	510.93
6,000	67.44	16,000	584.76
7,000	99.50	17,000	662.98
8,000	136.58	18,000	746.00
9,000	178.67	19,000	834.79
10,000	215.65	20,000	926.28

依存するわけではない．この部分，つまり $O(Q)$ は効用関数の形に依存している．資源の総量を変化させたときの実行時間の変化を表 4 にまとめた．これらの数値は CPU(Pentium III, 750MHz), メモリー (254MB)，OS(Windows 2000) のパソコンでの実行結果で，使用したプログラムの言語は FORTRAN である．

4. あとがき

新しいタイプの資源配分問題を提案した．従来の資源配分問題と同様に，活動に投入する資源が連続値をとる場合と離散値をとる場合とを考えた．前者は特殊な非線形計画問題となる．従来の連続資源配分問題が性質の良い凸計画法の問題であったのに対し，我々の問題は非凸計画問題となる．しかしながら，この問題が凸計画問題として再定式化できることを示した．

後者の離散資源配分問題に対しては，これまで，グリーディな解法を導入することで，効率良く解くことが可能であった．しかし，我々の問題は NP 困難な問題となることを示すことにより，従来のような効率的な解法が期待できないことを示唆した．一例として，動的計画法で解けることを示した．この場合，目的関数に凹性を仮定しなくとも解くことができる長所はあるものの，大規模な問題に対しては解法の効率が危惧される．実際，我々の解いた例題では，活動の数は $n = 10$ であり，例えば, 資源の総量が $Q = 10,000$ のとき CPU 時間は約 3 分半，$Q = 20,000$ のとき CPU 時間は約 15 分半もかかっている．明らかに，大規模な問題に対しては今後の課題として新たな解法が必要である．

参考文献

[1] A.Charnes and W.W.Cooper: The theory of search: optimal distribution of effort. *Management Science*, **5** (1958), 44–49.

[2] 福島雅夫: 非線形最適化の基礎 (朝倉書店, 東京, 2001).

[3] M.R.Garey and D.S.Johnson: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (W.H.Freeman, San Francisco, 1979).

[4] T.Ibaraki and N.Katoh: *Resource Allocation Problems: Algorithmic Approaches* (The MIT Press, 1988).

[5] 飯田耕司: 捜索理論－捜索オペレーションの数理 (MORS 会, 東京, 1998).

[6] 飯田耕司, 宝崎隆祐: 改定 捜索理論－捜索オペレーションの数理 (三恵社, 名古屋, 2003).

[7] N.Katoh and T.Ibaraki: Resource Allocation Problems. D.-Z. Du and P.M.Pardalos, eds.: *Handbook of Combinatorial Optimization* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998), Vol.2, 159–260.

[8] B.O.Koopman: The optimum distribution of effort. *Operations Research*, **1** (1953), 52–63.

[9] B.O.Koopman: The theory of search: part I, kinematic bases. *Operations Research*, **4** (1956), 324–346.

[10] B.O.Koopman: The theory of search: part II, target detection. *Operations Research*, **4** (1956), 503–531.

[11] B.O.Koopman: The theory of search: part III, the optimum distribution of searching effort. *Operations Research*, **5** (1957), 613–626.

[12] 多田和夫: 探索理論 (日科技連, 東京, 1973).

一森哲男
大阪工業大学情報科学部情報システム学科
〒 573-0196 枚方市北山 1-79-1
E-mail: ichimori@is.oit.ac.jp

ABSTRACT

THE RESOURCE ALLOCATION PROBLEM WITH FEEDBACK

Tetsuo Ichimori
Osaka Institute of Technology

Satoko Moriguchi
Japan Science and Technology Agency, CREST

This paper treats a new type of resource allocation problem. In this problem we consider resources allocated to activities or consumed at activities as inputs and their effectiveness function values as outputs. Some proportion of the outputs are returned to the inputs which also consume the resources. We name this the resource allocation problem with feedback. We consider two cases. The former case allows resources to divide into any fraction while in the latter case allocated resources are restricted to whole numbers.

The former case naturally yields maximizing a concave objective over a non-convex region. However, it is shown that it can be easily reduced to a convex program.

The latter case yields an NP-hard problem. It is shown that it can be solved by dynamic programming.